

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM QUỲNH TRANG

SỰ TỒN TẠI VÀ CÔ ĐẶC NGHIỆM
CỦA MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC
CHỨA TOÁN TỬ P-LAPLACE PHÂN THỨ

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số : 9460102

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Thái Nguyên - 2026

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Nguyễn Văn Thìn

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường họp tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Vào hồi ngày tháng năm 2026

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Trung tâm Số - Đại học Thái Nguyên
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Các phương trình đạo hàm riêng nhiều pha được sử dụng rộng rãi để mô tả các hiện tượng mà tính chất phụ thuộc vào hướng, với một ứng dụng tiêu biểu là trong xử lý ảnh, đặc biệt là bài toán khử nhiễu thông qua các mô hình truyền nhiệt.

Trong trường hợp đẳng hướng, cơ chế khuếch tán tuyến tính làm mịn ảnh theo mọi hướng, dẫn đến hiện tượng làm mờ các cạnh và biên. Ngược lại, các mô hình khuếch tán nhiều pha cho phép mô tả quá trình khuếch tán có chọn lọc theo từng hướng, nhờ đó các vùng đồng nhất được làm mịn để giảm nhiễu, trong khi các cạnh và biên được bảo toàn. Các mô hình như phương trình Perona–Malik là ví dụ điển hình.

Ngoài ứng dụng trong khử nhiễu, các phương trình nhiều pha còn được sử dụng trong phục chế ảnh, cho phép thông tin lan truyền theo các hướng cấu trúc của ảnh như cạnh, đường biên hoặc hoa văn, giúp giữ được hình dạng ban đầu của ảnh.

Trong lĩnh vực vật lý và khoa học vật liệu, các phương trình này đóng vai trò quan trọng trong việc thiết kế các vật liệu dị hướng, nơi các tính chất vật lý phụ thuộc vào hướng.

Song song với các phương trình mang tính địa phương, nhiều mô hình hiện đại còn sử dụng các toán tử không địa phương để mô tả các hiện tượng có tương tác dài hạn. Các toán tử như Laplace phân thứ và p -Laplace phân thứ xuất hiện trong nhiều bài toán như tối ưu hóa, tài chính, khuếch tán bất thường, cơ học lượng tử, khoa học vật liệu, động lực học chất lỏng và sinh học.

Các nghiên cứu về phương trình chứa toán tử không địa phương tập trung vào ba hướng chính:

1. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các phương trình đạo hàm riêng phân thứ.
2. Nghiên cứu tính chất của nghiệm như tính chính quy, tính đối xứng, đáng điều kiện cận của nghiệm,
3. Sự bùng nổ của nghiệm các phương trình khuếch tán (truyền nhiệt, truyền sóng).

Trong luận án này, chúng tôi tập trung vào hướng nghiên cứu đầu tiên. Ở hướng nghiên cứu này, vấn đề nghiên cứu cũng hết sức đa dạng do sự xuất hiện của nhiều dạng phương trình khác nhau. Bài toán kiểu Kirchhoff xuất phát từ phương trình kiểu

$$\rho u_{tt} - \left(\frac{p_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L |u_x|^2 dx \right) u_{xx} = 0, \quad (1)$$

trong đó ρ, L, E, h, p_0 là các hằng số với ý nghĩa vật lý nhất định, Kirchhoff coi nó như một sự mở rộng của phương trình sóng cổ điển của D'Alembert dùng để mô tả dao động ngang của một sợi dây căng.

Phương trình Choquard được cho bởi

$$-\Delta v + V(x)v = (I_\alpha * |v|^p)|v|^{p-2}v \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \quad p > 2,$$

trong đó I_α là thế vị Riesz được xác định với mỗi điểm $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. P. Choquard là người đầu tiên nghiên cứu phương trình Choquard nhằm mô tả một electron dao động xung quanh vùng quỹ đạo của nó. Phương trình này cũng xuất hiện trong lý thuyết về polaron ở trạng thái nghỉ cũng như trong các mô hình mô tả tương tác giữa cơ học lượng tử phi tương đối và hấp dẫn. Năm 2019, Teng và Agarwal nghiên cứu sự tồn tại của nghiệm không âm với năng lượng cực tiểu và sự không tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu của phương trình Choquard-Schrödinger-Poisson chứa toán tử phân thứ như sau

$$(-\Delta)^s v + V(x)v + K(x)\phi_v^t |v|^{q-2}v = (I_\alpha * |v|^p)|v|^{p-2}v \quad \text{trong } \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

Năm 2020, Ambrosio-Radulescu công bố công trình gần đây về sự tồn tại

nghiệm yếu của phương trình chứa toán tử hai pha (p, q) -Laplace dạng:

$$(-\Delta)_p^s v + (-\Delta)_q^s v + V(\zeta x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = f(v) \text{ trong } \mathbb{R}^N, \quad (3)$$

trong đó $\zeta > 0$ là tham số nhỏ, $s \in (0, 1)$, $1 < p < q < \frac{N}{s}$ và f là hàm liên tục với độ tăng mũ dưới hạn trong không gian Sobolev phân thứ và V thỏa mãn một số điều kiện nhất định. Năm 2022, Zhang-Tang-Radulescu nghiên cứu phương trình phân thứ hai pha trong trường hợp độ tăng mũ tối hạn và trên tối hạn trong $\mathbb{R}^N$ có dạng

$$(-\Delta)_p^s v + (-\Delta)_q^s v + V(\zeta x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = h(v) + |v|^{r-2}v, \quad (4)$$

trong đó $r = q_s^*$ hoặc $r > q_s^*$ và $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm liên tục. Lưu ý rằng khi $s \rightarrow 1^-$, phương trình (3) trở thành

$$-\Delta_p v - \Delta_q v + V(\zeta x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = f(v) \text{ trong } \mathbb{R}^N. \quad (5)$$

Một hướng khác liên quan đến phương trình Born-Infeld dựa trên một biến phân của mật độ Maxwell's Lagrangian và tồn tại trong điện từ học, điện tĩnh học và điện động học, là nguồn cảm hứng cho phương trình không đẳng hướng trong $\mathbb{R}^N$:

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{(1 - 2|\nabla u|^2)^{1/2}} \right) = h(u) \text{ trong } \mathbb{R}^N.$$

Thật vậy, sử dụng khai triển Taylor ta thu được

$$-\Delta u - \Delta_4 u - \frac{3}{2}\Delta_6 u - \dots - \frac{(2n-3)!!}{(2n-1)!!}(n-1)!\Delta_{2n} u.$$

Năm 2024, Ambrosio và Zheng cùng các cộng sự nghiên cứu sự nhiều nghiệm và sự cô đặc nghiệm cho bài toán:

$$(-\Delta)_p^s v + (-\Delta)_q^s v + V(\zeta x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right) f(u). \quad (6)$$

Ambrosio đã chứng minh sự tồn tại và nhiều nghiệm của (6) bằng phương pháp phạt, lý thuyết Ljusternik-Schnirelmann và phương pháp biến phân. So với bài toán được đưa ra trong luận án, giả thiết về V và f là khác nhau. Hơn nữa, ta không sử dụng phương pháp phạt do điều kiện của thể vị V .

Phương trình

$$(-\Delta)_p^s v + V(\zeta x)|v|^{p-2}v = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\right)\mathfrak{f}(v) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \quad (7)$$

được nghiên cứu bởi Ambrosio trong. Ngoài ra, khi $p = 2$, năm 2020, Chen-Li-Yang nghiên cứu sự tồn tại nhiều nghiệm và sự cô đặc nghiệm cho phương trình:

$$\zeta^{2s}(-\Delta)^s v + V(x)v = \zeta^{\mu-N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\right)\mathfrak{f}(v) + |v|^{2_s^*-2}v \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \quad (8)$$

trong đó V thỏa mãn điều kiện (V) và $\mathfrak{f}$ thỏa mãn các giả thiết thích hợp.

Một phương trình Schrödinger kỳ dị có dạng

$$-div(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) + V(x)|u|^{N-2}u = \frac{f(x, u)}{|x|^\eta}, x \in \mathbb{R}^N, \quad (9)$$

trong đó $N \geq 2$, $0 \leq \eta < N$, $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục, $f(x, s)$ liên tục trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Khi $\eta = 0$, phương trình (9) là phương trình elliptic cổ điển không chứa kỳ dị được nghiên cứu lần đầu bởi Cao năm 1992 cho trường hợp $N = 2$.

Năm 2020, Thịn mở ra hướng nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm cho phương trình kỳ dị chứa toán tử p -Laplace phân thứ trong $\mathbb{R}^N$ với dạng

$$\mathcal{L}_p^s u(x) + V(x)|u|^{p-2}u = \frac{f(x, u)}{|x|^\gamma}, \quad (10)$$

trong đó $\gamma \in [0, N)$, $s \in (0, 1)$, $\mathcal{L}_p^s$ là toán tử p -Laplace phân thứ được định nghĩa bởi

$$\mathcal{L}_p^s \varphi(x) = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x)} |\varphi(x) - \varphi(y)|^{p-2} (\varphi(x) - \varphi(y)) K(x - y) dy,$$

với $x \in \mathbb{R}^N$, φ là hàm đủ trơn và $K : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm đo được.

Năm 2022, Yanjun và Chungeng nghiên cứu sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu cho phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger kỳ dị với hàm phi tuyến có độ tăng mũ trong $\mathbb{R}^N$ như sau:

$$M \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^N + V(x)|u|^N dx \right) \left(-\Delta_N u + V(x)|u|^{N-2}u \right) = \frac{f(x, u)}{|x|^\eta}, \quad (11)$$

trong đó $N \geq 2$, $0 < \eta < N$, $\Delta_N u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u)$. V là hàm liên tục bị chặn dưới bởi một số dương, $f(x, t)$ có độ tăng mũ tới hạn.

Năm 2023, Zhang, Han và Thịn sử dụng Định lý Vượt núi để chứng minh sự tồn tại nghiệm cho phương trình kiểu Schrödinger-Kirchhoff chứa toán tử p -Laplace phân thứ dạng

$$\begin{aligned} M \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^p dx \right) \\ \times \left(\mathcal{L}_p^s u(x) + V(x) |u|^{p-2} u \right) = K(x) f(x, u), \end{aligned} \quad (12)$$

trong đó M là hàm Kirchhoff liên tục, $0 < s < 1 < p < \infty$, $sp = N$, f là hàm số liên tục trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ với độ tăng mũ tới hạn, K, V là các hàm liên tục dương thỏa mãn các điều kiện thích hợp.

Xuất phát từ các nghiên cứu trên, chúng tôi thấy một số **vấn đề mở** cần được khám phá thêm như sau:

Vấn đề mở 1: Năm 2020, Chen-Li-Yang nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình Choquard (8) chứa toán tử Laplace phân thứ và số mũ tới hạn $|v|^{2_s^*-2}v$. Ambrosio nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình Choquard chứa toán tử p -Laplace phân thứ (7). Hơn nữa Zheng cùng các cộng sự nghiên cứu sự nhiều nghiệm và sự cô đặc nghiệm cho phương trình Choquard chứa toán tử (p, q) -Laplace phân thứ (6). Do đó một vấn đề tự nhiên là mở rộng kết quả của Chen-Li-Yang, Ambrosio cho phương trình Choquard phân thứ nhiều pha với số mũ tới hạn.

Vấn đề mở 2: Thịn nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kỳ dị (10) chứa toán tử p -Laplace phân thứ với độ tăng mũ, Yanjun và Chungen nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán kiểu Kirchhoff với kỳ dị (11) chứa toán tử p -Laplace với độ tăng mũ. Vấn đề tự nhiên là mở rộng kết quả của Thịn cho phương trình kiểu Kirchhoff.

Trong luận này, xuất phát từ mặt khoa học và ứng dụng thực tế của các lớp toán tử không địa phương, bài toán kiểu Kirchhoff và phương trình đạo hàm riêng nhiều pha, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình Kirchhoff phân thứ nhiều pha. Chúng tôi hy vọng rằng sự kết hợp của các mô hình này sẽ mô tả được nhiều hệ thống vật lý, sinh học, hóa học hơn. Chúng tôi cố gắng giải quyết **Vấn đề mở 1 và 2**. Cụ thể, luận

án nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các phương trình phân thứ sau:

1. Phương trình Choquard phân thứ nhiều pha

$$\sum_{i=1}^m ((-\Delta)_{p_i}^s u + \eta_1 |u|^{p_i-2} u) = \eta_2 \left[\frac{1}{|x|^\mu} * H_1(u) \right] h_1(u) + \eta_3 h_2(u),$$

trong đó hàm phi tuyến có độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser. Hơn nữa, chúng tôi cũng nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình Choquard phân thứ nhiều pha với độ tăng tới hạn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + \gamma_1 \sum_{i=1}^m |v|^{p_i-2} v \\ = \gamma_2 \lambda \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right] \mathfrak{f}(v) + (v^+)^{q_s^*-2} v^+. \quad (P_{\gamma_1, \gamma_2}) \end{aligned}$$

Sự tồn tại nghiệm của (P_{γ_1, γ_2}) làm cơ sở trong chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tiếp theo sau đây.

2. Phương trình không ô-tô-nôm nhiều pha Choquard chứa toán tử phân thứ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + \sum_{i=1}^m V(\zeta x) |v|^{p_i-2} v \\ = \lambda \left(\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v) \right) Q(\zeta x) \mathfrak{f}(v) + (v^+)^{q_s^*-2} v^+, v^+(x) = \max\{v(x), 0\}. \end{aligned}$$

3. Cuối cùng, chúng tôi xét phương trình Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha với kỳ dị trên $\mathbb{R}^N$ như sau:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T M_i \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p_i} dx \right) \\ \times (\mathcal{L}_{p_i}^s u(x) + V(x) |u|^{p_i-2} u) = \frac{f(x, u)}{|x|^\gamma}. \end{aligned}$$

Sự lựa chọn đề tài “**Sự tồn tại và cô đặc nghiệm của một số lớp phương trình elliptic chứa toán tử p-Laplace phân thứ**” của chúng tôi nhằm làm phong phú thêm các kết quả về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình đạo hàm riêng chứa toán tử p-Laplace phân thứ.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

Trong luận án này, mục đích của chúng tôi là chứng minh sự tồn tại nghiệm

yếu và vấn đề cô đặc của nghiệm cho một số phương trình đạo hàm riêng phân thứ nhiều pha.

Đối tượng nghiên cứu của chúng tôi là phương trình phân thứ nhiều pha, không gian Sobolev phân thứ.

3. Tổng quan về luận án

a) *Đối với vấn đề nghiên cứu thứ nhất, chúng tôi đã:*

- Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình của các phương trình (1.18) và (1.36). Kết quả chính của chương này là Định lý 1.2.5 và Định lý 1.3.3. Để chứng minh các kết quả này, trước hết chúng tôi chứng minh rằng phiếm hàm năng lượng của bài toán tương ứng thỏa mãn điều kiện hình học của Định lý vượt núi. Từ đó suy ra tồn tại dãy (PS) với mức vượt núi được ước lượng. Tiếp theo sử dụng tiêu chuẩn compact kiểu Lions, chúng tôi chỉ ra rằng giới hạn yếu của dãy (PS) là nghiệm yếu không tầm thường của bài toán đã cho.

b) *Đối với vấn đề thứ hai:*

- Chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và sự cô đặc của nghiệm cho phương trình (2.1). Các kết quả chính của chương này là Định lý 2.2.4 và Định lý 2.2.5. Định lý 2.2.4 cho thấy sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán không ô-tô-nôm (2.1) khi ζ đủ nhỏ và cực đại toàn cục của nghiệm cô đặc quanh cực tiểu toàn cục của thế vị V và cực đại toàn cục của thế vị Q . Định lý 2.2.5 nói rằng dãy nghiệm của bài toán (2.1) sau phép đổi biến tịnh tiến sẽ hội tụ tới nghiệm của bài toán giới hạn. Trong [6], [9], [22] và [80] không có các kết quả kiểu này. Do đó kết quả này của chúng tôi là mới. Phương trình (2.1) chứa số mũ tới hạn và khuyết tính compact của phép nhúng trong không gian Sobolev phân thứ, điều này gây khó khăn cho chúng ta trong việc nghiên cứu tồn tại nghiệm yếu cũng như giới hạn của dãy nghiệm yếu. So sánh với kết quả của Chen-Li-Yang, Ambrosio, Định lý 2.2.4 khi $m = 1$, phương trình (2.1) của chúng tôi chứa hai thế vị V và Q , trong khi bài toán mà Chen-Li-Yang [22], Ambrosio [6] xét chỉ chứa một thế vị V . Do đó kết quả của chúng tôi là mới trong trường hợp $m = 1$. Hiện cũng chưa có các kết quả cho $m \geq 2$ của phương trình (2.1). Các kết quả của Ambrosio [9], Zheng cùng các cộng sự [80] nghiên cứu sự nhiều nghiệm và sự cô đặc

nghiệm cho bài toán (6). Bài toán này không có số hạng tới hạn $|u|^{q_s^*-2}u$. Hơn nữa giả thiết của hàm thế vị V thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) , khác với giả thiết của V trong kết quả của chúng tôi, dẫn đến họ dùng phương pháp chặt cụt hàm phi tuyến để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm. Do đó kết quả của chúng tôi là độc lập với kết quả của họ.

c) *Đối với vấn đề thứ 3:*

- Đầu tiên, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu cho phương trình (3.1). Kết quả đầu tiên là Định lý 3.1.11. Với các điều kiện trên thế vị V , ta có phép nhúng compact từ không gian nghiệm W vào $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})$ là với mọi $q \geq \frac{N}{s}$. Từ đó ta chứng minh được tính compact của dãy (PS) và giới hạn yếu của nó là nghiệm của bài toán đã cho. Định lý 3.1.11 là mở rộng kết quả của Thinn [70]. Trong trường hợp hàm phi tuyến có độ tăng trên tới hạn, chúng tôi thu được Định lý 3.2.4 về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (3.20). Để chứng minh kết quả này, chúng tôi giới thiệu hàm cải biên, để đưa bài toán về trường hợp tới hạn. Tiếp theo, chúng tôi thiết lập ước lượng L^∞ cho nghiệm và chứng minh nghiệm của bài toán cải tiến với hàm cải biên đề xuất (3.25) là nghiệm của bài toán (3.20). Các kết quả của chương này đang được công bố trong [75]. Theo hiểu biết của chúng tôi, hiện chưa có bất kỳ kết quả nào cho sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình p-Laplacian phân thứ với độ tăng mũ trên tới hạn. Do đó, kết quả của chúng tôi góp phần bổ sung, làm phong phú thêm vấn đề tồn tại nghiệm cho phương trình phân thứ nhiều pha với độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser.

4. Phương pháp và công cụ nghiên cứu

Luận án sử dụng phương pháp biến phân để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các phương trình đặt ra. Đây là phương pháp nghiên cứu hiệu quả đã được các nhà toán học trong và ngoài nước sử dụng để nghiên cứu tồn tại nghiệm yếu của các phương trình đạo hàm riêng.

Hơn nữa, luận án sử dụng các phương pháp nghiên cứu lý thuyết như phân tích, tổng hợp, phân loại và hệ thống hóa lý thuyết. Cụ thể, chúng tôi phân tích, tổng hợp các kết quả của các tác giả đã công bố theo hướng nghiên cứu của đề tài, từ đó phân loại ra các chủ đề mà các tác giả trong và ngoài nước đang quan tâm, nghiên cứu. Tiếp theo chúng tôi hệ thống

hóa các chủ đề, kỹ thuật mà các tác giả đã sử dụng. Qua đó chúng tôi phát hiện ra các câu hỏi mở, các vấn đề cần cải tiến, các vấn đề mới làm vấn đề nghiên cứu trong luận án.

5. Cấu trúc luận án

Luận án bao gồm mở đầu, ba chương luận án, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: *Sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$* . Trong chương này, chúng tôi trình bày về tồn tại nghiệm yếu của phương trình của các phương trình (1.18) và (1.36). Kết quả chính của chương này là Định lý 1.2.5 và Định lý 1.3.3. Các kết quả của chương này được công bố trong [76] và [62, Định lý 5].

Chương 2: *Sự cô đặc của nghiệm cho phương trình Choquard phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với thế vị cạnh tranh*. Các kết quả chính của chương này là Định lý 2.2.4 và Định lý 2.2.5. Ngoài các kết quả chính, chúng tôi trình bày chi tiết các bổ đề dùng để chứng minh các kết quả chính. Các kết quả của chương này được công bố trong [62].

Chương 3: *Sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ*. Các kết quả chính của chương này là Định lý 3.1.11 và Định lý 3.2.4. Các kết quả này được công bố trong [75].

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.
- Hội nghị quốc tế về Hình học và Đại số được phối hợp tổ chức giữa Trường Đại học Sư phạm- ĐHTN và Viện nghiên cứu cao cấp về Toán.

Chương 1

Sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Mục này trình bày các cơ sở lý thuyết như không gian L^p , $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, toán tử p -Laplace phân thứ và tích chập Choquard. Đồng thời, giới thiệu các công cụ của giải tích như đạo hàm Fréchet, đa tập Nehari, điều kiện Palais–Smale, Định lý Vượt núi và bất đẳng thức Trudinger–Moser, phục vụ cho việc chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu trong các chương sau.

1.2 Sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình

$$\sum_{i=1}^m ((-\Delta)_{p_i}^s u + \eta_1 |u|^{p_i-2} u) = \eta_2 \left[\frac{1}{|x|^\mu} * H_1(u) \right] h_1(u) + \eta_3 h_2(u), \quad (1.18)$$

Trong phương trình (1.18), $H_j(t) = \int_0^t h_j(t)$, $j = 1, 2$, $2 \leq p_1 = p < \dots < p_m < +\infty$, $0 < s < 1$, $N = ps$, $0 < \mu < N$, $\eta_1, \eta_2 > 0$ và $\eta_3 > 0$ là hằng số. Hai hàm phi tuyến tính h_1 và h_2 thuộc $\mathfrak{D} := \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ là hàm số liên tục}\}$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

(h₁) Hàm phi tuyến tính $\mathfrak{h}$ là liên tục và $\mathfrak{h}(t) = 0$ trên $(-\infty, 0]$. Với mỗi $q_1 \geq p_m$, $q_2 \geq 1$, và các số thực dương $a_1 > 0, a_2 > 0$ sao cho

$$\mathfrak{h}(t) \leq a_1|t|^{q_1-1} + a_2\Phi_{N,s}(\alpha_0|t|^{N/(N-s)})|t|^{q_2-1}$$

trong đó $\Phi_{N,s_1}(y) = e^y - \sum_{j=0}^{j_p-2} \frac{y^j}{j!}$, $j_p = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$ và

$$\alpha_* < \alpha_{s,N}^*, \text{ trong đó } \alpha_{s,N}^* = N \left(\frac{2(Nw_N)^2\Gamma(p+1)}{N!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+k-1)!}{k!} \frac{1}{(N+2k)^p} \right)^{\frac{s}{N-s}}.$$

(h₂) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathfrak{h}(t)}{t^{p_m-1}} = 0$.

(h₃) Tồn tại $\theta > p_m$ sao cho $2\mathfrak{h}(t)t \geq \mathfrak{h}(t)t \geq \theta H(t) > 0$ với mọi $t > 0$, trong đó $H(t) = \int_0^t \mathfrak{h}(\tau) d\tau$.

(h₄) Tồn tại $\gamma_1 > 0$ đủ lớn sao cho $H(t) \geq \gamma_1|t|^\theta$ trên $[0, \infty)$, trong đó $\theta > p_m$ là một hằng số được nhắc đến trong điều kiện (h₃).

Nghiệm yếu của phương trình (1.18) được định nghĩa như sau

Định nghĩa 1.2.1. Một hàm số $u \in W$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình (1.18) nếu với mọi hàm thử $\varphi \in W$, ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p_i-2} (u(x) - u(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+sp_i}} dx dy \\ & + \sum_{i=1}^m \eta_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i-2} u \varphi dx \\ & = \eta_2^2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H_1(u(y))}{|x - y|^\mu} h_1(u(x)) \varphi(x) dx dy + \eta_3 \int_{\mathbb{R}^N} h_2(u(x)) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Hàm năng lượng $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} : W \rightarrow \mathbb{R}$ của phương trình (1.18) có dạng

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u) \\ & = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \|u\|_{\eta_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \frac{\eta_2^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H_1(u(y)) H_1(u(x))}{|x - y|^\mu} dx dy - \eta_3 \int_{\mathbb{R}^N} H_2(u) dx \\ & = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \|u\|_{\eta_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \frac{\eta_2^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{G}(u)(x) H_1(u(x)) dx - \eta_3 \int_{\mathbb{R}^N} H_2(u) dx, \end{aligned}$$

với $\mathcal{G}(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H_1(u(y))}{|x - y|^\mu} dy$. Khi đó, theo Định nghĩa 1.2.1, ta thấy rằng nghiệm yếu của phương trình (1.18) là một điểm tới hạn của hàm năng lượng $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ trong W .

Kết quả đầu tiên của chúng tôi được phát biểu như sau:

Định lý 1.2.5. *Giả sử $(\mathfrak{h}_1) - (\mathfrak{h}_4)$ được thỏa mãn, khi đó phương trình (1.18) có nghiệm yếu không tầm thường, không âm trong W .*

1.3 Sự tồn tại nghiệm yếu cho phương trình Choquard nhiều pha với số mũ tối hạn

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình

$$\sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + \gamma_1 \sum_{i=1}^m |v|^{p_i-2} v = \gamma_2^2 \lambda \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right] \mathfrak{f}(v) + (v^+)^{q_s^*-2} v^+ \quad (1.36)$$

trong đó $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ là hằng số. Ta giả sử $\mathfrak{f}$ là hàm phi tuyến tính thỏa mãn các điều kiện sau:

- (f_1) $\mathfrak{f} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ và $\mathfrak{f}(t) = 0$ với mọi $t < 0$;
- (f_2) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{f}(t)}{t^{q-1}} = 0$ và tồn tại $a_0 > 0$ sao cho $|\mathfrak{f}(t)| \leq a(1 + |t|^{\tau-1})$ với mọi $t \geq 0$, trong đó $q < \tau < \min\left\{\frac{q(N-s)}{N-qs}, \frac{q(N-\mu)}{N-qs}\right\}$;
- (f_3) tồn tại $q_s^* > \theta > q$ sao cho $2\mathfrak{f}(t)t \geq \theta F(t)$ với mọi $t > 0$;
- (f_4) hàm $\frac{\mathfrak{f}(t)}{t^{\frac{q}{2}-1}}$ là tăng khi $t > 0$. Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (1.36), ta xét phiếm hàm năng lượng

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(v) = & \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i}}{|x - y|^{N+p_i s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} \gamma_1 |v(x)|^{p_i} dx \right) \\ & - \frac{\lambda \gamma_2^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right) F(v) dx + \frac{1}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Với hàm $\phi \in W$ tùy ý, ta có

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v), \phi \rangle = & \sum_{i=1}^m \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i-2} (v(x) - v(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+sp_i}} dx dy \right. \\ & + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{p_i-2} v(x) \phi(x) dx \Big) \\ & - \lambda \gamma_2^2 \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{F(v(y)) f(v(x)) \phi(x)}{|x - y|^\mu} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*-2} v^+ \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Khi đó nghiệm yếu của (1.36) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.3.1. Hàm $v \in W$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình (1.36) nếu với mọi hàm thử $\phi \in W$, ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i-2} (v(x) - v(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+sp_i}} dx dy \right. \\ & \left. + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{p_i-2} v(x) \phi(x) dx \right) \\ & - \lambda \gamma_2^2 \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{F(v(y)) f(v(x)) \phi(x)}{|x - y|^\mu} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*-2} v^+ \phi(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Từ Định nghĩa 1.3.1, ta thấy rằng hàm $v \in W$ là nghiệm yếu của (1.36) nếu $\langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v), \phi \rangle = 0$ với mọi $\phi \in W$. Tức là $\mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v) = 0$ trong W^* . Ta ký hiệu $\mathcal{M}_{\gamma_1, \gamma_2}$ là đa tập Nehari liên kết với phiếm hàm năng lượng $\mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}$

$$\mathcal{M}_{\gamma_1, \gamma_2} = \{v \in W \setminus \{0\} : \langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v), v \rangle = 0\}.$$

Định nghĩa 1.3.2. Hàm u được gọi là nghiệm với năng lượng cực tiểu của (1.36) nếu

$$\mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(u) = \inf \{ \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(v) \mid v \in W \setminus \{0\}, \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v) = 0 \}.$$

Định lý 1.3.3. *Giả sử các điều kiện $(f_1) - (f_3)$ được thỏa mãn. Khi đó tồn tại $\lambda_* > 0$ đủ lớn sao cho phương trình (1.36) có một nghiệm yếu không âm, không tầm thường với $\lambda \geq \lambda_*$.*

Kết luận Chương 1

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình phân thứ nhiều pha mà hàm phi tuyến có dạng Choquard. Bài toán được xét khi hàm phi tuyến có độ tăng tối hạn và độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser. Các kết quả chính của chương này là Định lý 1.2.5 và Định lý 1.3.3. Để chứng minh các kết quả này, trước hết chúng tôi chứng minh rằng phiếm hàm năng lượng của bài toán tương ứng thỏa mãn điều kiện hình học của Định lý vượt núi. Từ đó suy ra tồn tại dãy (PS) với mức vượt núi được ước lượng. Tiếp theo sử dụng tiêu chuẩn compact kiểu Lions, chúng tôi chỉ ra rằng giới hạn yếu của dãy (PS) là nghiệm yếu không tầm thường của bài toán đã cho. Các kết quả của chương này được công bố trong [76] và [62, Định lý 5].

Chương 2

Sự cô đặc của nghiệm cho phương trình Choquard phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với thế vị cạnh tranh

2.1 Sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu

Xuất phát từ các bài toán nhiều pha, trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình chứa toán tử phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với hàm phi tuyến Choquard và số mũ tối hạn

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + \sum_{i=1}^m V(\zeta x) |v|^{p_i-2} v \\ & = \lambda \left(\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v) \right) Q(\zeta x) f(v) + (v^+)^{q_s^*-2} v^+, v^+(x) = \max\{v(x), 0\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

trong đó $\lambda > 0$ đủ lớn, $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, $m \geq 2$, $2 \leq p = p_1 < \dots < p_m = q < \frac{N}{s}$, $s \in (0, 1)$, $\zeta > 0$ là tham số nhỏ, $0 \leq \mu < qs$.

Hàm thế vị $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ là bị chặn và thỏa mãn điều kiện Rabinowitz:
(V) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ sao cho

$$+\infty > V_\infty = \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = V_{\min} > 0.$$

Với hàm thế vị Q , ta giả sử Q thỏa mãn các điều kiện sau:

(Q) $Q \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ và $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} Q(x) = Q_\infty$ và

$$Q_{\min} := \inf_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x) > 0.$$

(VQ) $V(0) = V_{\min}$, $Q(0) = Q_{\max} := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x) > Q_\infty$. Khi đó $\mathcal{V} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, với

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = V_{\min}\}, \mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^N : Q(x) = Q_{\max}\}.$$

Hàm phi tuyến tính $\mathfrak{f}$ thỏa mãn các điều kiện $(f_1) - (f_4)$.

Chúng tôi giới thiệu không gian nghiệm cho bài toán (2.1). Ký hiệu $W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$ ($i = 1, \dots, m$) là bao đóng của $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, với chuẩn

$$\|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)} = \left([v]_{s,p_i}^{p_i} + \|v\|_{V,p_i,\zeta}^{p_i} \right)^{1/p_i}, \quad \|v\|_{V,p_i,\zeta}^{p_i} = \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v(x)|^{p_i} dx.$$

Đặt $W_\zeta = \cap_{i=1}^m W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$. Khi đó W_ζ không gian Banach lồi đều (tương tự [64], Bổ đề 10) với chuẩn $\|v\|_{W_\zeta} = \sum_{i=1}^m \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}$, và khi đó W_ζ là không gian phản xạ.

Để nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình (2.1), ta xét phiếm hàm năng lượng $J_\zeta : W_\zeta \rightarrow \mathbb{R}$ có dạng

$$J_\zeta(v) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \lambda \mathcal{K}_\zeta(v) - \frac{1}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx, \quad (2.3)$$

trong đó $\mathcal{K}_\zeta(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v) \right] Q(\zeta x) \mathfrak{f}(v) dx$.

Nghiệm yếu của phương trình (2.1) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.1.1. Hàm $v \in W_\zeta$ được gọi là nghiệm yếu của (2.1) nếu với mọi $\phi \in W_\zeta$, ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i-2} (v(x) - v(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+p_i s}} dx dy \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v|^{p_i-2} v \phi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y) F(v(y))}{|x - y|^\mu} Q(\zeta x) \mathfrak{f}(v(x)) \phi(x) dx dy \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*-2} v^+ \phi dx = 0. \end{aligned}$$

Do đó nghiệm yếu v của (2.1) là điểm tới hạn của phiếm hàm năng lượng J_ζ trong W_ζ .

Từ cơ sở phương pháp biến phân, ta chỉ ra sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu cho bài toán (2.1) với mọi ζ đủ nhỏ. Kết quả chính của chương này được phát biểu như sau:

Định lý 2.1.10. *Giả sử $(V), (Q), (VQ)$ và $(f_1) - (f_3)$ được thỏa mãn. Khi đó tồn tại $\zeta_0 > 0$ sao cho bài toán (2.1) có nghiệm với năng lượng cực tiểu với mọi $\zeta \in (0, \zeta_0)$.*

2.2 Sự cô đặc của nghiệm

Tiếp nối kết quả về sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu u_ζ , $\zeta \in (0, \zeta_0)$, trong mục này ta nghiên cứu hiện tượng cô đặc nghiệm khi $\zeta \rightarrow 0^+$ sau một phép tịnh tiến phù hợp. Hai kết quả chính được phát biểu như sau:

Định lý 2.2.4. *Giả sử $(V), (Q), (VQ)$, và $(f_1) - (f_5)$ được thỏa mãn, Khi đó tồn tại $\zeta_0 > 0$ sao cho phương trình (2.1) có một nghiệm dương không tầm thường với mọi λ đủ lớn và $\zeta \in (0, \zeta_0)$. Ta ký hiệu nghiệm trên là v_ζ và $x_\zeta \in \mathbb{R}^N$ là cực đại toàn cục của nó, khi đó $\lim_{\zeta \rightarrow 0} V(x_\zeta) = V_{\min}$, $\lim_{\zeta \rightarrow 0} Q(x_\zeta) = Q_{\max}$.*

Định lý 2.2.5. *Giả sử v_ζ là nghiệm thỏa mãn Định lý 2.2.4. Khi đó tồn tại một dãy $\{\tilde{y}_\zeta\}$ sao cho $w_\zeta(x) := v_\zeta(x + \tilde{y}_\zeta)$ hội tụ mạnh trong W đến một nghiệm với năng lượng cực tiểu của*

$$\sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + V_{\min} \sum_{i=1}^m |v|^{p_i-2} v = \lambda Q_{\max}^2 \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right] f(v) + |v|^{q_s^*-2} v$$

trong $\mathbb{R}^N$ khi $\zeta \rightarrow 0^+$.

Kết luận Chương 2

Trong chương này, sử dụng phương pháp biến phân, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và sự cô đặc của nghiệm cho phương trình Choquard phân thứ nhiều pha (2.1). Các kết quả chính của chương này là Định lý 2.2.4 và Định lý 2.2.5. Các kết quả của chương này được công bố trong [62].

Định lý 2.2.4 cho thấy sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán không ô-tô-nôm (2.1) khi ζ đủ nhỏ và cực đại toàn cục của nghiệm cô đặc quanh cực tiểu toàn cục của thế vị V và cực đại toàn cục của thế vị Q . Định lý 2.2.5 nói rằng dãy nghiệm của bài toán (2.1) sau phép đổi biến tịnh tiến sẽ hội tụ tới nghiệm của bài toán giới hạn. Kết quả này của chúng tôi là mới. Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán không ô-tô-nôm, trước hết chúng tôi chỉ ra phiếm hàm năng lượng thỏa mãn điều kiện hình học của Định lý Vượt núi. Do đó sẽ tồn tại dãy (PS) với mức vượt núi C_ζ được xác định trong (2.7). Tiếp theo, ta chứng minh tính compact của dãy (PS) khi mức vượt núi bị chặn trên bởi mức vượt núi của bài toán giới hạn (1.18) với λ đủ lớn. Do đó nghiệm yếu của bài toán (2.1) là giới hạn của dãy (PS) . Bài toán chứa thế vị hút V và thế vị đẩy Q , điều này dẫn đến khó khăn khi chúng tôi chứng minh tính compact của dãy (PS) . Hơn nữa, khó khăn cũng gặp phải khi chúng tôi chứng minh giới hạn của dãy nghiệm của (2.1) về nghiệm của bài toán giới hạn. So sánh với kết quả của Chen-Li-Yang, Ambrosio, Định lý 2.2.4 khi $m = 1$, phương trình (2.1) của chúng tôi chứa hai thế vị V và Q , trong khi bài toán mà Chen-Li-Yang [22], Ambrosio [6] xét chỉ chứa một thế vị V . Do đó kết quả của chúng tôi là mới trong trường hợp $m = 1$. Hiện cũng chưa có các kết quả cho $m \geq 2$ của phương trình (2.1). Các kết quả của Ambrosio [9], Zheng cùng các cộng sự [80] nghiên cứu sự nhiều nghiệm và sự cô đặc nghiệm cho bài toán (6). Bài toán này không có số hạng tới hạn $|u|^{q_s^*-2}u$. Hơn nữa giả thiết của hàm thế vị V thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) , khác với giả thiết của V trong kết quả của chúng tôi, dẫn đến họ dùng phương pháp chặt cụt hàm phi tuyến để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm. Do đó kết quả của chúng tôi là độc lập với kết quả của họ.

Chương 3

Sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ

3.1 Phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ tối hạn

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha với kỳ dị

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T M_i \Big(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p_i} dx \Big) \\ \times (\mathcal{L}_{p_i}^s u(x) + V(x) |u|^{p_i-2} u) = \frac{f(x, u)}{|x|^\gamma}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

trong đó $T \geq 1$, $N = p_1 s$, $\gamma \in [0, N)$, $s \in (0, 1)$, $2 \leq p = p_1 < \dots < p_T < +\infty$. V là hàm thế vị thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) . Hàm Kirchhoff $M_i(t)$ ($i = 1, \dots, T$) thuộc lớp $\mathfrak{M}$ các hàm M thỏa mãn:

$$(c_1) \quad M(t) \geq m_0 > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

$$(c_2) \quad M(t) \leq b_0 + b_1 t^{\alpha_1} + \dots + b_m t^{\alpha_m}, \quad t \geq 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \alpha_m > \dots > \alpha_1 \geq 1. \text{ Khi đó } \mathcal{M}(t) = \int_0^t M(\tau) d\tau \leq b_0 t + b_1 \frac{t^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} + \dots + b_m \frac{t^{\alpha_m+1}}{\alpha_m+1}.$$

(m_3) tồn tại $\theta > 1$ sao cho $\frac{M(t)}{t^{\theta-1}}$ là tăng trong $(0, \infty)$.

Nhân kỳ dị $K_i, i = 1, \dots, T$ thỏa mãn các điều kiện:

(C_1^i) $\eta K_i \in L^1(\mathbb{R}^N)$, trong đó $\eta(x) = \min\{|x|^{p_i}, 1\}$.

(C_2^i) $\exists k_i > 0 : K_i(x) \geq k_i |x|^{-(N+p_i s)}, \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, i = 1, \dots, T$.

Ta giả sử rằng hàm phi tuyến liên tục $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ có độ tăng mũ tới hạn thỏa mãn điều kiện:

(f_i) Tồn tại các hằng số $\alpha_0 \in (0, \beta_*)$, $0 < \beta_* < \alpha_*$, $b_1, b_2 > 0$ sao cho $|f(x, t)| \leq b_1 |t|^{p-1} + b_2 \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)})$ với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, trong đó $\Phi_{N,s}(y) = e^y - \sum_{j=0}^{j_p-2} \frac{y^j}{j!}$, $j_p = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$.

(f_{ii}) Tồn tại $\mu > \max\{p_T \theta, p_T(\alpha_m + 1)\}$ sao cho $f(x, t) - \mu F(x, t) \geq -\rho |t|^{N/s}$ với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$ và thỏa mãn $\frac{\rho A_{N/s, \gamma}^{-N/s}}{\mu} < \frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu}$, trong đó $\theta > 1$ là hằng số được cho trong điều kiện (m_3) .

(f_{iii}) Tồn tại một hằng số $B > 0$ thỏa mãn $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x, t)}{|t|^{N/s}} < B$ đều theo $x \in \mathbb{R}^N$ sao cho $\frac{m_0 s}{N} - B A_{N/s, \gamma}^{-N/s} > 0$.

(f_{iv}) Tồn tại $\gamma_1 > 0$ sao cho $F(x, t) \geq \gamma_1 |t|^\mu$ với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, trong đó $\mu > \max\{p_T \theta, p_T(\alpha_m + 1)\}$ là hằng số được cho trong điều kiện (f_{ii}) .

Hàm thế vị V là hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện sau:

(V_1) $V(x) \geq V_0 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$;

(V_2) Với mỗi $c > 0$, ta có $\text{meas}(\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq c\}) < \infty$, trong đó meas là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^N$. Ta giả sử V thỏa mãn thêm một số điều kiện ngoài (V_1) và (V_2) như sau:

(V_3) $\exists h > 0 : \lim_{|y| \rightarrow \infty} \text{meas}(\{x \in B_h(y) : V(x) \leq c\}) = 0$ với mọi $c > 0$.

Trước khi trình bày các kết quả chính, chúng tôi thiết lập không gian nghiệm cho bài toán. Ký hiệu $\mathcal{W}_{K_i}^{s, p_i}$ ($i = 1, \dots, T$) là không gian Sobolev phân thứ cho bởi: $\mathcal{W}_{K_i}^{s, p_i}(\mathbb{R}^N) := \{v \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) : [v]_{s, K_i, p_i} < \infty\}$, trong đó $[v]_{s, K_i, p_i} = \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |v(x) - v(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy \right)^{1/p_i}$. Chú ý rằng $\mathcal{W}_{K_i}^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)$ là không gian Banach lồi đều (như trong [64]) với chuẩn $\|v\|_{\mathcal{W}_{K_i}^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)} =$

$\left(\|v\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + [v]_{s,K_i,p_i}^{p_i}\right)^{1/p_i}$. Gọi $\mathcal{W}_i$ ($i = 1, \dots, T$) là bao đóng của $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ với chuẩn $\|v\|_{\mathcal{W}_i} = \left([v]_{s,p_i}^{p_i} + \|v\|_{p_i,V}^{p_i}\right)^{1/p_i}$, $\|v\|_{p_i,V}^{p_i} = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v(x)|^{p_i} dx$.

Khi đó, $\mathcal{W}_i$ là không gian Banach lồi đều (theo [64], Bổ đề 10), và $\mathcal{W}$ là không gian phản xạ. Một ví dụ của nhân kỳ dị K_i ($i = 1, \dots, T$) là $K_i(x) = |x|^{-(N+p_i s)}$. Khi $K_i(x) = |x|^{-(N+p_i s)}$, ta sử dụng ký hiệu $W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$ thay cho $\mathcal{W}_{K_i}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$ và $[v]_{s,p_i}$ thay cho $[v]_{s,K_i,p_i}$. Đặt $\mathcal{W} = \cap_{i=1}^T \mathcal{W}_i$.

Nghiệm yếu của phương trình (3.1) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3.1.1. Hàm $u \in \mathcal{W}$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình (3.1) nếu với mọi hàm thử $\varphi \in \mathcal{W}$, ta có

$$\sum_{i=1}^T M_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \mathcal{A}_i(u, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u) \varphi(x)}{|x|^\gamma} dx,$$

trong đó,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i(u, \varphi) &= \iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i-2} (u(x) - u(y)) (\varphi(x) - \varphi(y)) K_i(x - y) dx dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p_i-2} u \varphi dx. \end{aligned}$$

Để chứng minh các kết quả chính trong phần này, ta xét hàm năng lượng

$$J(u) = \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u)}{|x|^\gamma} dx.$$

Theo Định nghĩa 3.1.1, ta thấy rằng nếu u là điểm tới hạn của hàm năng lượng J trong $\mathcal{W}$, khi và chỉ khi u là nghiệm yếu của phương trình (3.1).

Kết quả chính được trình bày trong định lý sau:

Định lý 3.1.11. *Giả sử V thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) , f thỏa mãn điều kiện (f_i) - (f_{iv}) , và hàm Kirchhoff M_i ($i = 1, \dots, T$) thỏa mãn (m_3) , (c_1) và (c_2) . Khi đó, với mọi $\gamma_1 \geq \max\{a, \gamma_0^*\}$, bài toán (3.1) có một nghiệm không tầm thường, trong đó*

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0 (\mathcal{A}_{\mu,\gamma} + 1)^{p_i} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\alpha_j + 1} (\mathcal{A}_{\mu,\gamma} + 1)^{p_i(\alpha_j+1)} \right), \\ \gamma_0^* &= \frac{pa}{\mu} \left[\left(\frac{\alpha_*}{4p'\alpha_0} \left(1 - \frac{\gamma}{N} \right) \right)^{\frac{N-s}{s}} \frac{\min\{k_1, V_0\}}{2a \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right)} \left(\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s} \right) \right]^{\frac{p-\mu}{p}} \end{aligned}$$

và $p' = \frac{p}{p-1}$ là số mũ liên hợp của p .

3.2 Phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng trên tối hạn

Ta nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của (3.1) khi $\gamma = 0$ và $f(x, t) = h(t)e^{\beta_0|t|^\tau}$ ($t \in \mathbb{R}$), trong đó $\beta_0 > 0$ và $\tau \geq \frac{N}{N-s}$. Cụ thể, trong mục này ta chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T M_i \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p_i} dx \right) \\ \times (\mathcal{L}_{p_i}^s u(x) + V(x) |u|^{p_i-2} u) = h(t)e^{\beta_0|t|^\tau}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ta giả sử h là hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện sau:

- (h_1) $h(t) \equiv 0$ với mọi $t \in (-\infty, 0]$ và $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(t)}{t^{p_T-1}} = 0$;
- (h_2) Tồn tại $\mu > \max\{\theta p_T, (\alpha_m + 1)p_T\}$ sao cho $0 < \mu H(t) \leq h(t)t$ với mọi $t \in (0, \infty)$, trong đó $H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$ và θ được cho trong điều kiện (m_3).
- (h_3) Tồn tại $\delta \in (0, \frac{N}{N-s})$ và $\gamma > 0, C > 0$ sao cho $0 \leq h(t) \leq Ce^{\gamma|t|^\delta}$ với mọi $t \in [0, \infty)$.
- (h_4) Tồn tại một hằng số $\gamma_1 > 0$ đủ lớn sao cho $H(t) \geq \gamma_1|t|^\mu$ với mọi $t \geq 0$.

Thúc đẩy bởi kết quả trong [5, 67], với mỗi $R \geq 1$, ta xét hàm sau

$$f_R(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ h(t)e^{\beta_0 t^\tau}, & 0 \leq t \leq R \\ h(t)e^{\beta_0 R^{\tau-\delta} t^\delta}, & t \geq R \end{cases} \quad (3.22)$$

Ta suy ra f_R thỏa mãn các điều kiện (f_i), (f_{ii}) với $\rho = 0$, (f_{iii}) và (f_{iv}). Khi $\gamma = 0$, a được thay thế bởi a^* như sau

$$a^* = \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0(\mathcal{A}_{\mu,0} + 1)^{p_i} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\alpha_j + 1} (\mathcal{A}_{\mu,0} + 1)^{p_i(\alpha_j+1)} \right).$$

Trong hằng số γ_0^* , ta đặt $\rho = 0, \gamma = 0$, khi đó γ_0^* được thay thế bởi

$$\gamma_0^{**} = \frac{pa^*}{\mu} \left[\left(\frac{\alpha_*}{4p'\alpha_0} \right)^{\frac{N-s}{s}} \frac{\min\{k_1, V_0\}}{2a^* \left(1 - \frac{pa^*}{\mu}\right)} \left(\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} \right) \right]^{\frac{p-\mu}{p}}.$$

Định nghĩa 3.2.1. Hàm $u \in \mathcal{W}$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình (3.20) nếu với mọi hàm thử $\varphi \in \mathcal{W}$, ta có

$$\sum_{i=1}^T M_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \mathcal{A}_i(u, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) \varphi(x) dx,$$

trong đó, $f(x, u) = h(u(x))e^{\beta_0|u(x)|^\tau}$.

Do hàm phi tuyến trong phương trình (3.20) có độ tăng mũ trên giới hạn nên phép nhúng không còn compact và không có Bất đẳng thức kiểu Trudinger-Moser cho trường hợp trên tới hạn. Từ đó việc áp dụng phương pháp biến phân để chứng minh nghiệm yếu của bài toán trở nên khó khăn. Để khắc phục điều đó, chúng tôi giới thiệu hàm cải biên nhằm đưa bài toán về trường hợp tới hạn. Khi đó, ta có thể xét bài toán cải biên như sau

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T M_i \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p_i} dx \right) \\ \times (\mathcal{L}_{p_i}^s u(x) + V(x) |u|^{p_i-2} u) = f_R(u). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Vì $h(t) = 0$ với mọi $t \in (-\infty, 0]$, khi đó tất cả các nghiệm (3.20) và (3.25) là không âm. Nghiệm yếu của (3.25) được hiểu như trong Định nghĩa 3.2.1 khi thay $f(x, u)$ bởi $f_R(u)$. Khi đó ta có:

Định lý 3.2.2. *Giả sử V thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) , h thỏa mãn điều kiện $(h_1) - (h_4)$ và hàm Kirchhoff M_i ($i = 1, \dots, T$) thỏa mãn (m_3) , (c_1) và (c_2) . Khi đó tồn tại $\gamma^* = \max\{a^*, \gamma_0^{**}\} > 0$ sao cho bài toán (3.25) có một nghiệm không âm không tầm thường trong $\mathcal{W}$ với mọi $\gamma_1 \geq \gamma^*$.*

Có định $\varepsilon_0 > 0$ và ε_0 gần 0. Ký hiệu

$$\gamma_0^{***} = \frac{pa^*}{\mu} \left(\frac{\left(\frac{\alpha_*}{4(1 + \varepsilon_0)\alpha_0} \right)^{\frac{N-s}{s}} \min\{k_1, V_0\}}{a^* \left(1 - \frac{pa^*}{\mu}\right)} \right)^{\frac{p-\mu}{p}}.$$

Tiếp theo, ta chứng minh nghiệm u thu được từ Định lý 3.2.2 chính là nghiệm của phương trình (3.20):

Định lý 3.2.4. *Giả sử V thỏa mãn các điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) , h thỏa mãn các điều kiện $(h_1) - (h_4)$ và hàm Kirchhoff M_i ($i = 1, \dots, T$) thỏa mãn (m_3) , (c_1) và (c_2) . Với mọi $\tau \geq \frac{N}{N-s}$, tồn tại $\beta_{**}(\tau) = \frac{1}{R^{\tau-\delta}} > 0$ và $\gamma^{***} = \max\{a^*, \gamma_0^{**}, \gamma_0^{***}\} > 0$ sao cho bài toán (3.20) có nghiệm không tầm thường $u \in \mathcal{W}$ với mọi $\gamma_1 \geq \gamma^{***}$ và $\beta_0 \in (0, \beta_{**}(\tau))$.*

Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán kiểu Kirchhoff phân thứ nhiều pha mà hàm phi tuyến có độ tăng mũ tới hạn và trên tới hạn. Kết quả đầu tiên là Định lý 3.1.11. Phương trình của chúng tôi được nghiên cứu lần đầu tiên, do đó các kết quả là mới. Cụ thể kết quả này là mở rộng kết quả trong [70] cho bài toán kiểu Kirchhoff phân thứ chứa nhiều pha. Khó khăn gặp phải là có sự xuất hiện của hàm Kirchhoff M_i ($i = 1, \dots, T$), chúng tôi cần điều chỉnh tính toán trong [70] cho phù hợp với phương trình mới. Dựa vào giả thiết của thể vị V , ta có phép nhúng compact từ không gian nghiệm $\mathcal{W}$ vào $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})$ với mọi $q \geq \frac{N}{s}$. Từ đó ta chứng minh được tính compact của dãy (PS) và giới hạn yếu của nó là nghiệm của bài toán đã cho. Trong trường hợp hàm phi tuyến có độ tăng trên tới hạn, chúng tôi thu được Định lý 3.2.4. Vì chưa có bất đẳng thức Trudinger trong không gian Sobolev phân thứ cho trường hợp trên tới hạn. Do đó chúng tôi giới thiệu hàm cải biên mới, để đưa bài toán về trường hợp tới hạn. Tiếp theo, chúng tôi thiết lập ước lượng L^∞ cho nghiệm và chứng minh nghiệm của bài toán cải tiến với hàm cải biên đề xuất (3.25) là nghiệm của bài toán (3.20). Các kết quả của chương này được công bố trong công trình [75]. Kết quả của chúng tôi góp phần bổ sung, làm phong phú thêm vấn đề tồn tại nghiệm cho phương trình phân thứ nhiều pha với độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser.

Kết luận chung

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và cô đặc nghiệm của một số lớp phương trình elliptic chứa toán tử p -Laplace phân thứ. Cụ thể chúng xét bài toán phân thứ nhiều pha.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Kết quả chính của Chương 1 là các Định lý 1.2.5 và Định lý 1.3.3 về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình phân thứ nhiều pha chứa đại lượng phi tuyến Choquard. Hàm phi tuyến có độ tăng dưới tới hạn và độ tăng tới hạn mũ kiểu Trudinger-Moser.
2. Kết quả chính của Chương 2 là các Định lý 2.2.4 và Định lý 2.2.5 về sự tồn tại nghiệm, cô đặc nghiệm và giới hạn của dãy nghiệm cho bài toán không ô-tô-nôm (2.1).
3. Kết quả chính của Chương 3 là hai Định lý 3.1.11 và 3.2.4. Định lý 3.1.11 nói về sự tồn tại nghiệm của phương trình kiểu Kirchhoff phân thứ nhiều pha với kỳ dị (3.1) khi hàm phi tuyến có độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser. Kết quả tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (3.20) khi hàm phi tuyến có độ tăng trên tới hạn mũ.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo:

1. Chứng minh sự tồn tại nghiệm của (2.1) khi λ nhỏ.
2. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình phân thứ nhiều pha.

Danh mục các Công trình của tác giả liên quan đến luận án

1. [62] Pham T. Q., Nguyen T. V. (2026), Concentration phenomena for anisotropic fractional Choquard equations and potential competition, Bulletin of Mathematical Sciences, Vol. 16, No. 1, Article number: 2550018 (48 pages).
2. [75] Trang P. Q., Ahmad B., Thin N. V. (2026), On fractional anisotropic Kirchhoff-Schrödinger type equations in $\mathbb{R}^N$, Discrete and Continuous Dynamical Systems - S. doi: 10.3934/dcdss.2026112.
3. [76] Trang P. Q. (2025), The existence of weak solution to fractional anisotropic equation in $\mathbb{R}^N$ with exponential growth, *TNU Journal of Science and Technology*, 230(06), pp. 487 - 494.

Tài liệu tham khảo

- [1] ADACHI S., TANAKA K. (2000), Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their best exponents, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128, pp. 2051-2057.
- [2] ADIMURTHI, YANG Y. (2010) Interpolation of Hardy inequality and Trudinger-Moser inequality in $\mathbb{R}^N$ and its applications, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 13, pp. 2394-2426.
- [3] AMBROSIO V., T. ISERNIA T. (2018), Multiplicity and concentration results for some nonlinear Schrödinger equations with the fractional p -Laplace, *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*, 38(11), pp. 5835-5881.
- [4] ALVES C. O., AMBROSIO V., ISERNIA T. (2019), Existence, multiplicity and concentration for a class of fractional (p, q) -Laplacian problems in $\mathbb{R}^N$, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 18(4), pp. 2009-2045.
- [5] ALVES C. O., SHEN L. (2024), On existence of solutions for some classes of elliptic problems with supercritical exponential growth, *Math. Zeit*, 306, Article number: 29.
- [6] AMBROSIO V. (2019), On the multiplicity and concentration of positive solutions for a p -fractional Choquard equation in $\mathbb{R}^N$, *Computers & Mathematics with Applications*, 78(8), pp. 2593-2617.
- [7] Ambrosio V. (2022), A Kirchhoff type equation in $\mathbb{R}^N$ involving the fractional (p, q) -Laplacian, *J. Geom. Anal*, 32, no. 4, Paper no. 135, 46 pp.

- [8] Ambrosio V. (2022), Fractional (p, q) -Schrödinger equations with critical and supercritical growth, *Appl. Math. Optim*, 86, no. 3, Paper No. 31.
- [9] AMBROSIO V. (2024), Multiple concentrating solutions for a fractional (p, q) -Choquard equation, *Adv. Nonlinear Stud*, 24(2), pp. 510–541.
- [10] AMBROSIO V. (2024), Nonlinear scalar field (p_1, p_2) -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$: existence and multiplicity, *Calc. Var*, 63, Paper no. 210.
- [11] AMBROSIO V. (2024), Least energy solutions for a class of (p_1, p_2) -Kirchhoff-type problems in $\mathbb{R}^N$ with general nonlinearities, *J. London Math. Soc*, 2, Paper no. 110:e13004.
- [12] AMBROSIO V., ISERNIA T. (2021), Multiplicity of positive solutions for a fractional p & q -Laplacian problem in $\mathbb{R}^N$, *J. Math. Anal. Appl*, 501(1), Paper no. 124487.
- [13] AMBROSIO V. (2022), A strong maximum principle for the fractional (p, q) -Laplacian operator, *Applied Mathematics Letters*, 126, Paper no. 107813.
- [14] ALVES C. O., YANG M. (2016), Investigating the multiplicity and concentration behaviour of solutions for a quasi-linear Choquard equation via the penalization method, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 146A, pp. 23-58.
- [15] ANTONTSEV S. N., SHMAREV S. I. (2006), Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions: Existence, uniqueness and localization properties of solutions, *Nonlinear Anal*, 65, pp. 722-755.
- [16] AMBROSIO V., RĂDULESCU V. D. (2020), Fractional double-phase patterns: concentration and multiplicity of solutions, *J. Math. Pures Appl*, 142, pp. 101-145.
- [17] AMBROSIO V., REPOVS D. (2021), Multiplicity and concentration results for a (p, q) -Laplacian problem in $\mathbb{R}^N$, *Z. Angew. Math. Phys*, 72, Article number: 33.

- [18] BONHEURE D., D’AVENIA P., POMPONIO A (2016). On the electrostatic Born-Infeld equation with extended charges, *Commun. Math. Phys*, 346, 877–906.
- [19] BORN M., INFELD L. (1933), Foundations of the new field theory, *Nature*, 132, Paper no. 1004.
- [20] BREZIS H., LIEB E. (1983), A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *Proc. Amer. Math. Soc*, 88, pp. 486–490.
- [21] Bucur C., Valdinoci E. (2016), Nonlocal Diffusion and Applications, *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*, 20, Springer.
- [22] CHEN S., LI L., YANG Z. (2020), Multiplicity and concentration of nontrivial nonnegative solutions for a fractional Choquard equation with critical exponent, *RACSAM*, 114, Paper no. 33.
- [23] CAO D. M. (1992), Nontrivial solution of semilinear elliptic equations with critical exponent in $\mathbb{R}^2$, *Comm. Partial Differential Equations*, 17, pp. 407–435.
- [24] Chen S., Fiscella A., Pucci P, X. Tang X. (2020), Coupled elliptic systems in $\mathbb{R}^N$ with (p, N) Laplacian and critical exponential nonlinearities. *Nonlinear Analysis*, 201, Paper no. 112066, 14 pp.
- [25] Fiscella A., Valdinoci E. (2014), A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator, *Nonlinear Anal*, 94, pp. 156–170.
- [26] FURTADO M., ZANATA H. (2021), Kirchhoff-Schrodinger equations in $\mathbb{R}^2$ with critical exponential growth and indefinite potential, *Commun. Contemp. Math*, 23(7), Paper no. 2050030.
- [27] CHERFILS L., IL’YASOV V. (2004), On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with p&q-Laplacian, *Commun. Pure Appl. Anal*, 1(4), pp. 1-14.

- [28] DENG S., XIONG S. (2022), Existence of ground state solutions for fractional Kirchhoff Choquard problems with critical Trudinger-Moser nonlinearity, *Comp. and Appl. Math*, 41, Article number: 21.
- [29] DENG S., TIAN X., XIONG S. (2024), Multiplicity and concentration of solutions for a Choquard equation with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Differ. Equ. Appl*, 31, Paper no. 32.
- [30] Eslami H., Jayasinghe L. B., Waldmann D. (2021), Nonlinear three-dimensional anisotropic material model for failure analysis of timber, *Engineering Failure Analysis*, 130, Article number: 105764.
- [31] Eddine N. C., Ragusa M. A., Repovš D. (2024), On the concentration-compactness principle for anisotropic variable exponent Sobolev spaces and its applications, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 27, pp. 725–756.
- [32] Figueiredo G., Ikoma N., Junior J. S. (2014), Existence and concentration result for the Kirchhoff type equations with general nonlinearities, *Arch. Ration. Mech. Anal*, 213, pp. 931–979.
- [33] FISCELLA A., PUCCI P. (2020), Degenerate Kirchhoff (p, q) -Fractional systems with critical nonlinearities, *Fract. Calc. Appl. Anal*, 23(3), pp. 723-752.
- [34] FRÖHLICH H. (1937), Theory of electrical breakdown in ionic crystal. *Proc. R. Soc. Ser. A*, 160(901), pp. 230–241.
- [35] FRÖHLICH H. (1954), Electrons in lattice fields, *Adv. Phys*, 3(11), pp. 325-361.
- [36] Guidotti P. (2015), Anisotropic diffusions of image processing from Perona-Malik on, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 67, pp. 131-156.
- [37] Giovanni B. M., Radulescu V. D., Servadei R. (2016), Variational Methods for Nonlocal Fractional Equations, *Encyclopedia Math. Appl*, Cambridge University Press, Cambridge, 162.

- [38] ISERNIA T. (2020), Fractional (p, q) -Laplacian problems with potentials vanishing at infinity, *Opuscula Math*, 40(1), pp. 93-110.
- [39] ISERNIA T., REPOVS D. (2021), Nodal solutions for double phase Kirchhoff problems with vanishing potentials, *Asymptotic Analysis*, 124(3-4), pp. 371-396.
- [40] JONES K. R. W. (1995), Newtonian quantum gravity, *Aust. J. Phys*, 48, pp. 1055–1081.
- [41] KRATOU M. (2022), Kirchhoff systems involving fractional p -Laplacian and singular nonlinearity, *Electronic Journal of Differential Equations*, 77, pp. 1-15.
- [42] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Leipzig: Teubner, 1883.
- [43] LIEB E., LOSS M. (2001) *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, Rhode island.
- [44] Liang S., Shi S., Thin N. V. (2024), Multiplicity and Concentration Properties for Fractional Choquard Equations with Exponential Growth, *J Geom Anal*, 34, Paper no. 367.
- [45] Liu S., Perera K. (2024), Multiple solutions for (p, q) -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical or subcritical exponents, *Calc. Var*, 63, Paper no. 199.
- [46] LIEB E. H. (1977), Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard’s nonlinear equation, *Stud. Appl. Math*, 57, pp. 93–105.
- [47] LIONS P. L. (1980), The Choquard equation and related questions, *Nonlinear Anal: Theory, Methods Appl*, 4, pp. 1063–1072.
- [48] LIU S., YANG J., CHEN H. (2022), Infinitely many sign-changing solutions for Choquard equation with doubly critical exponents, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 67(2), pp. 315-337.
- [49] LIA Q., YANG Z. (2016), Multiple solutions for a class of fractional quasi-linear equations with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$, *Complex Var. Elliptic Equ*, 61, pp. 969-983.

- [50] LI Q., YANG Z. (2015), Multiple solution for N –Kirchhoff type problems with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Anal*, 117, pp. 159-168.
- [51] LIU Y., LIU C. (2022), The Ground State Solutions for Kirchhoff-Schrodinger Type Equation with Singular Exponential Nonlinearities in $\mathbb{R}^N$, *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 43(4), pp. 549-566.
- [52] MOSER J. (1960), A new proof of De Giorgi’s theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math*, 13, pp. 457-468.
- [53] MOSER J. (1971), A sharp form of an inequality by N. Trudinger, *Indiana Univ. Math. J*, 20, pp. 1077-1092.
- [54] GIOVANNI B. M., THIN N. V., VILASI L. (2022), On a class of nonlocal Schrödinger equations with exponential growth, *Advances in Differential Equations*, 27, (9-10), pp. 571-610.
- [55] MOROZ V., SCHAFTINGEN J. V., A guide to the Choquard equation, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19, pp. 773–813.
- [56] MOROZ I. M., PENROSE R., TOD P. (1998), Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations, *Classical Quantum Gravity*, 15, pp. 2733–2742.
- [57] NEZZA E. D., PALATUCCI G., VALDINOCI E. (2012), Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces, *Bull. Sci. Math*, 136, pp. 521-573.
- [58] NGUYEN T. V., RĂDULESCU V. D. (2024), Multiplicity and concentration of solutions to fractional anisotropic Schrödinger equations with exponential growth, *Manuscripta math*, 173, pp. 499–554.
- [59] PEKAR S. (1954), Untersuchung über die Elektronentheorie der Kristalle, p. 2. Akademie Verlag, Berlin.
- [60] PENROSE R. (1996), On gravity’s role in quantum state reduction, *Gen. Relativ. Gravitation*, 28, pp. 581–600.

- [61] PARINI E., RUF B. (2018), On the Moser-Trudinger inequality in fractional Sobolev-Slobodeckil spaces, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.*, 29, pp. 315-319.
- [62] PHAM T. Q., NGUYEN T. V. (2026), Concentration phenomena for anisotropic fractional Choquard equations and potential competition, *Bulletin of Mathematical Sciences*, Vol. 16, No. 1, Article number: 2550018 (48 pages).
- [63] Pohozaev I. (1975), A certain class of quasilinear hyperbolic equations. *Mat. Sb*, 96, pp. 152–166.
- [64] PUCCI P., XIANG M., ZHANG B. (2015), Multiple solutions for non-homogeneous Schrödinger-Kirchhoff type equations involving the fractional p -Laplacian in $\mathbb{R}^N$, *Calc. Var.*, 54, pp. 2785-2806.
- [65] QIN D., RĂDULESCU V. D., TANG X. H. (2021), Ground states and geometrically distinct solutions for periodic Choquard-Pekar equations, *Journal of Differential Equations*, 275, pp. 652-683.
- [66] RABINOWITZ P. (1986), Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS Reg. Conf. Ser. Math, *American Mathematical Society*, Providence.
- [67] SHEN L., RADULESCU V. D. (2024), Concentration of ground state solutions for supercritical zero-mass (N, q) -equations of Choquard reaction, *Math. Z*, 308, Paper no. 66.
- [68] STRUWE M. (1990), Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, *Ergeb. Math. Grenzgeb. Berlin: Springer*.
- [69] SZULKIN A., WETH T. (2010), The method of Nehari manifold, in: D. Y. Gao, D. Montreanu, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, *International Press*, Boston, pp. 597-632.
- [70] THIN N. V. (2020), Singular Trudinger-Moser inequality and fractional p -Laplace equations in $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Anal*, 196, pp. 1-28.

- [71] Trudinger N. S. (1967), On imbeddings into Orlicz spaces and some applications, *J. Math. Mech*, 17, pp. 473–483.
- [72] Thin N. V., Thuy P. T., Linh T. T. D. (2024) Existence of solution for the (p,q) -fractional Laplacian equation with nonlocal Choquard reaction and exponential growth, *Complex Var. Elliptic Equ*, 69(11), pp. 1949-1972.
- [73] THIN N. V. (2022), Multiplicity and concentration of solutions to a fractional (p, p_1) -Laplace problem with exponential growth, *J. Math. Anal. Appl*, 506(2), Paper no. 125667.
- [74] TENG K., AGARWAL R. P. (2019), Ground state and bounded state solution for the nonlinear fractional Choquard-Schrödinger-Poisson system, *J. Math. Phys*, 60, Article number: 103507.
- [75] TRANG P. Q., AHMAD B., THIN N. V. (2025), On fractional anisotropic Kirchhoff-Schrödinger type equations in $\mathbb{R}^N$, Discrete and Continuous Dynamical Systems - S. doi: 10.3934/dcdss.2026112.
- [76] TRANG P. Q. (2025), The existence of weak solution to fractional anisotropic equation in $\mathbb{R}^N$ with exponential growth, *TNU Journal of Science and Technology*, 230(06), pp. 487 - 494.
- [77] XIE X. L., WANG F., ZHANG W. (2023), Existence of solutions for the (p, q) -Laplacian equation with nonlocal Choquard reaction, *Applied Mathematics Letters*, 135, Article number 108418.
- [78] ZHANG Y., TANG X., RĂDULESCU V. D. (2021), Concentrating of solutions for fractional double-phase problems: critical and supercritical cases, *J. Differential Equations*, 302, pp. 139-184.
- [79] ZHANG W., ZHANG J., RĂDULESCU V. D. (2023),, Concentrating solutions for singularly perturbed double phase problems with nonlocal reaction, *J. Differential Equations*, 347, pp. 56-103.
- [80] ZHANG Y., RĂDULESCU V. D., CHEN J., QIN D. D. (2024), Concentration and multiplicity of solutions for fractional double phase problems,

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics,
First View , pp. 1 - 54, DOI: <https://doi.org/10.1017/prm.2024.84>.

- [81] ZHIKOV V. V. (1986), Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat*, 50(4), pp. 675–710; English translation in *Math. USSR, Izv.* 29 (1) (1987), 33–66.
- [82] ZHIKOV V. V. (1995), On Lavrentiev’s phenomenon, *Russ. J. Math. Phys*, 3(2), pp. 249–269.
- [83] ZHANG C. (2019), Trudinger-Moser inequalities in Fractional Sobolev-Slobodeckij spaces and multiplicity of weak solutions to the Fractional-Laplacian equation, *Adv. Nonlinear Stud*, 19, pp. 197-217.
- [84] ZHANG L., TANG X., ZHANG N. (2022), On critical N –Kirchhoff type equations involving Trudinger-Moser nonlinearity, *Math Meth Appl Sci*, 45, pp. 5945-5964.
- [85] ZHANG B., HAN X., THIN N. V. (2023), Schrodinger-Kirchhoff-type problems involving the fractional p –Laplacian with exponential growth, *Appl. Anal*, 102(7), pp. 1942-1974.
- [86] WILLEM M. (1996) Minimax Theorems, *Basel: Birkhäuser*.