

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM QUỲNH TRANG

SỰ TỒN TẠI VÀ CÔ ĐẶC NGHIỆM
CỦA MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC
CHỨA TOÁN TỬ P-LAPLACE PHÂN THỨ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2026

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM QUỲNH TRANG

SỰ TỒN TẠI VÀ CÔ ĐẶC NGHIỆM
CỦA MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC
CHỨA TOÁN TỬ P-LAPLACE PHÂN THỬ

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 9460102

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TS. Nguyễn Văn Thìn

Thái Nguyên - 2026

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Nguyễn Văn Thìn. Các kết quả nghiên cứu viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học của ai khác.

Thái Nguyên, tháng 07 năm 2026

Tác giả

Phạm Quỳnh Trang

Lời cảm ơn

Trước hết, em xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán cùng các thầy cô, các anh chị nghiên cứu sinh thuộc Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng – Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã luôn quan tâm, tạo điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thiện luận án này.

Đặc biệt, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và chân thành nhất tới PGS. TS. Nguyễn Văn Thìn. Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học nghiêm túc, tận tâm và đầy trách nhiệm của Thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn Đảng ủy, Ban Giám hiệu, Lãnh đạo chỉ huy cùng toàn thể đồng nghiệp tại Trường Văn hóa CAND 1 đã luôn quan tâm, động viên và tạo điều kiện thuận lợi trong quá trình công tác để tôi có thể tập trung nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới gia đình, bạn bè đã luôn âm thầm sẻ chia, đồng hành và là chỗ dựa tinh thần vững chắc, tiếp thêm động lực cho tôi trong suốt chặng đường học tập và nghiên cứu vừa qua.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song luận án khó tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các nhà khoa học và quý bạn đọc để luận án được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 07 năm 2026

Tác giả

Phạm Quỳnh Trang

Mục lục

Mở đầu	1
1 Sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$	18
1.1 Một số kiến thức chuẩn bị	18
1.2 Sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ	28
1.3 Sự tồn tại nghiệm yếu cho phương trình Choquard nhiều pha với số mũ tối hạn	36
2 Sự cô đặc của nghiệm cho phương trình Choquard phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với thế vị cạnh tranh	44
2.1 Sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu	44
2.2 Sự cô đặc của nghiệm	65
3 Sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ	81
3.1 Phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ tối hạn	81
3.2 Phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng trên tối hạn	97
Tài liệu tham khảo	110

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Phương trình đạo hàm riêng nhiều pha được sử dụng để mô tả các hiện tượng mà tính chất của chúng phụ thuộc vào hướng. Một ứng dụng tiêu biểu của lớp phương trình này là bài toán khử nhiễu ảnh thông qua mô hình truyền nhiệt. Trong khi phương trình truyền nhiệt đẳng hướng, với cơ chế khuếch tán tuyến tính, thực hiện quá trình làm mịn ảnh một cách đồng đều và do đó dẫn đến hiện tượng làm mờ các cạnh và biên ảnh, thì phương trình truyền nhiệt nhiều pha cho phép mô hình hóa quá trình khuếch tán có chọn lọc theo từng hướng. Cụ thể, các mô hình khuếch tán nhiều pha, chẳng hạn như phương trình Perona–Malik [36], cho phép tăng cường khuếch tán trong các vùng ảnh đồng nhất nhằm giảm nhiễu, đồng thời hạn chế khuếch tán theo phương vuông góc với các cạnh, nơi xảy ra sự thay đổi mạnh về độ sắc nét, nhờ đó bảo toàn hiệu quả các thông tin quan trọng như cạnh và biên ảnh. Ngoài ra các phương trình nhiều pha còn được dùng trong phục chế ảnh. Các phương trình đạo hàm riêng nhiều pha cho phép truyền thông tin theo những hướng đã có cấu trúc ảnh, chẳng hạn như hướng của các cạnh, đường biên hoặc hoa văn, qua đó quá trình nội suy ảnh diễn ra một cách có định hướng, bảo toàn tốt hơn hình dạng và cấu trúc của ảnh gốc. Ở khía cạnh vật lý và khoa học vật liệu, các phương trình đạo hàm riêng nhiều pha đóng vai trò quan trọng trong thiết kế vật liệu dị hướng với các tính chất khác nhau [30].

Bên cạnh các phương trình đạo hàm riêng mang tính địa phương, trong nhiều mô hình toán học hiện đại còn xuất hiện các phương trình chứa toán tử không địa phương, nhằm mô tả những hiện tượng có tương tác dài hạn

hoặc phụ thuộc vào toàn miền, các nhà toán học dành sự quan tâm vào nghiên cứu các toán tử không địa phương loại elliptic (bao gồm toán tử Laplacian thứ, p-Laplace phân thứ) trong cả nghiên cứu lý thuyết lẫn ứng dụng. Các lớp toán tử này phát sinh khá tự nhiên trong nhiều bối cảnh khác nhau như: Tối ưu hóa, tài chính, sự khuếch tán bất thường, mặt cực tiểu, sự xáo trộn tinh thể, định luận bảo toàn, cơ học lượng tử, khoa học vật liệu, sóng nước, phản ứng hóa học của chất lỏng, động lực học dân số, động lực học về chất lỏng địa vật lý [21, 37]. Các nghiên cứu về phương trình chứa toán tử không địa phương rất đa dạng, có thể kể ra các hướng chính như:

1. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các phương trình đạo hàm riêng phân thứ.
2. Nghiên cứu tính chất của nghiệm như tính chính quy, tính đối xứng, dáng điệu tiệm cận của nghiệm,
3. Sự bùng nổ của nghiệm các phương trình khuếch tán (truyền nhiệt, truyền sóng).

Trong luận án này, chúng tôi tập trung vào hướng nghiên cứu đầu tiên. Ở hướng nghiên cứu này, vấn đề nghiên cứu cũng hết sức đa dạng do sự xuất hiện của nhiều dạng phương trình khác nhau. Bài toán kiểu Kirchhoff xuất phát từ phương trình kiểu

$$\rho u_{tt} - \left(\frac{p_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L |u_x|^2 dx \right) u_{xx} = 0, \quad (1)$$

trong đó ρ, L, E, h, p_0 là các hằng số với ý nghĩa vật lý nhất định, Kirchhoff [42] coi nó như một sự mở rộng của phương trình sóng cổ điển của D'Alembert dùng để mô tả dao động ngang của một sợi dây căng. Tham khảo thêm trong [32, 63] về bài toán kiểu Kirchhoff cổ điển. Trong [25], Fiscella và Valdinoci đưa ra một ý nghĩa vật lý đáng chú ý của phương trình kiểu Kirchhoff. Xuất phát từ trường hợp một chiều, Họ nhận thấy rằng lực căng trên sợi dây là một đại lượng không địa phương, do phụ thuộc vào giá trị trung bình của động năng $\frac{|u_x|^2}{2}$ trên $[0, L]$ và nó có tính chất không địa phương do chuẩn H^s của hàm u trên không gian Sobolev phân thứ.

Phương trình Choquard được cho bởi

$$-\Delta v + V(x)v = (I_\alpha * |v|^p)|v|^{p-2}v \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \quad p > 2,$$

trong đó I_α là thế vị Riesz được xác định với mỗi điểm $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ bởi

$$I_\alpha(x) = \frac{A_\alpha}{|x|^{N-\alpha}},$$

với

$$A_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pi^{N/2} 2^\alpha}, \quad \alpha \in (0, N),$$

trong đó Γ là hàm Gamma. P. Choquard [46] là người đầu tiên nghiên cứu phương trình Choquard nhằm mô tả một electron dao động xung quanh vùng quỹ đạo của nó. Phương trình này cũng xuất hiện trong lý thuyết về polaron ở trạng thái nghỉ [34, 35, 59] cũng như trong các mô hình mô tả tương tác giữa cơ học lượng tử phi tương đối và hấp dẫn [40, 56, 60]. Trong các công trình Lieb [46] và Lions [47], sự tồn tại của nghiệm yếu cho phương trình Choquard được nghiên cứu bằng kỹ thuật biến phân, và chủ đề này được nhiều tác giả sau đó tiếp tục nghiên cứu. Năm 2019, Teng và Agarwal [74] nghiên cứu sự tồn tại của nghiệm không âm với năng lượng cực tiểu và sự không tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu của phương trình Choquard-Schrödinger-Poisson như sau

$$(-\Delta)^s v + V(x)v + K(x)\phi_v^t |v|^{q-2}v = (I_\alpha * |v|^p)|v|^{p-2}v \quad \text{trong } \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

trong đó $\phi_v^t(x) = c_t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)|v(y)|^q}{|x-y|^{3-2t}} dy$, $c_t = \pi^{-3/2} 2^{-2t} \frac{\Gamma(3-2t)}{\Gamma(t)}$, $s, t \in (0, 1)$, $p, q > 2$ và các thế vị V và K thỏa mãn một số giả thiết phù hợp. Ý tưởng chính của họ là chứng minh bổ đề về lý thuyết phân rã trên một dãy các hàm trong không gian Sobolev phân thứ và bổ đề về tính cô đặc compact. Sử dụng hai bổ đề này và kết hợp với một ánh xạ trung tâm hạn chế trên đa tạp Nehari liên kết với phương trình (2), họ chỉ ra sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu cho phương trình trên. Năm 2022, Qin-Radulescu-Tang [65] nghiên cứu nghiệm với năng lượng cực tiểu của phương trình Choquard-Pekar

$$-\Delta v + V(x)v = (W * F(v))f(v), \quad N \geq 2, x \in \mathbb{R}^N, \quad (3)$$

trong đó 0 thuộc phổ của toán tử Schrödinger $-\Delta + V$ và V là hàm tuần hoàn với chu kỳ 1. Nghiệm với năng lượng cực tiểu của (3) thu được dưới một giả

thiết thích hợp của thế vị W và hàm phi tuyến f . Ba nhà toán học trên chứng minh sự tồn tại nhiều nghiệm bằng cách sử dụng phương pháp biến phân và bổ đề biến dạng. Chúng tôi giới thiệu công trình của Moroz-Schaftingen [55] như một tài liệu tổng quan cho phương trình Choquard. Bài toán hai pha được phát triển từ lý thuyết đàn hồi phi tuyến. Giả sử Du là ma trận có kích thước $N \times N$ của các gradient, và $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) là độ dịch chuyển. Tổng năng lượng được biểu diễn bởi $I(u) = \int_{\Omega} f(x, Du(x))dx$, với $f = f(x, \xi) : \Omega \times \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả lồi theo biến thứ hai và Ω là miền bị chặn với biên trơn. Chúng tôi xét năng lượng cực tiểu của hàm I trên tập hoặc không gian nhất định và các tính chất của nghiệm cho trường hợp này. Trong [81, 82], Zhiko đã mô tả bản chất của một số hiện tượng liên quan đến hàm phi tuyến I đồng thời giới thiệu một số hàm năng lượng liên hệ với mô hình Lavrentiev.

Năm 2020, Ambrosio-Radulescu [16] công bố công trình về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình chứa toán tử hai pha (p, q) -Laplace dạng:

$$(-\Delta)_p^s v + (-\Delta)_q^s v + V(\zeta x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = f(v) \text{ trong } \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

trong đó $\zeta > 0$ là tham số nhỏ, $s \in (0, 1)$, $1 < p < q < \frac{N}{s}$ và f là hàm liên tục với độ tăng mũ dưới hạn trong không gian Sobolev phân thứ và V thỏa mãn một số điều kiện nhất định. Năm 2022, Zhang-Tang-Radulescu [78] nghiên cứu phương trình phân thứ hai pha trong trường hợp độ tăng mũ tới hạn và trên tới hạn trong $\mathbb{R}^N$ có dạng

$$(-\Delta)_p^s v + (-\Delta)_q^s v + V(\zeta x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = h(v) + |v|^{r-2}v, \quad (5)$$

trong đó $r = q_s^*$ hoặc $r > q_s^*$ và $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm liên tục. Lưu ý rằng khi $s \rightarrow 1^-$, phương trình (4) trở thành

$$-\Delta_p v - \Delta_q v + V(\zeta x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = f(v) \text{ trong } \mathbb{R}^N, \quad (6)$$

trong đó $\Delta_r v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{r-2} \nabla v)$, $r \in \{p, q\}$. Phương trình

$$v_t = \operatorname{div}((|\nabla v|^{p-2} + |\nabla v|^{q-2}) \nabla(v)) + c(x, v) \quad (7)$$

liên quan đến việc nghiên cứu phương trình (6) và có nhiều ứng dụng trong thiết kế phản ứng hóa học, sinh lý học, và vật lý plasma [15, 27]. Hàm

$c(x, u)$ đặc trưng cho sự hao hụt và gắn liền với nguồn của phương trình đó. Phương trình Born-Infeld [18, 19, 20], dựa trên một biến phân của mật độ Maxwell's Lagrangian và tồn tại trong điện từ học, điện tĩnh học và điện động học, là nguồn cảm hứng cho phương trình nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$:

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{(1 - 2|\nabla u|^2)^{1/2}} \right) = h(u) \text{ trong } \mathbb{R}^N.$$

Thật vậy, sử dụng khai triển Taylor ta thu được

$$(1 - t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} t^n, |t| < 1.$$

Áp dụng $t = 2|\nabla u|^2$ vào công thức trước đó, ta thu được toán tử như sau

$$-\Delta u - \Delta_4 u - \frac{3}{2} \Delta_6 u - \dots - \frac{(2n-3)!!}{(2n-1)!!} (n-1)! \Delta_{2n} u$$

đây là toán tử xấp xỉ bậc n của $-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{(1 - 2|\nabla u|^2)^{1/2}} \right)$.

Trong phương trình (6), khi f là hàm Choquard, Zhang-Zhang-Radulescu [79] đã nghiên cứu sự nhiễu và sự cô đặc nghiệm của phương trình sau:

$$-\zeta^p \Delta_p v - \zeta^q \Delta_q v + V(x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = \zeta^{\mu-N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right) f(v) \text{ trong } \mathbb{R}^N,$$

trong đó f là hàm khả vi và thế vị V là liên tục và thỏa mãn một số giả thiết phù hợp. Phương trình hai pha với dạng Choquard được nghiên cứu bởi Xie-Wang-Zhang [77]:

$$-\Delta_p v - \Delta_q v + V(x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right) f(v) \text{ trong } \mathbb{R}^N,$$

trong đó $1 < p < q < N, 0 < \mu < N$, hàm thế vị V và hàm f thỏa mãn các giả thiết phù hợp.

Năm 2024, Ambrosio [9] và Zheng cùng các cộng sự [80] nghiên cứu sự nhiễu nghiệm và sự cô đặc nghiệm cho bài toán:

$$(-\Delta)_p^s v + (-\Delta)_q^s v + V(\zeta x)(|v|^{p-2}v + |v|^{q-2}v) = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right) f(u), \quad (8)$$

trong đó V thỏa mãn các điều kiện sau:

- (V₁) Tồn tại hàm thực dương V_0 sao cho $V(x) \geq V_0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$;
(V₂) Tồn tại một tập bị chặn $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ sao cho

$$V_0 = \min_{x \in \Lambda} V(x) < \min_{x \in \partial \Lambda} V(x).$$

Chú ý rằng

$$\mathcal{M} := \{x \in \Lambda : V(x) = V_0\} \neq \emptyset.$$

Ambrosio đã chứng minh sự tồn tại và nhiều nghiệm của (8) bằng phương pháp phạt, lý thuyết Ljusternik-Schnirelmann, và phương pháp biến phân. So với bài toán được đưa ra trong luận án, giả thiết về V và f là khác nhau. Hơn nữa, ta không sử dụng phương pháp phạt do điều kiện của thể vị V . Phương trình

$$(-\Delta)_p^s v + V(\zeta x)|v|^{p-2}v = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\right)f(v) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \quad (9)$$

được nghiên cứu bởi Ambrosio trong [6]. Ngoài ra, khi $p = 2$, năm 2020, Chen-Li-Yang [22] nghiên cứu sự tồn tại nhiều nghiệm và sự cô đặc nghiệm cho phương trình:

$$\zeta^{2s}(-\Delta)^s v + V(x)v = \zeta^{\mu-N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\right)f(v) + |v|^{2_s^*-2}v \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \quad (10)$$

trong đó V thỏa mãn điều kiện (V) và f thỏa mãn các giả thiết thích hợp. Trong phương trình (9), khi $s \rightarrow 1^-$, ta thu được phương trình p -Laplace dạng

$$-\zeta^p \Delta_p v + V(\zeta x)|v|^{p-2}v = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\right)f(v) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N. \quad (11)$$

Theo giả thiết (V₁), (V₂) và hàm phi tuyến f là khả vi, Alves-Yang [14] đã chứng minh rằng (11) có ít nhất một $\text{cat}_{\mathcal{M}_\delta}(\mathcal{M})$ nghiệm yếu dương thông qua phương pháp phạt và lý thuyết Ljusternik-Schnirelmann, trong đó $\mathcal{M}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \mathcal{M}) \leq \delta\}$, $\delta > 0$. Năm 2020, Liu-Yang-Chen [48] chỉ ra sự tồn tại vô hạn nghiệm nút cho phương trình Choquard với số mũ tới hạn kép như sau

$$-\Delta u + u = (I_\alpha * F(u))F'(u) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \quad (12)$$

trong đó $N \geq 3$. Hàm phi tuyến $F = \frac{|u|^p}{p} + \frac{|u|^q}{q}$, với $p = \frac{N + \alpha}{\alpha}$ và $q = \frac{N + \alpha}{N - 2}$. Dựa trên phương pháp nhiễu và các tập bất biến, họ chỉ ra phương trình (12) có vô số nghiệm đổi dấu. Năm 2024, Liu và Perera [45] nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu cho bài toán hai pha trong $\mathbb{R}^N$ có dạng $-\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda h(x)|u|^{r-2}u + g(x)|u|^{p^*-2}u$, thông qua nguyên lý cô đặc compact của Lions, với $1 < q \leq p < r < p^*$. Một số kết quả về bài toán hai pha với điều kiện kiểu Berestycki-Lions type cho hàm phi tuyến tính, độc giả có thể xem thêm trong [10, 11].

Một phương trình Schrödinger kỳ dị có dạng

$$-div(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) + V(x) |u|^{N-2} u = \frac{f(x, u)}{|x|^\eta}, x \in \mathbb{R}^N, \quad (13)$$

trong đó $N \geq 2$, $0 \leq \eta < N$, $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục, $f(x, s)$ liên tục trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Khi $\eta = 0$, phương trình (13) là phương trình elliptic cổ điển không chứa kỳ dị được nghiên cứu lần đầu bởi Cao [23] năm 1992 cho trường hợp $N = 2$. Khi $0 < \eta < N$, phương trình (13) trở thành phương trình elliptic với kỳ dị. Năm 2010, Yang [2] chứng minh được sự tồn tại nghiệm không tầm thường của phương trình dạng:

$$-div(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) + V(x) |u|^{N-2} u = \frac{f(x, u)}{|x|^\eta} + \varepsilon h(x), x \in \mathbb{R}^N \quad (14)$$

với $\eta > 0$. Khi đó, V là hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện sau

(V₁) $V(x) \geq V_0 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$;

(V₂) Với mỗi $c > 0$, ta có $\text{meas}(\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq c\}) < \infty$, trong đó meas là một độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^N$.

$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm không tuyến tính thỏa mãn:

(H₁) Tồn tại ba hằng số dương $\alpha_0, b_1, b_2 > 0$ sao cho

$$|f(x, \tau)| \leq b_1 |\tau|^{N-1} + b_2 \Phi_{N,1}(\alpha_0 |\tau|^{N/(N-1)})$$

với mọi $(x, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$, trong đó $\Phi_{N,1}(y) = e^y - \sum_{i=0}^{N-2} \frac{y^i}{i!}$.

(H₂) Tồn tại $\mu > N$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}^N$ và $\tau > 0$,

$$0 < \mu F(x, \tau) \equiv \mu \int_0^\tau f(x, t) dt \leq \tau f(x, \tau).$$

(H₃) Tồn tại hằng số $R_0, M_0 > 0$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}^N$ và $\tau > R_0$,

$$F(x, \tau) \leq M_0 f(x, \tau).$$

Họ đã thiết lập một bất đẳng thức kiểu Trudinger–Moser suy biến và sử dụng nó cùng với các phương pháp biến phân để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu cho phương trình (14).

Năm 2015, Li and Yang [50] nghiên cứu phương trình dạng Kirchhoff-Schrödinger như sau:

$$\begin{aligned} M \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^N + V(x) |u|^N) dx \right) (-\operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) u + V(x) |u|^{N-2} u) \\ = \lambda A(x) |u|^{p-2} u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (15)$$

$u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < N$, hàm Kirchhoff $M(s) = s^k$, $k > 0$, hàm thế vị $V : \mathbb{R}^N \rightarrow (0, \infty)$ là hàm liên tục bị chặn dưới bởi hằng số dương và có giới hạn dương vô cực khi $|x| \rightarrow \infty$, $\lambda > 0$ là tham số thực, $A(x)$ là hàm dương trong $L^{\frac{N}{N-p}}(\mathbb{R}^N)$ và $f(t)$ thỏa mãn điều kiện về độ tăng mũ. Theo nguyên lý biến phân của Ekeland và Định lý Vượt núi, họ chỉ ra sự tồn tại của ít nhất hai nghiệm trong $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ của phương trình (15). Furtato và Zanata [26] nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán:

$$M \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + b(x) u^2) dx \right) (-\Delta u + V(x) u) = A(x) f, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (16)$$

trong đó $M(t)$ là hàm số dạng Kirchhoff, V có thể nhận giá trị âm và không có giới hạn $+\infty$ khi $|x| \rightarrow \infty$, A bị chặn địa phương và f có độ tăng mũ tối hạn. Khi $M \equiv 1$, họ đã sử dụng các phương pháp biến phân và một bất đẳng thức kiểu Trudinger-Moser để thu được kết quả mới cho phương trình Schrödinger cổ điển bằng cách đưa ra ước lượng mới về mức vượt núi dựa vào một số giả thiết phù hợp của hàm phi tuyến.

Năm 2020, Thın [70] mở ra hướng nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm cho phương trình kỳ dị chứa toán tử p -Laplace phân thứ trong $\mathbb{R}^N$ với dạng

$$\mathcal{L}_p^s u(x) + V(x) |u|^{p-2} u = \frac{f(x, u)}{|x|^\gamma}, \quad (17)$$

trong đó $\gamma \in [0, N)$, $s \in (0, 1)$, $\mathcal{L}_p^s$ là toán tử p -Laplace phân thứ được định

nghĩa bởi

$$\mathcal{L}_p^s \varphi(x) = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x)} |\varphi(x) - \varphi(y)|^{p-2} (\varphi(x) - \varphi(y)) K(x-y) dy$$

với $x \in \mathbb{R}^N$, φ là hàm đủ trơn và $K : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm đo được. V thỏa mãn các điều kiện như bài toán (14), K, f thỏa mãn:

(K_1) $\eta K \in L^1(\mathbb{R}^N)$, trong đó $\eta(x) = \min\{|x|^p, 1\}$.

(K_2) Tồn tại $k_0 > 0$ sao cho $K(x) \geq k_0 |x|^{-2N}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < \epsilon\}$.

(f_1) Tồn tại các hằng số $\alpha_0 \in (0, \beta_*)$, $0 < \beta_* < \alpha_*$, $b_1, b_2 > 0$ sao cho hàm phi tuyến liên tục $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x, t)| \leq b_1 |t|^{p-1} + b_2 \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)}),$$

với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, trong đó $\Phi_{N,s}(y) = e^y - \sum_{i=0}^{j_p-2} \frac{y^i}{i!}$, $j_p = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$.

(f_2)' Tồn tại một hằng số $\mu > \frac{N}{s}$ sao cho

$$f(x, t)t - \mu F(x, t) \geq -\rho |t|^{N/s},$$

với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$ và $F(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau$.

(f_3) Tồn tại một hằng số $B > 0$ thỏa mãn $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{F(x, t)}{|t|^{N/s}} < B$ đều theo $x \in \mathbb{R}^N$, với $\frac{m_0 s}{N} - B A_{N/s, \gamma}^{-N/s} > 0$.

(f_4)' Tồn tại $\gamma_1 > 0$ đủ lớn và $\gamma_2 \geq 0$ sao cho với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, ta có

$$F(x, t) \geq \gamma_1 |t|^\mu - \gamma_2 |t|^{N/s}.$$

Năm 2022, Zhang, Tang và Zhang [84] nghiên cứu phương trình elliptic kiểu Kirchhoff:

$$\begin{cases} -M \left(\|\nabla u\|_N^N \right) \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) = f(x, u), & \text{trong } \Omega, \\ u = 0, & \text{trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (18)$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) là miền bị chặn với biên trơn, hàm Kirchhoff $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x, s)$ có độ tăng mũ tối hạn. Áp dụng Định lý Vượt

núi, họ thu được nghiệm với năng lượng cực tiểu kiểu Nehari của bài toán. Bên cạnh đó, từ một số ước lượng mới, họ chứng minh được sự tồn tại nghiệm không tầm thường của phương trình (18). Áp dụng bất đẳng thức Trudinger-Moser, điều kiện hình học của Định lý Vượt núi và ước lượng kiểu Min-max, S. Deng và S. Xiong [28] chứng minh sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu cho bài toán Kirchhoff-Choquard phân thứ chứa toán tử N/s -Laplacian dạng

$$\begin{cases} M \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{\frac{N}{s}}}{|x-y|^{2N}} dx dy \right) \mathcal{L}_{N/s}^s u = (I_\mu * F(u))f(u) \text{ trong } \mathbb{R}^N, \\ u = 0 \text{ trên } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}, \quad (19)$$

trong đó Ω là miền bị chặn với biên Lipschitz trong $\mathbb{R}^N$ và $N \geq 1$, hàm Kirchhoff M liên tục, $I_\mu = |x|^{\mu-N}$ với $\mu \in (0, N)$, $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, f là hàm liên tục với độ tăng mũ tối hạn. Bên cạnh đó,

$$(I_\mu * F(u))(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(u(y))}{|x-y|^\mu} dy.$$

Năm 2022, Kratou [41] sử dụng phương pháp phân hoạch đa tạp Nehari để nghiên cứu bài toán dạng Kirchhoff chứa toán tử p -Laplace phân thứ trong $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dạng:

$$\begin{cases} M \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dx dy \right) \mathcal{L}_p^s u = \lambda a(x) |u|^{q-2} u + \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta} c(x) |u|^{-\alpha} |v|^{1-\beta} \\ M \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dx dy \right) \mathcal{L}_p^s v = \mu b(x) |v|^{q-2} v + \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta} c(x) |u|^{1-\alpha} |v|^{-\beta} \end{cases}, \quad (20)$$

trong đó Ω là miền bị chặn với biên trơn, $N > ps$, $s \in (0, 1)$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $2 - \alpha - \beta < p \leq p\theta < q < p_s^*$, $p_s^* = \frac{Np}{N-sp}$ là số mũ Sobolev phân thứ, α, μ là các tham số, $a, b, c \in C(\overline{\Omega})$ là các hàm trọng số không âm, $M(t) = k + lt^{\theta-1}$, $k > 0$, $l, \theta \geq 1$.

Cùng năm đó, Yanjun và Chungen [51] nghiên cứu sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu cho phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger kỳ dị với hàm phi tuyến có độ tăng mũ trong $\mathbb{R}^N$ như sau:

$$M \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^N + V(x) |u|^N dx \right) \left(-\Delta_N u + V(x) |u|^{N-2} u \right) = \frac{f(x, u)}{|x|^\eta}, \quad (21)$$

trong đó $N \geq 2$, $0 < \eta < N$, $\Delta_N u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u)$. V là hàm liên tục bị chặn dưới bởi một số dương, $f(x, t)$ có độ tăng mũ tối hạn. Đặt $\mathcal{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$ và giả sử $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục với $M(0) = 0$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

(m_1) với mọi $d > 0$, tồn tại $\kappa := \kappa(d) > 0$ sao cho $M(t) > \kappa$, $\forall t \geq d$,

(m_2) với mọi $t_1, t_2 \geq 0$, ta có

$$\mathcal{M}(t_1 + t_2) \geq \mathcal{M}(t_1) + \mathcal{M}(t_2),$$

(m_3) tồn tại $\theta > 1$ sao cho $\frac{M(t)}{t^{\theta-1}}$ là tăng trong $(0, \infty)$.

Từ điều kiện (m_3), ta có $\theta \mathcal{M}(t) - M(t)t \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Hơn nữa, với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, 0]$, $f(x, t) = 0$ và ta giả sử rằng f thỏa mãn các điều kiện sau:

(H'_1) Tồn tại các hằng số dương t_0 và M_0 sao cho

$$0 < F(x, t) := \int_0^t f(x, s)ds \leq M_0 f(x, t), \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [t_0, +\infty).$$

(H'_2) Tồn tại $\alpha_0, c_1, c_2 > 0$ sao cho với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$,

$$f(x, t) \leq c_1 |t|^{\theta N-1} + c_2 \left[e^{\alpha_0 |t|^{\frac{N}{N-1}}} - S_{N-2}(\alpha_0, t) \right],$$

trong đó

$$S_{N-2}(\alpha_0, t) = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\alpha_0^k |t|^{\frac{kN}{N-1}}}{k!}.$$

(H'_3) (Điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz) Tồn tại $\mu > \theta N$ sao cho

$$0 < \mu F(x, t) \leq t f(x, t), F(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau,$$

trong đó $x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}^+$.

(H'_4) $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{NF(x, t)}{|t|^{\theta N}} < \mathcal{M}(1)\lambda_\eta$ đều trong $\mathbb{R}^N$.

(H'_5) Tồn tại $q > \theta N$ và C_q sao cho $f(x, t) > C_q t^{q-1}$ với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, trong đó

$$C_q := \inf \left\{ C > 0 : q \mathcal{M}(t^N S_q^N) - N C t^q \leq q \mathcal{M} \left(\left(\left(1 - \frac{\eta}{N} \right) \frac{\alpha_N}{\alpha_0} \right)^{N-1} \right) \right\}.$$

(H'_6) $\frac{f(x,t)}{t^{\theta N-1}}$ tăng ngặt khi $t > 0$.

Kết hợp phương pháp biến phân và ước lượng mức vượt núi, họ thu được nghiệm với năng lượng cực tiểu của bài toán (21).

Năm 2023, Zhang, Han và Thın [85] sử dụng Định lý Vượt núi để chứng minh sự tồn tại nghiệm cho phương trình kiểu Schrödinger-Kirchhoff chứa toán tử p -Laplace phân thứ dạng

$$M \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^p dx \right) \times \left(\mathcal{L}_p^s u(x) + V(x) |u|^{p-2} u \right) = K(x) f(x, u), \quad (22)$$

trong đó M là hàm Kirchhoff liên tục, $0 < s < 1 < p < \infty$, $sp = N$, f là hàm số liên tục trong $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ với độ tăng mũ tới hạn, K, V là các hàm liên tục dương thỏa mãn các điều kiện thích hợp.

Năm 2024, áp dụng phương pháp biến phân và lý thuyết phạm trù Ljusternik-Schnirelmann, Deng, Tian và Xiong [29] thu được kết quả về sự tồn tại nhiều nghiệm và cô đặc nghiệm cho phương trình Choquard trong $\mathbb{R}^N$ có dạng

$$-\varepsilon^N \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) + V(x) |u|^{N-2} u = \varepsilon^{\mu-N} (I_\mu * F(u)) f(u), \quad (23)$$

trong đó $N \geq 3$, $\operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u)$ là toán tử N -Laplacian, ε là tham số dương, f có độ tăng mũ tới hạn.

Năm 2024, Eddine, Ragusa và Repovš [31] đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán biên Dirichlet chứa toán tử p -Laplace nhiều pha trên miền bị chặn. Họ đã thiết lập Nguyên lý cô đặc compact cho một dãy hội tụ yếu trong không gian Sobolev với số mũ hàm.

Xuất phát từ các nghiên cứu trên, chúng tôi thấy một số **vấn đề mở** cần được khám phá thêm như sau:

Vấn đề mở 1: Năm 2020, Chen-Li-Yang [22] nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình Choquard (10) chứa toán tử Laplace phân thứ và số mũ tới hạn $|v|^{2_s^*-2}v$. Ambrosio [6] nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình Choquard chứa toán tử p -Laplace phân thứ (9). Hơn nữa [9] và Zheng cùng các cộng sự [80] nghiên cứu sự nhiều nghiệm và sự cô đặc nghiệm cho

phương trình Choquard chứa toán tử (p, q) -Laplace phân thứ (8). Do đó một vấn đề tự nhiên là mở rộng kết quả của Chen-Li-Yang [22], Ambrosio [6] cho phương trình Choquard phân thứ nhiều pha với số mũ tới hạn.

Vấn đề mở 2: Thìn [70] nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kỳ dị (17) chứa toán tử p -Laplace phân thứ với độ tăng mũ, Yanjun và Chungeng [51] nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán kiểu Kirchhoff với kỳ dị (21) chứa toán tử p -Laplace với độ tăng mũ. Vấn đề tự nhiên là mở rộng kết quả của Thìn [70] cho phương trình kiểu Kirchhoff.

Trong luận này, xuất phát từ mặt khoa học và ứng dụng thực tế của các lớp toán tử không địa phương và phương trình đạo hàm riêng nhiều pha, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và cô đặc nghiệm của một số lớp phương trình elliptic chứa toán tử p -Laplace phân thứ. Chúng tôi hy vọng rằng sự kết hợp của các mô hình này sẽ mô tả được nhiều hệ thống vật lý, sinh học, hóa học hơn. Chúng tôi cố gắng giải quyết **Vấn đề mở 1 và 2**. Cụ thể, luận án nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các phương trình phân thứ sau:

1. Phương trình Choquard phân thứ nhiều pha

$$\sum_{i=1}^m ((-\Delta)_{p_i}^s u + \eta_1 |u|^{p_i-2} u) = \eta_2 \left[\frac{1}{|x|^\mu} * H_1(u) \right] h_1(u) + \eta_3 h_2(u),$$

trong đó hàm phi tuyến có độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser. Hơn nữa, chúng tôi cũng nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình Choquard phân thứ nhiều pha với độ tăng tới hạn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + \gamma_1 \sum_{i=1}^m |v|^{p_i-2} v \\ = \gamma_2 \lambda \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right] \mathfrak{f}(v) + (v^+)^{q_s^*-2} v^+. \quad (P_{\gamma_1, \gamma_2}) \end{aligned}$$

Sự tồn tại nghiệm của (P_{γ_1, γ_2}) làm cơ sở trong chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình tiếp theo sau đây.

2. Phương trình không ô-tô-nôm nhiều pha Choquard chứa toán tử phân

thứ

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + \sum_{i=1}^m V(\zeta x) |v|^{p_i-2} v \\ &= \lambda \left(\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v) \right) Q(\zeta x) f(v) + (v^+)^{q_s^*-2} v^+, v^+(x) = \max\{v(x), 0\}. \end{aligned}$$

3. Cuối cùng, chúng tôi xét phương trình Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha với kỳ dị trên $\mathbb{R}^N$ như sau:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^T M_i \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p_i} dx \right) \\ & \times (\mathcal{L}_{p_i}^s u(x) + V(x) |u|^{p_i-2} u) = \frac{f(x, u)}{|x|^\gamma}. \end{aligned}$$

Sự lựa chọn đề tài “**Sự tồn tại và cô đặc nghiệm của một số lớp phương trình elliptic chứa toán tử p-Laplace phân thứ**” của chúng tôi nhằm làm phong phú thêm các kết quả về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình đạo hàm riêng chứa toán tử p-Laplace phân thứ.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

Trong luận án này, mục đích của chúng tôi là chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và vấn đề cô đặc của nghiệm cho một số phương trình đạo hàm riêng phân thứ nhiều pha.

Đối tượng nghiên cứu của chúng tôi là phương trình phân thứ nhiều pha, không gian Sobolev phân thứ.

3. Tổng quan về luận án

a) *Đối với vấn đề nghiên cứu thứ nhất, chúng tôi đã:*

- Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình của các phương trình (1.18) và (1.36). Kết quả chính của chương này là Định lý 1.2.5 và Định lý 1.3.3. Để chứng minh các kết quả này, trước hết chúng tôi chứng minh rằng phiếm hàm năng lượng của bài toán tương ứng thỏa mãn điều kiện hình học của Định lý vượt núi. Từ đó suy ra tồn tại dãy (PS) với mức vượt núi được ước lượng. Tiếp theo sử dụng tiêu chuẩn compact kiểu Lions, chúng tôi chỉ ra rằng giới hạn yếu của dãy (PS) là nghiệm yếu không tầm thường của bài toán đã cho.

b) *Đối với vấn đề thứ hai:*

- Chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và sự cô đặc của nghiệm cho phương trình (2.1). Các kết quả chính của chương này là Định lý 2.2.4 và Định lý 2.2.5. Định lý 2.2.4 cho thấy sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán không ô-tô-nôm (2.1) khi ζ đủ nhỏ và cực đại toàn cục của nghiệm cô đặc quanh cực tiểu toàn cục của thế vị V và cực đại toàn cục của thế vị Q . Định lý 2.2.5 nói rằng dãy nghiệm của bài toán (2.1) sau phép đổi biến tịnh tiến sẽ hội tụ tới nghiệm của bài toán giới hạn. Trong [6], [9], [22] và [80] không có các kết quả kiểu này. Do đó kết quả này của chúng tôi là mới. Phương trình (2.1) chứa số mũ tới hạn và khuyết tính compact của phép nhúng trong không gian Sobolev phân thứ, điều này gây khó khăn cho chúng ta trong việc nghiên cứu tồn tại nghiệm yếu cũng như giới hạn của dãy nghiệm yếu. So sánh với kết quả của Chen-Li-Yang, Ambrosio, Định lý 2.2.4 khi $m = 1$, phương trình (2.1) của chúng tôi chứa hai thế vị V và Q , trong khi bài toán mà Chen-Li-Yang [22], Ambrosio [6] xét chỉ chứa một thế vị V . Do đó kết quả của chúng tôi là mới trong trường hợp $m = 1$. Hiện cũng chưa có các kết quả cho $m \geq 2$ của phương trình (2.1). Các kết quả của Ambrosio [9], Zheng cùng các cộng sự [80] nghiên cứu sự nhiều nghiệm và sự cô đặc nghiệm cho bài toán (8). Bài toán này không có số hạng tới hạn $|u|^{q_s^*-2}u$. Hơn nữa giả thiết của hàm thế vị V thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) , khác với giả thiết của V trong kết quả của chúng tôi, dẫn đến họ dùng phương pháp chặt cụt hàm phi tuyến để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm. Do đó kết quả của chúng tôi là độc lập với kết quả của họ.

c) Đối với vấn đề thứ 3:

- Đầu tiên, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu cho phương trình (3.1). Kết quả đầu tiên là Định lý 3.1.11. Với các điều kiện trên thế vị V , ta có phép nhúng compact từ không gian nghiệm W vào $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})$ là với mọi $q \geq \frac{N}{s}$. Từ đó ta chứng minh được tính compact của dãy (PS) và giới hạn yếu của nó là nghiệm của bài toán đã cho. Định lý 3.1.11 là mở rộng kết quả của Thầm [70]. Trong trường hợp hàm phi tuyến có độ tăng trên tới hạn, chúng tôi thu được Định lý 3.2.4 về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (3.20). Để chứng minh kết quả này, chúng tôi giới thiệu hàm cải biên, để đưa bài toán về trường hợp tới hạn. Tiếp theo, chúng tôi thiết

lập ước lượng L^∞ cho nghiệm và chứng minh nghiệm của bài toán cải tiến với hàm cải biên đề xuất (3.25) là nghiệm của bài toán (3.20). Các kết quả của chương này đang được công bố trong [75]. Theo hiểu biết của chúng tôi, hiện chưa có bất kỳ kết quả nào cho sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình p-Laplacian phân thứ với độ tăng mũ trên tối hạn. Do đó, kết quả của chúng tôi góp phần bổ sung, làm phong phú thêm vấn đề tồn tại nghiệm cho phương trình phân thứ nhiều pha với độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser.

4. Phương pháp và công cụ nghiên cứu

Luận án sử dụng phương pháp biến phân để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các phương trình đặt ra. Đây là phương pháp nghiên cứu hiệu quả đã được các nhà toán học trong và ngoài nước sử dụng để nghiên cứu tồn tại nghiệm yếu của các phương trình đạo hàm riêng.

Hơn nữa, luận án sử dụng các phương pháp nghiên cứu lý thuyết như phân tích, tổng hợp, phân loại và hệ thống hóa lý thuyết. Cụ thể, chúng tôi phân tích, tổng hợp các kết quả của các tác giả đã công bố theo hướng nghiên cứu của đề tài, từ đó phân loại ra các chủ đề mà các tác giả trong và ngoài nước đang quan tâm, nghiên cứu. Tiếp theo chúng tôi hệ thống hóa các chủ đề, kỹ thuật mà các tác giả đã sử dụng. Qua đó chúng tôi phát hiện ra các câu hỏi mở, các vấn đề cần cải tiến, các vấn đề mới làm vấn đề nghiên cứu trong luận án.

5. Cấu trúc luận án

Luận án bao gồm mở đầu, ba chương luận án, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: *Sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$* . Trong chương này, chúng tôi trình bày về tồn tại nghiệm yếu của phương trình của các phương trình (1.18) và (1.36). Kết quả chính của chương này là Định lý 1.2.5 và Định lý 1.3.3. Các kết quả của chương này được công bố trong [76] và [62, Định lý 5].

Chương 2: *Sự cô đặc của nghiệm cho phương trình Choquard phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với thế vị cạnh tranh*. Các kết quả chính của chương này là Định lý 2.2.4 và Định lý 2.2.5. Ngoài các kết quả chính, chúng tôi trình bày chi tiết các bổ đề dùng để chứng minh các kết quả chính. Các kết

quả của chương này được công bố trong [62].

Chương 3: *Sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ.* Các kết quả chính của chương này là Định lý 3.1.11 và Định lý 3.2.4. Các kết quả này được công bố trong [75].

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.
- Hội nghị quốc tế về Hình học và Đại số được phối hợp tổ chức giữa Trường Đại học Sư phạm- ĐHTN và Viện nghiên cứu cao cấp về Toán.

Chương 1

Sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Định nghĩa 1.1.1. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^N$ và $1 \leq p < \infty$. Ta định nghĩa không gian $L^p(\Omega)$ là không gian các hàm f đo được trên Ω thỏa mãn

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Định nghĩa 1.1.2. Cho $s \in (0, 1)$ và $1 \leq p < \infty$, không gian Sobolev phân thứ $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ được định nghĩa là tập hợp các hàm $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ sao cho:

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{1/p} < \infty.$$

Khi đó, ta định nghĩa:

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) \mid [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} < \infty\}.$$

Không gian này được trang bị chuẩn sau:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^p \right)^{1/p}.$$

Với $p = 2$, ta ký hiệu

$$H^s(\mathbb{R}^N) := W^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Với mỗi $\gamma > 0$, ta sử dụng một chuẩn khác trên $W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$ như sau

$$\|u\|_{\gamma, W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)} = \left(\gamma \|u\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + [u]_{W^{s,p_i}}^{p_i} \right)^{1/p_i}, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Ký hiệu $W = \cap_{i=1}^m W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$, khi đó W không gian Banach với hai chuẩn tương đương

$$\|u\|_W = \sum_{i=1}^m \|u\|_{W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}; \quad \|u\|_{\gamma, W} = \sum_{i=1}^m \|u\|_{\gamma, W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}.$$

Khi đó, ta có thể định nghĩa hằng số tối ưu $\mathcal{A}_{\nu, \gamma} > 0$ dạng

$$\mathcal{A}_{\nu, \gamma} = \inf_{u \neq 0, u \in W^{s, N/s}(\mathbb{R}^N)} \frac{\|u\|_{\gamma, W}}{\|u\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N)}},$$

với mọi $\nu \in [\frac{N}{s}, +\infty)$. Hơn nữa, bất đẳng thức sau đúng

$$\|u\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{A}_{\nu, \gamma}^{-1} \|u\|_{\gamma, W} \quad \text{với mọi } u \in W. \quad (1.1)$$

Định nghĩa 1.1.3. Cho $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, các số thực $s \in (0, 1)$, $p_i > 1$ với $i = 1, \dots, m$, toán tử p_i -Laplace phân thứ được định nghĩa (sai khác một hằng số chuẩn hóa) bởi:

$$(-\Delta)_{p_i}^s u(x) := 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p_i-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp_i}} dy,$$

trong đó $B_\varepsilon(x)$ là hình cầu bán kính ε tâm tại $x \in \mathbb{R}^N$.

Toán tử phân thứ nhiều pha được định nghĩa bởi $\sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s u(x)$.

Định nghĩa 1.1.4. Cho hai hàm $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, **tích chập** của f và g được định nghĩa là:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) g(y) dy.$$

Trong bài toán Choquard

$$(K * F)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x - y) F(y) dy,$$

nếu đặt $K(x) = \frac{1}{|x|^\mu}$ thì

$$(K * F)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(y)}{|x - y|^\mu} dy.$$

Định nghĩa 1.1.5. Cho hai không gian Banach X và Y và một ánh xạ $F : X \rightarrow Y$. Ta nói rằng F khả vi theo nghĩa Fréchet tại điểm $x_0 \in X$ nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $A : X \rightarrow Y$ sao cho:

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - A(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

Khi đó, A được gọi là **đạo hàm Fréchet** của F tại x_0 , và ký hiệu là $F'(x_0) = A$. Nếu F khả vi tại mọi $x \in X$ thì ta nói F khả vi trên X . Tập tất các các ánh xạ khả vi Fréchet từ X vào Y ký hiệu là $C^1(X, Y)$.

Định nghĩa 1.1.6. Cho phiếm hàm $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ trên không gian Banach X . **Đa tạp Nehari** được định nghĩa bởi

$$\mathcal{N} = \{ u \in X \setminus \{0\} : \langle J'(u), u \rangle = 0 \}.$$

Nói cách khác, nếu đặt $\phi_u(t) = J(tu)$ thì $u \in \mathcal{N} \iff \phi'_u(1) = 0$.

Điều kiện Palais-Smale. Giả sử W là không gian Banach và I là hàm trong $C^1(W, \mathbb{R})$. Khi đó I thỏa mãn *điều kiện compact Palais-Smale* tại mức $c \in \mathbb{R}$ nếu với mọi dãy $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ trong W sao cho $I(v_j) \rightarrow c$ và

$$\sup_{\|\phi\|_W=1} |\langle I'(v_j), \phi \rangle| \rightarrow 0,$$

khi đó tồn tại một dãy con sao cho dãy con đó hội tụ mạnh trong W .

Chú ý rằng dãy $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ trong W thỏa mãn $I(v_j) \rightarrow c$ và

$$\sup_{\|\phi\|_W=1} |\langle I'(v_j), \phi \rangle| \rightarrow 0,$$

được gọi là dãy (PS) mức $c \in \mathbb{R}$.

Định lý 1.1.7 (Định lý Vượt núi). [22] Cho X là không gian thực Banach và $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Khi đó giả sử:

1. Điều kiện hình học:

- (a) Tồn tại $\rho > 0$ và $\alpha > 0$ sao cho nếu $\|u\| = \rho$ thì $J(u) \geq \alpha$.
- (b) Tồn tại $e \in X$ với $\|e\| > \rho$ sao cho $J(e) < 0$.

- 2. **Điều kiện Palais-Smale:** Mọi dãy $(u_n) \subset X$ với $J(u_n) \rightarrow c$ và $J'(u_n) \rightarrow 0$, tồn tại một dãy con hội tụ trong X .

Khi đó, tồn tại $u \in X$ sao cho $J'(u) = 0$ và

$$J(u) = c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

trong đó $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. Giá trị c được gọi là **mức vượt núi**.

Định lý 1.1.8 (Bất đẳng thức Trudinger–Moser phân thứ). [70] Cho $s \in (0, 1)$ và $sp = N$. Khi đó, với mọi $0 \leq \alpha < \alpha_{s,N}^*$,

$$\sup_{\substack{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx < +\infty,$$

trong đó $\Phi_{N,s}(t) = e^t - \sum_{i=0}^{j_p-2} \frac{t^i}{i!}$; $j_p := \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$.

Hơn nữa, với $\alpha > \alpha_{s,N}^*$,

$$\sup_{\substack{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx = +\infty.$$

Bổ đề 1.1.9 (Bất đẳng thức Simon). [64]

$$|\xi - \eta|^p \leq \begin{cases} c_p ((|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta) \cdot (\xi - \eta)), & \text{ khi } p \geq 2, \\ C_p [(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta) \cdot (\xi - \eta)]^{p/2} (|\xi|^p + |\eta|^p)^{(2-p)/2}, & \text{ khi } 1 < p < 2, \end{cases}$$

với mọi $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, trong đó c_p và C_p là các hằng số dương chỉ phụ thuộc vào p .

Các bổ đề sau đây cung cấp những công cụ giải tích quan trọng liên quan đến tính compact của các dãy hàm, các bất đẳng thức nhúng Sobolev và các ước lượng tích phân không địa phương, đóng vai trò thiết yếu trong các chứng minh ở các phần tiếp theo.

Bổ đề 1.1.10. [6] Giả sử $N > ps$. Nếu $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |v_n|^p dx = 0$, trong đó $R > 0$, thì $v_n \rightarrow 0$ trong $L^t(\mathbb{R}^N)$ với mọi $t \in (p, p_s^*)$, $p_s^* = \frac{Np}{N-ps}$.

Bổ đề 1.1.11. [6] Cho $v \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ và $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sao cho $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ trong $B_1(0)$ và $\phi = 0$ trong $\mathbb{R}^N \setminus B_2(0)$. Đặt $\phi_r(x) = \phi(\frac{x}{r})$. Khi đó

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [v\phi_r - v]_{s,p} = 0 \text{ và } \lim_{r \rightarrow \infty} |v\phi_r - v|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Bổ đề 1.1.12. [6] Cho $w \in D^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ và $\{w_n\} \subset D^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ là một dãy bị chặn sao cho $w_n \rightarrow 0$ trong $\mathbb{R}^N$ và $[w_n]_{s,p} \leq C$ với mọi n , trong đó C hằng số dương. Khi đó ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |A_p(w_n + w) - A_p(w_n) - A_p(w)|^{p'} dx = 0,$$

trong đó $A_p(v) = \frac{|v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))}{|x - y|^{\frac{N+ps}{p'}}}$ với mỗi $v \in D^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ và $p' = \frac{p}{p-1}$ là số mũ liên hợp của p .

Bổ đề 1.1.13. [57] Cho $s \in (0, 1)$ và $p \in [1, \infty)$ sao cho $N > ps$. Khi đó tồn tại một hằng số tối ưu $\mathcal{S}_{p_s^*} > 0$ sao cho

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_s^*} dx \right)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq \mathcal{S}_{p_s^*}^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy$$

với mọi $u \in D^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Bổ đề 1.1.14. [43] Cho $r, t > 1$ và $0 < \mu < N$ sao cho $\frac{1}{r} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{t} = 2$. Cho $\mathfrak{f} \in L^r(\mathbb{R}^N)$ và $\mathfrak{h} \in L^t(\mathbb{R}^N)$. Khi đó tồn tại hằng số tối ưu $C(r, N, \mu, t) > 0$ không phụ thuộc vào $\mathfrak{f}$ và $\mathfrak{h}$ sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathfrak{f}(x)\mathfrak{h}(y)}{|x - y|^\mu} dx dy \leq C(r, N, \mu, t) \|\mathfrak{f}\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \|\mathfrak{h}\|_{L^t(\mathbb{R}^N)}.$$

Thông thường, ta cho $r = t$, khi đó ta có $\frac{2}{t} + \frac{\mu}{N} = 2$, hay $t = \frac{2N}{2N - \mu}$. Với $u \in W_\zeta$, đặt $\mathfrak{h}(u) = |u|^l$, ta thấy rằng $\int_{\mathbb{R}^N} [\frac{1}{|x|^\mu} * \mathfrak{h}(u)] \mathfrak{h}(u) dx$ hoàn toàn xác định trong không gian $L^t(\mathbb{R}^N)$ với $t = \frac{2N}{2N - \mu}$ nếu $q \leq lt \leq q_s^*$. Do đó, ta cần

$$\frac{(2N - \mu)q}{2N} \leq l \leq \frac{(2N - \mu)q_s^*}{2N}.$$

Trong bổ đề tiếp theo, ta ký hiệu $\mathbb{K}(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^\mu} * F(v) dx$ với mọi $v \in W$.

Bổ đề 1.1.15. *Giả sử hàm phi tuyến f thỏa mãn $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0$ và tồn tại $a_0 > 0$ sao cho với mọi $t \geq 0$ ta có*

$$|f(t)| \leq a(1 + |t|^{\tau-1}),$$

trong đó $q < \tau < \min\{\frac{q(N-s)}{N-qs}, \frac{q(N-\mu)}{N-qs}\}$. Khi đó, nếu $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong W thì tồn tại $C_0 > 0$ sao cho $|\mathbb{K}(v_n)| \leq C_0$.

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại $a > 0$ sao cho

$$|f(t)| \leq a(|t|^{q-1} + |t|^{\tau-1}) \quad (1.2)$$

với mọi $t \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$|F(t)| \leq a(|t|^q + |t|^\tau). \quad (1.3)$$

Khi đó tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} |\mathbb{K}(v_n)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(v_n)}{|x-z|^\mu} dz \right| \\ &\leq \left| \int_{|x-z| \leq 1} \frac{F(v_n)}{|x-z|^\mu} dz \right| + \left| \int_{|x-z| \geq 1} \frac{F(v_n)}{|x-z|^\mu} dz \right| \\ &\leq a \int_{|x-z| \leq 1} \frac{|v_n|^q + |v_n|^\tau}{|x-z|^\mu} dz + C, \end{aligned} \quad (1.4)$$

trong đó $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong không gian $L^q(\mathbb{R}^N)$ và $L^\tau(\mathbb{R}^N)$. Chọn t sao cho $1 < \frac{N}{N-\mu} < t < \frac{N}{N-qs}$ và $0 < \mu < qs$. Do đó ta có thể chọn t sao cho $N > \frac{\mu t}{t-1}$ ($t > \frac{N}{N-\mu}$) và $qt < q_s^*$. Vậy

$$\int_{|x-z| \leq 1} \frac{|v_n|^q}{|x-z|^\mu} dz \leq \left[\int_{|x-z| \leq 1} |v_n|^{qt} dz \right]^{1/t} \left[\int_{|x-z| \leq 1} \frac{1}{|x-z|^{\mu t/(t-1)}} dz \right]^{\frac{t-1}{t}} < +\infty. \quad (1.5)$$

Tương tự, ta chọn $s' > \frac{N}{N-\mu}$ (khi đó $N > \frac{\mu s'}{s'-1}$) và $s' \leq \frac{q_s^*}{\tau}$. Chú ý rằng nếu $\tau < \frac{q(N-\mu)}{N-qs}$, thì ta có thể chọn s' thỏa mãn điều kiện đó do

$$\begin{aligned}
\frac{q_s^*}{\tau} &> \frac{N}{N-\mu}. \text{ Như vậy} \\
&\int_{|x-z|\leq 1} \frac{|v_n|^\tau}{|x-z|^\mu} dz \\
&\leq \left[\int_{|x-z|\leq 1} |v_n|^{\tau s'} dx \right]^{1/s'} \left[\int_{|x-z|\leq 1} \frac{1}{|x-z|^{\mu s'/(s'-1)}} dz \right]^{\frac{s'-1}{s'}} < +\infty.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Từ (1.4)-(1.6), tồn tại $C_0 > 0$ sao cho $|\mathbb{K}(v_n)| \leq C_0$. $\square$

Bổ đề 1.1.16. [54] Giả sử hàm phi tuyến $\mathfrak{f}$ thỏa mãn $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{f}(t)}{t^{q-1}} = 0$ và tồn tại $a_0 > 0$ sao cho với mọi $t \geq 0$ ta có

$$|\mathfrak{f}(t)| \leq a(1 + |t|^{\tau-1}),$$

trong đó $q < \tau < \min\{\frac{q(N-s)}{N-qs}, \frac{q(N-\mu)}{N-qs}\}$. Q là hàm bị chặn trong $\mathbb{R}^N$.

Khi đó, nếu $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong W thì tồn tại $C_1 > 0$ sao cho $|K_\zeta(v_n)| \leq C_1$, trong đó $K_\zeta(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v) dy$.

(Xem lập luận tương tự trong [[54], Chương 2])

Ta ký hiệu $\mathcal{K}(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{K}(v)(x) F(v(x)) dx$. Khi đó ta có kết quả sau:

Bổ đề 1.1.17. Cho $\{v_n\}$ là dãy trong W sao cho v_n hội tụ yếu đến v . Đặt $\mathbf{u}_n = v_n - v$, khi đó

(i). $\mathcal{K}(v_n) - \mathcal{K}(\mathbf{u}_n) - \mathcal{K}(v) = o_n(1)$ khi $n \rightarrow \infty$.

(ii). $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{K}'(v_n) - \mathcal{K}'(\mathbf{u}_n) - \mathcal{K}'(v), \phi \rangle = 0$ với mọi $\phi \in W$.

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh khẳng định (ii) bằng cách sử dụng Định lý hội tụ Vitali. Lưu ý rằng

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{K}'(\mathbf{u}_n), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(\mathbf{u}_n) \right] \mathfrak{f}(\mathbf{u}_n) \phi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(\mathbf{u}_n(y)) \mathfrak{f}(\mathbf{u}_n(x)) \phi(x)}{|x-y|^\mu} dx dy.
\end{aligned}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n) \right] \mathfrak{f}(v_n(x)) \phi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right] \mathfrak{f}(v(x)) \phi(x) dx \tag{1.7}$$

và

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(\mathbf{u}_n) \right] \mathbf{f}(\mathbf{u}_n(x)) \phi(x) dx \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

khi $n \rightarrow \infty$. Từ Bổ đề 1.1.16, ta có

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n) \right] (\mathbf{f}(v_n) - \mathbf{f}(v)) \phi(x) dx \right| &\leq C_0 \int_{\mathbb{R}^N} |(\mathbf{f}(v_n) - \mathbf{f}(v)) \phi(x)| dx \\ &= C_0 \left(\int_{B_R(0)} |(\mathbf{f}(v_n) - \mathbf{f}(v)) \phi(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |(\mathbf{f}(v_n) - \mathbf{f}(v)) \phi(x)| dx \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Theo Hệ quả 7.2 [57], phép nhúng $W \hookrightarrow L^t(B_R(0))$, $t \in [1, q_s^*)$ là compact. Do đó, sau khi chọn một dãy con nếu cần thiết ta có $v_n \rightarrow v$ trong $L^t(B_R(0))$ với mọi $t \in [1, q_s^*)$. Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta suy ra

$$\int_{B_R(0)} |\mathbf{f}(v_n) \phi| dx \leq \left(\int_{B_R(0)} |\mathbf{f}(v_n)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{B_R(0)} |\phi|^q dx \right)^{1/q}. \quad (1.10)$$

Theo giả thiết, tồn tại một hằng số $C_* > 0$ sao cho

$$|\mathbf{f}(v_n)|^{\frac{q}{q-1}} \leq C_* \left(|v_n|^q + |v_n|^{\frac{q(\tau-1)}{q-1}} \right). \quad (1.11)$$

Lưu ý rằng $\tau < \min\left\{ \frac{q(N-s)}{N-qs}, \frac{q(N-\mu)}{N-qs} \right\} \leq \frac{q(N-s)}{N-qs}$, suy ra

$$q < \frac{q(\tau-1)}{q-1} < q_s^*.$$

Vì phép nhúng từ W vào $L^t(B_R(0))$ là compact với mọi $1 \leq t < q_s^*$, nên $|\mathbf{f}(v_n)|^{\frac{q}{q-1}} \in L^1(B_R(0))$. Do đó tồn tại $C^* > 0$ sao cho $\int_{B_R(0)} |\mathbf{f}(v_n) \phi| dx \leq$

$C^* < +\infty$. Tương tự, ta có $\int_{B_R(0)} |\mathbf{f}(v) \phi| dx \leq C^* < +\infty$. Ta có thể chọn

$C^* > 0$ đủ lớn để cả hai bất đẳng thức đều đúng. Từ đó với mọi $x \in B_R(0)$ ngoài một tập có độ đo bằng 0, $|(\mathbf{f}(v_n) - \mathbf{f}(v)) \phi(x)| \leq \kappa_*$ với $\kappa_* > 0$. Với mỗi $\varepsilon_* > 0$, tồn tại $\delta = \varepsilon_*/\kappa_*$ sao cho với mọi tập $E_* \subset B_R(0)$ thỏa mãn $|E_*| \leq \delta$, ta có

$$\int_{E_*} |(\mathbf{f}(v_n) - \mathbf{f}(v)) \phi(x)| dx \leq |E_*| \kappa_* = \varepsilon_*.$$

Khi đó $\{(\mathfrak{f}(v_n) - \mathfrak{f}(v))\phi(x)\}_n$ là đồng khả tích trên $B_R(0)$. Đồng thời, $(\mathfrak{f}(v_n) - \mathfrak{f}(v))\phi(x) \rightarrow 0$ trong $B_R(0)$. Áp dụng Định lý hội tụ Vitali, ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} |(\mathfrak{f}(v_n) - \mathfrak{f}(v))\phi(x)| dx \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |(\mathfrak{f}(v_n) - \mathfrak{f}(v))\phi(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} (|\mathfrak{f}(v_n)| + |\mathfrak{f}(v)|) |\phi(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\mathfrak{f}(v_n)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\phi|^q dx \right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\mathfrak{f}(v)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\phi|^q dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Từ (1.11) và $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong $L^t(\mathbb{R}^N)$ (do phép nhúng liên tục từ W vào $L^t(\mathbb{R}^N)$ với mọi $t \in [q, q_s^*]$), ta chọn $R \gg 0$ sao cho $\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\phi|^q dx \leq \varepsilon_*^q$, ta có

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |(\mathfrak{f}(v_n) - \mathfrak{f}(v))\phi(x)| dx \rightarrow 0 \quad (1.13)$$

khi $n \rightarrow \infty$. Kết hợp (1.9), (1.12) và (1.13), ta thu được

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n) \right] (\mathfrak{f}(v_n) - \mathfrak{f}(v)) \phi(x) dx \rightarrow 0 \quad (1.14)$$

khi $n \rightarrow \infty$. Theo lập luận như trên, ta cũng có

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (F(v_n) - F(v)) \right] \mathfrak{f}(u) \phi(x) dx \rightarrow 0 \quad (1.15)$$

khi $n \rightarrow \infty$. Tương tự, ta chứng minh được rằng (1.10) là đúng với $\mathbf{u}_n$. Từ đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(\mathbf{u}_n) \right] \mathfrak{f}(\mathbf{u}_n) \phi(x) dx \rightarrow 0 \quad (1.16)$$

với mọi $\phi \in W$. Lưu ý rằng

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n) \right] \mathfrak{f}(v_n(x)) \phi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right] \mathfrak{f}(v(x)) \phi(x) dx \right| \\
& \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n) \right] (\mathfrak{f}(v_n) - \mathfrak{f}(v)) \phi(x) dx \right| \\
& + \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (F(v_n) - F(v)) \right] \mathfrak{f}(v(x)) \phi(x) dx \right| \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{1.17}$$

khi $n \rightarrow \infty$. Kết hợp (1.16) và (1.17), ta thu được khẳng định (ii). Khẳng định (i) được chứng minh tương tự như Bổ đề 2.5 trong [6]. $\square$

Ký hiệu $\mathcal{K}_\zeta(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} K_\zeta(v)(x) Q(\zeta x) F(v(x)) dx$. Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v_n) \right] Q(\zeta x) \mathfrak{f}(v_n(x)) \phi(x) dx \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v) \right] Q(\zeta x) \mathfrak{f}(v(x)) \phi(x) dx \right| \\
& \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v_n) \right] Q(\zeta x) (\mathfrak{f}(v_n) - \mathfrak{f}(v)) \phi(x) dx \right| \\
& \quad + \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) (F(v_n) - F(v)) \right] Q(\zeta x) \mathfrak{f}(v(x)) \phi(x) dx \right| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

khi $n \rightarrow \infty$, từ đó ta thu được kết quả sau:

Bổ đề 1.1.18. *Giả sử $\{v_n\}$ là một dãy trong W sao cho $v_n \rightarrow v$ yếu. Đặt*

$\mathbf{u}_n = v_n - v$, *ta có*

(i). $\mathcal{K}_\zeta(v_n) - \mathcal{K}_\zeta(\mathbf{u}_n) - \mathcal{K}_\zeta(v) = o_n(1)$ *khi $n \rightarrow \infty$.*

(ii). $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{K}'_\zeta(v_n) - \mathcal{K}'_\zeta(\mathbf{u}_n) - \mathcal{K}'_\zeta(v), \phi \rangle = 0$ *với mọi $\phi \in W$.*

Theo Bổ đề 2.1 [6], ta thu được kết quả như sau:

Bổ đề 1.1.19. *Nếu $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong W và*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |v_n(x)|^t dx = 0$$

với $R > 0, t \in [q, q_s^)$, khi đó dãy v_n hội tụ mạnh tới 0 trong $L^l(\mathbb{R}^N)$ với $l \in (t, q_s^*)$.*

1.2 Sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình

$$\sum_{i=1}^m ((-\Delta)_{p_i}^s u + \eta_1 |u|^{p_i-2} u) = \eta_2 \left[\frac{1}{|x|^\mu} * H_1(u) \right] h_1(u) + \eta_3 h_2(u), \quad (1.18)$$

Trong phương trình (1.18), $H_j(t) = \int_0^t h_j(t)$, $j = 1, 2$, $2 \leq p_1 = p < \dots < p_m < +\infty$, $0 < s < 1$, $N = ps$, $0 < \mu < N$, $\eta_1, \eta_2 > 0$ và $\eta_3 > 0$ là hằng số. Ta ký hiệu $\mathfrak{D} := \{\mathfrak{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ là hàm số liên tục}\}$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

($\mathfrak{h}_1$) Hàm phi tuyến tính $\mathfrak{h}$ là liên tục và $\mathfrak{h}(t) = 0$ trên $(-\infty, 0]$. Với mỗi $q_1 \geq p_m$, $q_2 \geq 1$, và các số thực dương $a_1 > 0, a_2 > 0$ sao cho

$$\mathfrak{h}(t) \leq a_1 |t|^{q_1-1} + a_2 \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)}) |t|^{q_2-1}$$

trong đó $\Phi_{N,s_1}(y) = e^y - \sum_{j=0}^{j_p-2} \frac{y^j}{j!}$, $j_p = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$ và $\alpha_* < \alpha_{s,N}^*$, trong đó $\alpha_{s,N}^* = N \left(\frac{2(Nw_N)^2 \Gamma(p+1)}{N!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+k-1)!}{k!} \frac{1}{(N+2k)^p} \right)^{\frac{s}{N-s}}$ (xem [83]).

($\mathfrak{h}_2$) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathfrak{h}(t)}{t^{p_m-1}} = 0$.

($\mathfrak{h}_3$) Tồn tại $\theta > p_m$ sao cho $2\mathfrak{h}(t)t \geq \mathfrak{h}(t)t \geq \theta H(t) > 0$ với mọi $t > 0$, trong đó $H(t) = \int_0^t \mathfrak{h}(\tau) d\tau$.

($\mathfrak{h}_4$) Tồn tại $\gamma_1 > 0$ đủ lớn sao cho $H(t) \geq \gamma_1 |t|^\theta$ trên $[0, \infty)$, trong đó $\theta > p_m$ là một hằng số được nhắc đến trong điều kiện ($\mathfrak{h}_3$).

Sau đây là một ví dụ cho hàm $\mathfrak{h}$. Ta kiểm tra hàm

$$\mathfrak{h}(t) = C(t^+)^{q-1} + (t^+)^{q_2-1} \Phi_{N,s}(\alpha_0 (t^+)^{N/(N-s)}),$$

$t^+ = \max\{t, 0\}$, $t \in \mathbb{R}$, $q = \theta > p_m$, $q_2 \geq \theta$, $C \geq \theta \gamma_1$ đủ lớn và $\alpha_0 < \alpha_{s,N}^*$, thỏa mãn các điều kiện ($\mathfrak{h}_1$) $\rightarrow$ ($\mathfrak{h}_4$). Với $t \leq 0$, $\mathfrak{h}(t) = 0$, điều này hiển nhiên thỏa mãn phần đầu của ($\mathfrak{h}_1$). Ta xét với $t > 0$. Hiển nhiên $\mathfrak{h}$ liên tục và $\mathfrak{h}$ thỏa mãn điều kiện ($\mathfrak{h}_1$) với $q_1 = q$, $a_1 = C$, và $a_2 = 1$. Điều kiện

$\alpha_0 < \alpha_{s,N}^*$ đã được giả thiết. Tiếp theo ta kiểm tra điều kiện $(\mathfrak{h}_2)$. Rõ ràng $\mathfrak{h}$ thỏa mãn điều kiện $(\mathfrak{h}_2)$. Trước hết ta tính $H(t)$ và $\mathfrak{h}(t)t$. Sử dụng khai triển chuỗi của hàm $\Phi_{N,s}(y) = \sum_{j=j_p-1}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$, ta viết lại $\mathfrak{h}(t)$ với $t > 0$ như sau:

$$\mathfrak{h}(t) = Ct^{q-1} + \sum_{j=j_p-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^j}{j!} t^{\frac{Nj}{N-s}+q_2-1}.$$

Do đó

$$H(t) = \int_0^t \left(C\tau^{q-1} + \sum_{j=j_p-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^j}{j!} \tau^{\frac{Nj}{N-s}+q_2-1} \right) d\tau$$

và

$$H(t) = \frac{C}{q} t^q + \sum_{j=j_p-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{t^{\frac{Nj}{N-s}+q_2}}{\frac{Nj}{N-s} + q_2}.$$

Ta có

$$\mathfrak{h}(t)t = Ct^q + \sum_{j=j_p-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^j}{j!} t^{\frac{Nj}{N-s}+q_2}.$$

Để kiểm tra điều kiện $(\mathfrak{h}_3)$, ta cần chứng minh $G(t) = \mathfrak{h}(t)t - \theta H(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Dễ thấy, bất đẳng thức đúng khi $t \leq 0$. Trong trường hợp $t > 0$, ta có

$$G(t) = \left(Ct^q - \theta \frac{C}{q} t^q \right) + \sum_{j=j_p-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^j}{j!} \left(t^{\frac{Nj}{N-s}+q_2} - \frac{\theta}{\frac{Nj}{N-s} + q_2} t^{\frac{Nj}{N-s}+q_2} \right)$$

Vì $q = \theta$ nên

$$G(t) = 0 + \sum_{j=j_p-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^j}{j!} t^{\frac{Nj}{N-s}+q_2} \left(1 - \frac{\theta}{\frac{Nj}{N-s} + q_2} \right)$$

Lại có $q_2 \geq \theta$ nên $1 - \frac{\theta}{\frac{Nj}{N-s}+q_2} \geq 0$. Do đó $G(t) \geq 0$ với mọi $t > 0$, hay điều kiện $(\mathfrak{h}_3)$ được thỏa mãn. Hiển nhiên điều kiện $(\mathfrak{h}_4)$ thỏa mãn vì $C \geq \theta\gamma_1$.

Nghiệm yếu của phương trình (1.18) được định nghĩa như sau

Định nghĩa 1.2.1. Một hàm số $u \in W$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình (1.18) nếu với mọi hàm thử $\varphi \in W$, ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p_i-2} (u(x) - u(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+sp_i}} dx dy \\
& + \sum_{i=1}^m \eta_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i-2} u \varphi dx \\
& = \eta_2^2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H_1(u(y))}{|x - y|^\mu} h_1(u(x)) \varphi(x) dx dy + \eta_3 \int_{\mathbb{R}^N} h_2(u(x)) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Ta giả sử hai hàm phi tuyến tính h_1 và h_2 thuộc $\mathfrak{D}$.

Hàm năng lượng $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} : W \rightarrow \mathbb{R}$ của phương trình (1.18) có dạng

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u) \\
& = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \|u\|_{\eta_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \frac{\eta_2^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H_1(u(y)) H_1(u(x))}{|x - y|^\mu} dx dy - \eta_3 \int_{\mathbb{R}^N} H_2(u) dx \\
& = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \|u\|_{\eta_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \frac{\eta_2^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{G}(u)(x) H_1(u(x)) dx - \eta_3 \int_{\mathbb{R}^N} H_2(u) dx,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

với $\mathcal{G}(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H_1(u(y))}{|x - y|^\mu} dy$. Khi đó, theo Định nghĩa 1.2.1, ta thấy rằng nghiệm yếu của phương trình (1.18) là một điểm tới hạn của hàm năng lượng $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ trong W .

Áp dụng Bổ đề 1.1.14, nếu ta chọn $H(u) = |u|^q$, thì $\int_{\mathbb{R}^N} [\frac{1}{|x|^\mu} * H(u)] H(u) dx$ hoàn toàn được xác định trên $L^t(\mathbb{R}^N)$ với $t = \frac{2N}{2N-\mu}$. Nhờ vào phép nhúng liên tục $W^{s, N/s}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, với mọi $r \in [\frac{N}{s}, +\infty)$, và $qt \geq \frac{N}{s}$, khi đó ta có $q \geq \frac{N}{st} = \frac{2N-\mu}{2s}$. Sử dụng bất đẳng thức Trudinger-Moser phân thứ [83] và $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ là một tập con trù mật trong $W^{s, p}(\mathbb{R}^N)$, ta thấy rằng $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ hoàn toàn được xác định trên $W \subset W^{s, N/s}(\mathbb{R}^N)$.

Trong bổ đề sau, ta chứng minh rằng phiếm hàm $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ thỏa mãn các điều kiện hình học cần thiết để áp dụng định lý Mountain Pass.

Bổ đề 1.2.2. *Hàm số $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ thỏa mãn các điều kiện hình học sau:*

- (a) *Tồn tại $\zeta_*, \rho_0 > 0$ thỏa mãn $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u) \geq \rho_0$ với $\|u\|_{\eta_1, W} = \zeta_*$.*
- (b) *Tồn tại một hàm $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ với $\|v\|_{\eta_1, W} > \zeta_*$, sao cho $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(v) < 0$.*

Chứng minh. (a) Từ $(\mathfrak{h}_1)$, tồn tại $b_1 > 0, b_2 > 0$ sao cho

$$h_j(t) \leq b_1 |t|^{q_1-1} + b_2 \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)}) |t|^{q_2-1},$$

với mỗi $q_1 \geq p_m > \frac{N}{s} > \frac{2N-\mu}{2s}, q_2 > p_m$. Từ đó, ta thu được

$$|H_j(t)| \leq b_1 |t|^{q_1} + b_2 |t|^{q_2} \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)})$$

với mọi $t \in \mathbb{R}, j = 1, 2$. Áp dụng Bổ đề 1.1.14 và lập luận tương tự [44, Bổ đề 3], với $t > 1$, tồn tại hai hằng số dương $\mathcal{D}$ và D_1 sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{G}(u)(x) H_1(u(x)) dx \leq D_1 \|u\|_{L^{\frac{2Nq_1}{2N-\mu}}(\mathbb{R}^N)}^{2q_1} + \mathcal{D} \|u\|_{L^{\frac{2Nq_2}{2N-\mu}}(\mathbb{R}^N)}^{2q_2}$$

với $\|u\|_{\eta_1, W}$ đủ nhỏ. Tương tự, với mọi $\zeta > 0$, tồn tại $C(\zeta) > 0$ sao cho

$$h_2(t) \leq \zeta |t|^{p_m-1} + C(\zeta) \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)}) |t|^{q_2-1} \quad (1.20)$$

với $q_2 > p_m$. Từ đó, sử dụng bất đẳng thức Trudinger-Moser cho $\|u\|_{\eta_1, W}$ đủ nhỏ, tồn tại $D(\zeta) > 0$ sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^N} H_2(u) \leq \zeta \|u\|_{L^{p_m}(\mathbb{R}^N)}^{p_m} + D(\zeta) \|u\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^N)}^{q_2}. \quad (1.21)$$

Kết hợp (1.20) và (1.21), khi $\|u\|_{\eta_1, W}$ đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u) &\geq \frac{m^{1-p_m}}{p_m} \|u\|_{\eta_1, W}^{p_m} - \frac{\eta_2^2}{2} \left(D_1 \mathcal{A}_{\frac{2Nq_1}{2N-\mu}, \eta_1}^{-2q_1} \|u\|_{\eta_1, W}^{2q_1} + \mathcal{D} \mathcal{A}_{\frac{2Nq_2}{2N-\mu}, \eta_1}^{-2q_2} \|u\|_{\eta_1, W}^{2q_2} \right) \\ &\quad - \eta_3 (\zeta \mathcal{A}_{p_m, \eta_1}^{-p_m} \|u\|_{\eta_1, W}^{p_m} - D(\zeta) \mathcal{A}_{q_2, \eta_1}^{-q_2} \|u\|_{\eta_1, q_2}^{q_2}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Khi đó nếu ta chọn $\zeta > 0$ đủ nhỏ sao cho $\frac{m^{1-p_m}}{p_m} - \eta_3 \zeta \mathcal{A}_{p_m, \eta_1}^{-p_m} > 0$, xét hàm số

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) &= \left(\frac{m^{1-p_m}}{p_m} - \eta_3 \zeta \mathcal{A}_{p_m, \eta_1}^{-p_m} \right) t^{p_m} - \frac{\eta_2^2}{2} \left(D_1 \mathcal{A}_{\frac{2Nq_1}{2N-\mu}, \eta_1}^{-2q_1} t^{2q_1} + \mathcal{D} \mathcal{A}_{\frac{2Nq_2}{2N-\mu}, \eta_1}^{-2q_2} t^{2q_2} \right) \\ &\quad - \eta_3 D(\zeta) \mathcal{A}_{q_2, \eta_1}^{-q_2} t^{q_2}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

và bằng cách tính toán tương tự như trong [44, Bổ đề 3], tồn tại $\zeta_*, \rho_0 > 0$ sao cho $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u) \geq \rho_0$ với $\|u\|_{\eta_1, W} = \zeta_*$.

(b) Chọn $u_0 \in W \setminus \{0\}$ sao cho $u_0 \geq 0$ trong $\mathbb{R}^N$. Từ điều kiện $(\mathfrak{h}_4)$, ta có

$$\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(tu_0) \leq \sum_{i=1}^m \frac{t^{p_i}}{p_i} \|u_0\|_{\eta_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \eta_3 t^\theta \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^\theta dx \rightarrow -\infty$$

khi $t \rightarrow \infty$. Đặt $e = tu_0$ với t đủ lớn, ta có $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(e) < 0$. $\square$

Với hàm $\phi \in W$ tùy ý, ta có

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{J}'_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u), \phi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\eta_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i-2} u \phi dx \right. \\ & \quad \left. + \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p_i-2} (u(x) - u(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right) \\ & \quad - \eta_2^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left(\frac{1}{|x|^\mu} * H_1(u) \right) H'_1(u) \phi \right) dx - \eta_3 \int_{\mathbb{R}^N} H'_2(u) \phi dx. \end{aligned}$$

Từ Bổ đề 1.2.2 và Định lý Vượt núi không có điều kiện Palais-Smale, ta thu được một dãy $\{u_n\} \subset W$ sao cho $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n) \rightarrow c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ và $\mathcal{J}'_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, trong đó $c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ được cho bởi

$$c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(\gamma(t))$$

và $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], W) : \gamma(0) = 0, \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(\gamma(1)) < 0\}$.

Kết quả tiếp theo cho phép kiểm soát mức năng lượng của phiếm hàm năng lượng theo các dãy Palais-Smale.

Bổ đề 1.2.3. *Giả sử $\{u_n\}$ là một dãy $(PS)_{c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}}$ cho $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$. Khi đó tồn tại một hằng số $\mathcal{C}_{\gamma_1}$ thỏa mãn $\zeta_* \leq c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} \leq \mathcal{C}_{\gamma_1}$, trong đó*

$$\mathcal{C}_{\gamma_1} = \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) \left(1 - \frac{N}{\theta s} \right) \left(\frac{N \sum_{j=1}^m a_j}{\theta s b} \right)^{N/(\theta s - N)} \quad (1.23)$$

với $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ và $a, b > 0$.

Chứng minh. Chọn $\varphi \in W \setminus \{0\}$ sao cho $\varphi \geq 0$ trong $\mathbb{R}^N$. Khi đó ta có

$$\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(t\varphi) \leq \sum_{i=1}^m \frac{t^{p_i}}{p_i} \|\varphi\|_{\eta_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \gamma_1 \eta_3 t^\theta \|\varphi\|_{L^\theta(\mathbb{R}^N)}^\theta \quad (1.24)$$

Kí hiệu $a_j = \frac{\|\varphi\|_{\eta_1, W^{s, p_j}(\mathbb{R}^N)}^{p_j}}{p_j}$, $j = 1, \dots, m$, $b = \gamma_1 \eta_3 \|\varphi\|_{L^\theta(\mathbb{R}^N)}^\theta$, và $g(t) = \sum_{j=1}^m a_j t^{p_j} - b t^\theta$ trên $[0, +\infty)$. Khi đó

$$c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} \leq \max_{t \in [0, 1]} g(t) + \max_{t \geq 1} g(t). \quad (1.25)$$

Nếu $t \in [0, 1]$, ta nhận được $g(t) \leq h(t) = \sum_{j=1}^m a_j t^{N/s} - bt^\theta$. Ta chọn $\gamma_1 \geq \frac{N \sum_{j=1}^m a_j}{\theta s \eta_3 \|\varphi\|_{L^\theta(\mathbb{R}^N)}^\theta} := \gamma_*$, khi đó ta có

$$\max_{t \in [0, 1]} g(t) \leq h(\theta_{\gamma_1}) = C_{\gamma_1}, \quad (1.26)$$

trong đó $\theta_{\gamma_1} = \left(\frac{N \sum_{j=1}^m a_j}{\theta s b} \right)^{s/(\theta s - N)} \leq 1$. Tính toán đơn giản ta thu được

$$C_{\gamma_1} = h(\theta_{\gamma_1}) = \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) \left(1 - \frac{N}{\theta s} \right) \left(\frac{N \sum_{j=1}^m a_j}{\theta s b} \right)^{N/(\theta s - N)}. \quad (1.27)$$

Từ $\lim_{\gamma_1 \rightarrow +\infty} \theta_{\gamma_1} = 0$, ta có $\lim_{\gamma_1 \rightarrow +\infty} h(\theta_{\gamma_1}) = 0$. Dễ thấy với mọi $t \geq 1$, $g(t) \leq h_*(t) = \sum_{j=1}^m a_j t^{p_m} - bt^\theta$ và h_* đạt điểm cực đại địa phương duy nhất

tại $\beta_{\gamma_1} = \left(\frac{p_m \sum_{j=1}^m a_j}{\theta b} \right)^{1/(\theta - p_m)}$ trên $(0, +\infty)$. Nếu chọn $\gamma_1 \geq \gamma_{**}$, trong đó

$\gamma_{**} = \frac{p_m \sum_{j=1}^m a_j}{\theta \eta_3 \|\varphi\|_{L^\theta(\mathbb{R}^N)}^\theta}$, khi đó $\beta_{\gamma_1} \leq 1$. Vậy $\max_{t \geq 1} g(t) \leq h_*(1) = \sum_{j=1}^m a_j - b$.

Đặt $\gamma_{***} = \frac{\sum_{j=1}^m a_j}{\eta_3 \|\varphi\|_{L^\theta(\mathbb{R}^N)}^\theta} > \gamma_{**} > \gamma_*$. Ta thu được

$$\max_{t \geq 1} g(t) \leq 0 \text{ với mọi } \gamma_1 \geq \gamma_{***}. \quad (1.28)$$

Kết hợp các Bổ đề 1.2.2, (1.25), (1.26), (1.27) và (1.28), ta có

$$\zeta_* \leq c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} \leq C_{\gamma_1} = \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) \left(1 - \frac{N}{\theta s} \right) \left(\frac{N \sum_{j=1}^m a_j}{\theta s b} \right)^{N/(\theta s - N)} \quad (1.29)$$

với mọi $\gamma_1 \geq \gamma_{***}$. Dễ thấy, $c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ là đủ nhỏ khi γ_1 đủ lớn. $\square$

Bổ đề sau đây được suy ra từ kết quả của Lion:

Bổ đề 1.2.4. [54] Nếu $\{u_n\}$ là một dãy bị chặn trong $W^{s, N/s}(\mathbb{R}^N)$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n(x)|^{N/s} dx = 0$$

với $R > 0$, khi đó $u_n \rightarrow 0$ trong $L^q(\mathbb{R}^N)$ với mọi $q \in (\frac{N}{s}, +\infty)$.

Kết quả đầu tiên của chúng tôi được phát biểu như sau:

Định lý 1.2.5. *Giả sử $(h_1) - (h_4)$ được thỏa mãn, khi đó phương trình (1.18) có nghiệm yếu không tầm thường, không âm trong W .*

Chứng minh. Từ Bổ đề 1.2.2, tồn tại một dãy $(PS)_{c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}}$ cho hàm $\{u_n\}$ $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ trong W , có nghĩa là $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n) \rightarrow c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ và $\mathcal{J}'_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Hơn nữa $c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(\gamma(t))$ và

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], W) : \gamma(0) = 0, \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(\gamma(1)) < 0\}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} + o_n(1) &= \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n) = \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n) - \frac{1}{\theta} < \mathcal{J}'_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n), u_n > \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|_{\eta_1, W^{s, p_j}(\mathbb{R}^N)}^{p_j} - \frac{\eta_2^2}{2\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * H_1(u) \right] (\theta H_1(u(x)) - 2h_1(u)u) dx \\ &\quad - \frac{\eta_3}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} (\theta H_2(u) - h_2(u)u) dx \geq \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|_{\eta_1, W^{s, p_1}(\mathbb{R}^N)}^{p_1}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Từ đó suy ra tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$,

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|_{\eta_1, W^{s, p}(\mathbb{R}^N)}^p \leq c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} + \xi, p_1 = p, \xi > 0; \quad (1.31)$$

$$\|u_n\|_{\eta_1, W^{s, p}(\mathbb{R}^N)}^{N/(N-s)} \leq \left(\frac{c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} + \xi}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{\theta}} \right)^{N/(N-s)} \leq \left(\frac{C_{\gamma_1} + \xi}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{\theta}} \right)^{N/(N-s)} < \frac{\alpha_*}{\mathfrak{l}\alpha_0} \sigma^{s/(N-s)} \quad (1.32)$$

với $\mathfrak{l} > 1$, và gần 1, γ_1 đủ lớn. Sử dụng bất đẳng thức Trudinger-Moser phân thứ [83] và

$$(\max\{1, \eta_1\})^{-1/p} \|u\|_{\eta_1, W^{s, p}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{W^{s, p}(\mathbb{R}^N)} \leq (\min\{1, \eta_1\})^{-1/p} \|u\|_{\eta_1, W^{s, p}(\mathbb{R}^N)},$$

ta suy ra

$$\sup_{u \in W^{s, p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{\eta_1, W^{s, p}(\mathbb{R}^N)} \leq (\min\{1, \eta_1\})^{s/N}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N, s}(\alpha \mathfrak{l} |u|^{N/(N-s)}) dx < +\infty \quad (1.33)$$

với mọi $0 \leq \alpha < \alpha_* \leq \alpha_{s,N}^*$. Bằng cách lập luận như Bổ đề 3.3 [72], ta có $\mathcal{J}'_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u) = 0$. Trường hợp $u \not\equiv 0$, u là một nghiệm yếu của phương trình (1.18). Trường hợp $u \equiv 0$, ta sẽ đi tìm một nghiệm không tầm thường. Giả sử

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n(x)|^p dx = 0, \quad (1.34)$$

khi đó theo Bổ đề 1.2.4, ta thu được $u_n \rightarrow 0$ trong $L^q(\mathbb{R}^N)$ với mọi $q > p = \frac{N}{s}$. Từ (1.34), (1.32) và các lập luận tương tự trong [54], cùng với bất đẳng thức Trudinger-Moser, ta thu được

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * H_1(u_n) \right] h_1(u_n) u_n dx \rightarrow 0 \quad \text{và} \quad \int_{\mathbb{R}^N} h_2(u_n) u_n dx \rightarrow 0 \quad \text{khi } n \rightarrow \infty.$$

Vậy

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle \mathcal{J}'_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n), u_n \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \|u_n\|_{\eta_1, W^{s, p_j}(\mathbb{R}^N)}^{p_j} - \eta_2^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * H_1(u_n) \right] h_1(u_n) u_n dx \\ &\quad - \eta_3 \int_{\mathbb{R}^N} h_2(u_n) u_n dx + o_n(1) = \sum_{j=1}^m \|u_n\|_{\eta_1, W^{s, p_j}(\mathbb{R}^N)}^{p_j} + o_n(1) \quad \text{khi } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do đó $u_n \rightarrow 0$ trong W . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} \|u_n\|_{\eta_1, W^{s, p_j}(\mathbb{R}^N)}^{p_j} - \frac{\eta_2^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * H(u_n) \right] H(u_n) dx \\ &\quad - \eta_3 \int_{\mathbb{R}^N} H_2(u_n) dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

khi $n \rightarrow \infty$. Điều này mâu thuẫn với $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(u_n) = c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} > 0$. Do đó (1.34) đúng. Ta ký hiệu $v_n(x) := u_n(x + y_n)$, từ (1.34) suy ra

$$\int_{B_R(0)} |v_n|^p dx \geq \delta/2 > 0, \quad (1.35)$$

trong đó $\delta > 0$. Do hàm năng lượng bất biến với phép tịnh tiến $\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$ và $\mathcal{J}'_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$, ta có

$$\mathcal{J}_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(v_n) \rightarrow c_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} \quad \text{và} \quad \mathcal{J}'_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(v_n) \rightarrow 0 \quad \text{trong } W^*.$$

Lưu ý rằng $\|v_n\|_{\eta_1, W^{s, p_j}(\mathbb{R}^N)} = \|u_n\|_{\eta_1, W^{s, p_j}(\mathbb{R}^N)}$, với mọi $j = 1, \dots, m$, khi đó dãy $\{v_n\}$ bị chặn trong W , và tồn tại $v \in W$ sao cho $v_n \rightharpoonup v$ trong W , $v_n \rightarrow v$ trong $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ với mọi $q \in [\frac{N}{s}, +\infty)$, $v_n(x) \rightarrow v(x)$ hầu khắp nơi trong $\mathbb{R}^N$. Từ (1.35), ta thấy rằng $\int_{B_R(0)} |v|^p dx \geq \delta/2 > 0$. Vì vậy $v \not\equiv 0$. Bằng các lập luận tương tự như trong Bổ đề 3.3 [72], ta có $\mathcal{J}'_{\eta_1, \eta_2, \eta_3}(v) = 0, v \not\equiv 0$ trong W . $\square$

1.3 Sự tồn tại nghiệm yếu cho phương trình Choquard nhiều pha với số mũ tối hạn

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + \gamma_1 \sum_{i=1}^m |v|^{p_i-2} v \\ = \gamma_2 \lambda \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right] \mathfrak{f}(v) + (v^+)^{q_s^*-2} v^+, \end{aligned} \quad (1.36)$$

trong đó $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ là hằng số. Ta giả sử $\mathfrak{f}$ là hàm phi tuyến tính thỏa mãn các điều kiện sau:

- (f₁) $\mathfrak{f} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ và $\mathfrak{f}(t) = 0$ với mọi $t < 0$;
- (f₂) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{f}(t)}{t^{q-1}} = 0$ và tồn tại $a_0 > 0$ sao cho $|\mathfrak{f}(t)| \leq a(1 + |t|^{\tau-1})$ với mọi $t \geq 0$, trong đó $q < \tau < \min\{\frac{q(N-s)}{N-qs}, \frac{q(N-\mu)}{N-qs}\}$;
- (f₃) tồn tại $q_s^* > \theta > q$ sao cho $2\mathfrak{f}(t)t \geq \theta F(t)$ với mọi $t > 0$;
- (f₄) hàm $\frac{\mathfrak{f}(t)}{t^{\frac{q}{2}-1}}$ là tăng khi $t > 0$.

Sau đây là một ví dụ cho hàm $\mathfrak{f}(t)$:

Giả sử các tham số của bài toán thỏa mãn $q < \theta < q_s^*$,

$$\mathfrak{f}(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < 0, \\ t^{\tau-1} + t^{\theta-1}, & \text{nếu } t \geq 0. \end{cases}$$

Trong đó, ta chọn τ sao cho $q < \theta < \tau < \min \left\{ \frac{q(N-s)}{N-qs}, \frac{q(N-\mu)}{N-qs} \right\}$. Khi đó

$$F(t) = \frac{1}{\tau} t^\tau + \frac{1}{\theta} t^\theta.$$

Ta kiểm tra các điều kiện của $f(t)$:

- Vì $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = f(0) = 0$ nên $f(t)$ là hàm liên tục.
- Ta có $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{\tau-1} + t^{\theta-1}}{t^{q-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} (t^{\tau-q} + t^{\theta-q}) = 0$.
- Kiểm tra biểu thức: $2f(t)t - \theta F(t) = 2(t^{\tau-1} + t^{\theta-1})t - \theta(\frac{1}{\tau}t^\tau + \frac{1}{\theta}t^\theta) = 2t^\tau + 2t^\theta - \frac{\theta}{\tau}t^\tau - t^\theta = (2 - \frac{\theta}{\tau})t^\tau + t^\theta$. Vì ta chọn $\tau > \theta$ nên $\frac{\theta}{\tau} < 1$, suy ra $2 - \frac{\theta}{\tau} > 1 > 0$. Do đó $(2 - \frac{\theta}{\tau})t^\tau + t^\theta > 0, \forall t > 0$. Vậy $2f(t)t \geq \theta F(t)$.
- Xét hàm

$$g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{q}{2}-1}} = \frac{t^{\tau-1} + t^{\theta-1}}{t^{\frac{q}{2}-1}} = t^{\tau-\frac{q}{2}} + t^{\theta-\frac{q}{2}}.$$

Để chứng minh hàm này tăng, ta xét đạo hàm của nó:

$$g'(t) = \left(\tau - \frac{q}{2}\right)t^{\tau-\frac{q}{2}-1} + \left(\theta - \frac{q}{2}\right)t^{\theta-\frac{q}{2}-1}.$$

Vì $\tau > q$ và $\theta > q$ nên hiển nhiên $\tau > \frac{q}{2}$ và $\theta > \frac{q}{2}$. Từ đó suy ra $\tau - \frac{q}{2} > 0$ và $\theta - \frac{q}{2} > 0$. Vậy $g'(t) > 0$ với mọi $t > 0$, do đó hàm $g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{q}{2}-1}}$ là tăng trên $(0, +\infty)$.

Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (1.36), ta xét phiếm hàm năng lượng

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(v) = & \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i}}{|x - y|^{N+p_i s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} \gamma_1 |v(x)|^{p_i} dx \right) \\ & - \frac{\lambda \gamma_2^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right) F(v) dx + \frac{1}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Với hàm $\phi \in W$ tùy ý, ta có

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v), \phi \rangle = & \sum_{i=1}^m \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i-2} (v(x) - v(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+sp_i}} dx dy \right. \\ & + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{p_i-2} v(x) \phi(x) dx \Big) \\ & - \lambda \gamma_2^2 \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{F(v(y)) f(v(x)) \phi(x)}{|x - y|^\mu} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*-2} v^+ \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Khi đó nghiệm yếu của (1.36) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.3.1. Hàm $v \in W$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình (1.36) nếu với mọi hàm thử $\phi \in W$, ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i-2} (v(x) - v(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+sp_i}} dx dy \right. \\ & \quad \left. + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{p_i-2} v(x) \phi(x) dx \right) \\ & \quad - \lambda \gamma_2^2 \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{F(v(y)) f(v(x)) \phi(x)}{|x - y|^\mu} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*-2} v^+ \phi(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Từ Định nghĩa 1.3.1, ta thấy rằng hàm $v \in W$ là nghiệm yếu của (1.36) nếu $\langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v), \phi \rangle = 0$ với mọi $\phi \in W$. Tức là $\mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v) = 0$ trong W^* . Ta ký hiệu $\mathcal{M}_{\gamma_1, \gamma_2}$ là đa tập Nehari liên kết với phiếm hàm năng lượng $\mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}$

$$\mathcal{M}_{\gamma_1, \gamma_2} = \{v \in W \setminus \{0\} : \langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v), v \rangle = 0\}.$$

Định nghĩa 1.3.2. Hàm u được gọi là nghiệm với năng lượng cực tiểu của (1.36) nếu

$$\mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(u) = \inf \{ \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(v) | v \in W \setminus \{0\}, \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(v) = 0 \}.$$

Định lý 1.3.3. Giả sử các điều kiện $(f_1) - (f_3)$ được thỏa mãn. Khi đó tồn tại $\lambda_* > 0$ đủ lớn sao cho phương trình (1.36) có một nghiệm yếu không âm, không tầm thường với $\lambda \geq \lambda_*$.

Chứng minh. Dễ thấy $\mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}$ thỏa mãn điều kiện hình học của Định lý Vượt núi. Khi đó tồn tại một dãy $\{w_n\} \subset W$ sao cho

$$\mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(w_n) \rightarrow c_{\gamma_1, \gamma_2} \text{ và } \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(w_n) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Theo [58, Mệnh đề 3], mức vượt núi c_{γ_1, γ_2} được xác định như sau

$$c_{\gamma_1, \gamma_2} = \inf_{\gamma_* \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(\gamma_*(t)) = \inf_{v \in \mathcal{M}_{\gamma_1, \gamma_2}} \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(v) = \inf_{v \in W \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(tv),$$

trong đó $\Gamma = \{\gamma_* \in C([0, 1], W) : \gamma_*(0) = 0, \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(\gamma_*(1)) < 0\}$. Đầu tiên, ta chỉ ra rằng tồn tại $\lambda_* > 0$ đủ lớn sao cho

$$c_{\gamma_1, \gamma_2} \in (0, \frac{s}{N} \mathcal{S}_{q_s^*}^{\frac{N}{q_s}}), \quad (1.38)$$

với mọi $\lambda \geq \lambda_*$. Đặt $u \in W \setminus \{0\}$ với $|\text{supp}(u^+)| > 0$, khi đó tồn tại $t_\lambda \in (0, \infty)$ sao cho $\mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(t_\lambda u) = \max_{t \geq 0} \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(tu)$. Từ đó ta có

$$\langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(t_\lambda u), t_\lambda u \rangle = 0$$

và

$$\sum_{i=1}^m t_\lambda^{p_i} \|u\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} = \lambda \gamma_2^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{K}(t_\lambda u) \mathfrak{f}(t_\lambda u) t_\lambda u dx + t_\lambda^{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{q_s^*} dx.$$

Vì $f(t) \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, nên

$$\sum_{i=1}^m t_\lambda^{p_i} \|u\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \geq t_\lambda^{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{q_s^*} dx.$$

Vậy $\{t_\lambda\}$ phải bị chặn khi $\lambda \rightarrow \infty$ và chọn một dãy con cần thiết, ta giả sử rằng $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_\lambda = t_0 \geq 0$. Nếu $t_0 > 0$, thì $\sum_{i=1}^m t_\lambda^{p_i} \|u\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \rightarrow A \in (0, \infty)$ và

$$\lambda \gamma_2^2 \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{K}(t_\lambda u) \mathfrak{f}(t_\lambda u) t_\lambda u dx + t_\lambda^{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{q_s^*} dx \rightarrow +\infty.$$

Điều này là mâu thuẫn, vậy $t_0 = 0$. Do đó

$$0 < c_{\gamma_1, \gamma_2} \leq \max_{t \geq 0} \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(tu) \leq \sum_{i=1}^m t_\lambda^{p_i} \|u\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}.$$

Tồn tại $\lambda_* > 0$ đủ lớn sao cho

$$\sum_{i=1}^m t_\lambda^{p_i} \|u\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} < \frac{S}{N} \mathcal{S}_{q_s^*}^{\frac{N}{q_s}}$$

với mọi $\lambda \geq \lambda_*$. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} c_{\gamma_1, \gamma_2} + o_n(1) \|w_n\|_W &= \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(w_n) - \frac{1}{\theta} \langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(w_n), w_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{\theta} \right) \|w_n\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + \frac{\lambda \gamma_2^2}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{K}(w_n) (\mathfrak{f}(w_n) w_n - \frac{\theta}{2} F(w_n)) dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (w_n^+)^{q_s^*} dx \geq \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{\theta} \right) \|w_n\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}. \end{aligned}$$

Để thấy dãy $\{w_n\}$ bị chặn trong W . Chọn một dãy con cần thiết, ta có thể giả sử rằng w_n hội tụ yếu đến w trong $L^t(\mathbb{R}^N)$, $t \in [q, q_s^*)$ và $w_n(x) \rightarrow w(x)$ hầu khắp nơi trong $\mathbb{R}^N$. Áp dụng Định lý hội tụ Vitali, ta thu được

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|w_n(x) - w_n(y)|^{t-2} (w_n(x) - w_n(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+st}} dx dy \\ & \longrightarrow \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|w(x) - w(y)|^{t-2} (w(x) - w(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+st}} dx dy \end{aligned} \quad (1.39)$$

và

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_n(x)|^{t-2} w_n(x) \phi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |w(x)|^{t-2} w(x) \phi(x) dx, \quad (1.40)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (w_n^+)^{q_s^*-2} w_n^+ \phi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (w^+)^{q_s^*-2} w^+ \phi(x) dx \quad (1.41)$$

khi $n \rightarrow \infty$ và $t \in \{p_1, \dots, p_m\}$. Theo Bổ đề 1.1.17 ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(w_n) \right) (x) \cdot f(w_n(x)) \varphi(x) dx \\ & \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(w) \right) (x) \cdot f(w(x)) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

tức là

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{F(w_n(y)) f(w_n(x)) \varphi(x)}{|x - y|^\mu} dx dy \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{F(w(y)) f(w(x)) \varphi(x)}{|x - y|^\mu} dx dy \quad (1.42)$$

khi $n \rightarrow \infty$. Từ (1.39), (1.40), (1.41), (1.42) ta có

$$\mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(w_n) \rightarrow \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(w) \text{ khi } n \rightarrow \infty. \quad (1.43)$$

Theo giả thiết $\mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(w_n) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ nên $\mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(w) = 0$. Nếu $w \not\equiv 0$ thì w là một nghiệm yếu không tầm thường của (1.36). Nếu $w \equiv 0$, ta sẽ chứng minh sự tồn tại nghiệm như sau. Giả sử

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |w_n(x)|^q dx = 0. \quad (1.44)$$

Theo Bổ đề 1.2.4, ta có $w_n \rightarrow 0$ trong $L^t(\mathbb{R}^N)$ với mọi $t \in (q, q_s^*)$. Áp dụng Bổ đề 1.1.16, ta thu được

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(w_n) \right] f(w_n) w_n dx \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(w_n), w_n \rangle \\
&= \sum_{i=1}^p \|w_n\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \gamma_2^2 \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(w_n) \right] f(w_n) w_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} (w_n^+)^{q_s^*} dx \\
&= \sum_{i=1}^p \|w_n\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \int_{\mathbb{R}^N} (w_n^+)^{q_s^*} dx + o_n(1)
\end{aligned}$$

khi $n \rightarrow \infty$. Vậy dãy $\{w_n\}$ bị chặn trong W và

$$\sum_{i=1}^p \|w_n\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \rightarrow B \geq 0 \text{ và } \int_{\mathbb{R}^N} (w_n^+)^{q_s^*} dx \rightarrow B. \quad (1.45)$$

Từ Bổ đề 1.1.16 và điều kiện (f_2) , với mọi $\delta > 0$, tồn tại $C(\delta) > 0$ sao cho $|F(t)| \leq \delta |t|^q + C(\delta) |t|^\tau$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Vậy

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(w_n) \right] F(w_n) dx \right| \leq C_0 \delta \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^q dx + C_0 C(\delta) \int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^\tau dx \rightarrow 0$$

khi $n \rightarrow \infty$. Dễ thấy

$$\begin{aligned}
c_{\gamma_1, \gamma_2} &= I_{\gamma_1, \gamma_2}(w_n) + o_n(1) \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\|w_n\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}}{p_i} - \frac{\lambda \gamma_2^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(w_n) \right] F(w_n) dx \\
&\quad - \frac{1}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n^+|^{q_s^*} dx \geq \frac{s}{N} B
\end{aligned}$$

khi $n \rightarrow \infty$. Hơn nữa,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_n^+|^{q_s^*} dx \right)^{\frac{q}{q_s^*}} \leq \mathcal{S}_{q_s^*}^{-1} \sum_{i=1}^m \|w_n\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}.$$

Khi đó $B^{\frac{q}{q_s^*}} \leq \mathcal{S}_{q_s^*}^{-1} B$, kéo theo $B \geq \mathcal{S}_{q_s^*}^{\frac{N}{q_s^*}}$. Vậy ta thu được

$$c_{\gamma_1, \gamma_2} \geq \frac{s}{N} \mathcal{S}_{q_s^*}^{\frac{N}{q_s^*}}.$$

Điều này mâu thuẫn với $c_{\gamma_1, \gamma_2} \in (0, \frac{s}{N} \mathcal{S}_{q_s^*}^{\frac{N}{q_s^*}})$. Do đó (1.44) không thỏa mãn.

Khi đó tồn tại $\delta > 0$, $R > 0$ và dãy $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ sao cho

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} |w_n(x)|^q dx \geq \delta > 0. \quad (1.46)$$

Ký hiệu $\mathbf{v}_n(x) = w_n(x + y_n)$, từ (1.46), ta suy ra

$$\int_{B_R(0)} |\mathbf{v}_n|^q dx \geq \delta/2 > 0 \quad (1.47)$$

với n đủ lớn. Khi đó ta có

$$\mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{v}_n) \rightarrow c_{\gamma_1, \gamma_2} \text{ và } \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{v}_n) \rightarrow 0 \text{ trong } W^*.$$

Vì $\|\mathbf{v}_n\|_W = \|w_n\|_W$, nên $\{\mathbf{v}_n\}$ là bị chặn trong W , vậy tồn tại $\mathbf{v} \in W$ sao cho $\mathbf{v}_n$ hội tụ yếu đến $\mathbf{v}$ trong W , $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ trong $L^t_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ($t \in [q, q_s^*)$) và $\mathbf{v}_n(x) \rightarrow \mathbf{v}(x)$ hầu khắp nơi trong $\mathbb{R}^N$. Từ (1.47), ta suy ra $\int_{B_R(0)} |\mathbf{v}|^q dx \geq$

$\delta/2 > 0$, khi đó $\mathbf{v} \neq 0$. Áp dụng các lập luận tương tự (1.43), ta thu được $\mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{v}) = 0$. Khi đó $\mathbf{v}$ là một nghiệm yếu không tầm thường của phương trình (1.36). Do $f(t) = 0$ với mọi $t \leq 0$, nên $\mathbf{v} \geq 0$ trong $\mathbb{R}^N$. Áp dụng các phương pháp trong Hệ quả 2.1 [16], ta có $\mathbf{v} \in C^\delta(\mathbb{R}^N)$ nên $\sigma \in (0, 1)$. Chú ý rằng

$$\begin{aligned} c_{\gamma_1, \gamma_2} &\leq \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{v}) = \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{v}) - \frac{1}{\theta} \langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{\theta} \right) \|\mathbf{v}\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + \lambda \gamma_2^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(\mathbf{v}) \right] \left(\frac{1}{\theta} \mathbf{f}(\mathbf{v}) \mathbf{v} - \frac{1}{2} F(\mathbf{v}) \right) dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{\theta} \right) \|\mathbf{v}_n\|_{\gamma_1, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \\ &\quad + \lambda \gamma_2^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(\mathbf{v}_n) \right] \left(\frac{1}{\theta} \mathbf{f}(\mathbf{v}_n) \mathbf{v}_n - \frac{1}{2} F(\mathbf{v}_n) \right) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{v}_n) - \frac{1}{\theta} \langle \mathcal{I}'_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n \rangle \right) = c_{\gamma_1, \gamma_2}. \end{aligned}$$

Vậy $\mathbf{v}$ là một nghiệm với năng lượng cực tiểu của phương trình (1.36), tức là

$$c_{\gamma_1, \gamma_2} = \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{v}) = \inf_{u \in \mathcal{M}_{\gamma_1, \gamma_2}} \mathcal{I}_{\gamma_1, \gamma_2}(u).$$

□

Kết luận Chương 1

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình phân thứ nhiều pha mà hàm phi tuyến có dạng Choquard. Bài toán được xét khi hàm phi tuyến có độ tăng tối hạn và độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser. Các kết quả chính của chương này là Định lý 1.2.5 và Định lý 1.3.3. Để chứng minh các kết quả này, trước hết chúng tôi chứng minh rằng phiếm hàm năng lượng của bài toán tương ứng thỏa mãn điều kiện hình học của Định lý vượt núi. Từ đó suy ra tồn tại dãy (PS) với mức vượt núi được ước lượng. Tiếp theo sử dụng tiêu chuẩn compact kiểu Lions, chúng tôi chỉ ra rằng giới hạn yếu của dãy (PS) là nghiệm yếu không tầm thường của bài toán đã cho. Các kết quả của chương này được công bố trong [76] và [62, Định lý 5].

Chương 2

Sự cô đặc của nghiệm cho phương trình Choquard phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với thế vị cạnh tranh

2.1 Sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu

Xuất phát từ các bài toán nhiều pha không cân bằng, trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình chứa toán tử phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với hàm phi tuyến Choquard và số mũ tối hạn

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + \sum_{i=1}^m V(\zeta x) |v|^{p_i-2} v \\ & = \lambda \left(\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v) \right) Q(\zeta x) f(v) + (v^+)^{q_s^*-2} v^+, v^+(x) = \max\{v(x), 0\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

trong đó $\lambda > 0$ đủ lớn, $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, $m \geq 2$, $2 \leq p = p_1 < \dots < p_m = q < \frac{N}{s}$, $s \in (0, 1)$, $\zeta > 0$ là tham số nhỏ, $0 \leq \mu < q_s$.

Hàm thế vị $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ là bị chặn và thỏa mãn điều kiện Rabinowitz:
(V) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ sao cho

$$+\infty > V_\infty = \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = V_{\min} > 0.$$

Với hàm thế vị Q , ta giả sử Q thỏa mãn các điều kiện sau:

(Q) $Q \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ và $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} Q(x) = Q_\infty$ và

$$Q_{\min} := \inf_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x) > 0.$$

(VQ) $V(0) = V_{\min}$, $Q(0) = Q_{\max} := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x) > Q_\infty$. Khi đó $\mathcal{V} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, với

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = V_{\min}\}, \mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^N : Q(x) = Q_{\max}\}.$$

Hàm phi tuyến tính f thỏa mãn các điều kiện $(f_1) - (f_4)$.

Hàm thế vị V và Q có thể được minh họa thông qua ví dụ sau:

$$V(x) = 2 - e^{-|x|^2}, \quad Q(x) = 1 + 2e^{-|x|^2}.$$

Bây giờ, ta kiểm tra các điều kiện của V và Q . Dễ thấy, hàm $V(x)$ như trên là liên tục trên $\mathbb{R}^N$. Bên cạnh đó, vì $0 < e^{-|x|^2} \leq 1$, nên $1 \leq V(x) < 2$. Do đó, hàm này bị chặn. Tiếp theo ta kiểm tra điều kiện Rabinowitz:

- $V_\infty = \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (2 - e^{-|x|^2}) = 2 - 0 = 2$.
- $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = V_{\min} = V(0) = 1$.

Vậy $+\infty > V_\infty = \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = V_{\min} > 0$. Hàm $Q(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^N$ và do $1 < Q(x) \leq 3$ nên bị chặn. Lại có:

- $Q_\infty = \limsup_{|x| \rightarrow \infty} Q(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + 2e^{-|x|^2}) = 1$.
- $Q_{\min} = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x) = Q(0) = 1 > 0$

. Vậy điều kiện của hàm Q được thỏa mãn.

Sau đây, chúng tôi giới thiệu không gian nghiệm cho bài toán (2.1). Ký hiệu $W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$ ($i = 1, \dots, m$) là bao đóng của $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, với chuẩn

$$\|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)} = \left([v]_{s,p_i}^{p_i} + \|v\|_{V,p_i,\zeta}^{p_i} \right)^{1/p_i}, \quad \|v\|_{V,p_i,\zeta}^{p_i} = \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v(x)|^{p_i} dx.$$

Đặt $W_\zeta = \cap_{i=1}^m W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$. Khi đó W_ζ không gian Banach lồi đều (tương tự [64], Bổ đề 10) với chuẩn $\|v\|_{W_\zeta} = \sum_{i=1}^m \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}$, và khi đó W_ζ là không gian phản xạ.

Tồn tại các phép nhúng $W_\zeta \hookrightarrow W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, \dots, m$. Theo điều kiện (V) và Định lý 6.9 [57], ta có phép nhúng từ W_ζ vào $L^\nu(\mathbb{R}^N)$

là liên tục với mọi $\nu \in [p_i, (p_i)_s^*], i = 1, \dots, m$, khi đó tồn tại hằng số tối ưu $S_{\nu, \zeta} > 0$ với mọi $\nu \in [p_m, (p_m)_s^*]$ như sau:

$$S_{\nu, \zeta} = \inf_{v \neq 0, v \in W_\zeta} \frac{\|v\|_{W_\zeta}}{\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N)}}.$$

Suy ra

$$\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N)} \leq S_{\nu, \zeta}^{-1} \|v\|_{W_\zeta} \text{ với mọi } v \in W_\zeta. \quad (2.2)$$

Để nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình (2.1), ta xét phiếm hàm năng lượng $J_\zeta : W_\zeta \rightarrow \mathbb{R}$ có dạng

$$J_\zeta(v) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \|v\|_{W_{V, \zeta}^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \lambda \mathcal{K}_\zeta(v) - \frac{1}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx, \quad (2.3)$$

trong đó $\mathcal{K}_\zeta(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta y) F(v) \right] Q(\zeta x) f(v) dx$. Với $Q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $Q_{\max} = \|Q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ ta có:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y) Q(\zeta x) F(v(y)) F(v(x))}{|x - y|^\mu} dx dy \right| \\ & \leq Q_{\max}^2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|F(v(y))| |F(v(x))|}{|x - y|^\mu} dx dy. \end{aligned}$$

Với mọi $v \in W_\zeta$, sử dụng Bổ đề 1.1.14 cho $F(v(y))$ và $F(v(x)) \in L^t(\mathbb{R}^N)$, tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y) Q(\zeta x) F(v(y)) F(v(x))}{|x - y|^\mu} dx dy \right| \leq C Q_{\max}^2 (\|F(v)\|_{L^t(\mathbb{R}^N)})^2,$$

trong đó $t = \frac{2N}{2N - \mu}$. Theo điều kiện (f_2) và (f_3) , tồn tại $a > 0$ sao cho

$$|F(v)| \leq a(|v|^q + |v|^\tau).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|F(v)\|_{L^t(\mathbb{R}^N)} & \leq \|a(|v|^q + |v|^\tau)\|_{L^t(\mathbb{R}^N)} \leq a(\|v^q\|_{L^t(\mathbb{R}^N)} + \|v^\tau\|_{L^t(\mathbb{R}^N)}) \\ & = a(\|v\|_{L^{qt}(\mathbb{R}^N)}^q + \|v\|_{L^{\tau t}(\mathbb{R}^N)}^\tau). \end{aligned}$$

Kết hợp với phép nhúng liên tục từ W_ζ vào $L^r(\mathbb{R}^N)$ ($r \in [q, q_s^*]$), ta có

$$\begin{aligned} (\|F(v)\|_{L^t(\mathbb{R}^N)})^2 &\leq 2a^2(\|v\|_{L^{qt}(\mathbb{R}^N)}^{2q} + \|v\|_{L^{\tau t}(\mathbb{R}^N)}^{2\tau}) \\ &\leq 2a^2(S_{tq,\zeta}^{-2q}\|v\|_{W_\zeta}^{2q} + S_{\tau t,\zeta}^{-2\tau}\|v\|_{W_\zeta}^{2\tau}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

với $tq, \tau t \in [q, q_s^*]$.

Từ (2.4), ta suy ra J_ζ hoàn toàn xác định trên W_ζ và $J_\zeta \in C^1(W_\zeta, \mathbb{R})$.

Đạo hàm của J_ζ có dạng

$$\begin{aligned} \langle J'_\zeta(v), \phi \rangle &= \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i-2} (v(x) - v(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+p_i s}} dx dy \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v|^{p_i-2} v \phi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y) F(v(y))}{|x - y|^\mu} Q(\zeta x) f(v(x)) \phi(x) dx dy \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*-2} v^+ \phi dx \end{aligned}$$

với mọi $v, \phi \in W_\zeta$. Nghiệm yếu của phương trình (2.1) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.1.1. Hàm $v \in W_\zeta$ được gọi là nghiệm yếu của (2.1) nếu với mọi $\phi \in W_\zeta$, ta có

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i-2} (v(x) - v(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+p_i s}} dx dy \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v|^{p_i-2} v \phi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y) F(v(y))}{|x - y|^\mu} Q(\zeta x) f(v(x)) \phi(x) dx dy \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*-2} v^+ \phi dx = 0. \end{aligned}$$

Do đó nghiệm yếu v của (2.1) là điểm tới hạn của phiếm hàm năng lượng J_ζ trong W_ζ . Tức là ta có $\langle J'_\zeta(v), \phi \rangle = 0$ với mọi $\phi \in W_\zeta$.

Để chứng minh kết quả chính của chương, ta cần phiên bản của Định lý Vượt núi như sau:

Bổ đề 2.1.2. [66, 68] Cho $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ và X là không gian Banach. Giả sử $I(0) = 0$ và

(I₁) Tồn tại các hằng số $\beta_0, \rho_0 > 0$ thỏa mãn với mọi $u \in X : \|u\| = \beta_0 : I(u) \geq \rho_0$.

(I₂) Tồn tại $u_1 \in X : \|u_1\| > \beta_0$ sao cho $I(u_1) < 0$.

Đặt $\Gamma = \{\gamma_* \in C([0, 1], X) : \gamma_*(0) = 0, I(\gamma_*(1)) < 0\}$. Khi đó,

$$c = \inf_{\gamma_* \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma_*(t)) \geq \rho_0,$$

và tồn tại một dãy $\{u_n\}_n$ là $(PS)_c$ của I trong X . Bên cạnh đó, I có một giá trị tới hạn $c \geq \rho_0$ nếu nó thỏa mãn điều kiện Palais-Smale.

Tiếp theo, ta chỉ ra hàm năng lượng J_ζ thỏa mãn điều kiện hình học của Định lý Vượt núi:

Bổ đề 2.1.3. Hàm năng lượng J_ζ có các tính chất sau:

(i) tồn tại $\alpha_1, \rho_1 > 0$ sao cho $J_\zeta(v) \geq \alpha_1$ với mọi $v \in W_\zeta : \|v\|_{W_\zeta} = \rho_1$;

(ii) tồn tại $e \in W_\zeta$ với $\|e\|_{W_\zeta} > \rho_1$ sao cho $J_\zeta(e) < 0$.

Chứng minh. Từ (2.4), khi $\|v\|_{W_\zeta}$ đủ nhỏ, tồn tại $C_* > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} J_\zeta(v) &\geq \sum_{i=1}^m \frac{\|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}}{p_i} - C_*(\|v\|_{W_\zeta}^{2q} + \|v\|_{W_\zeta}^{2\tau}) - \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q_s^*} dx \\ &\geq \frac{m^{1-p_m}}{p_m} \left(\sum_{i=1}^m \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \right)^{p_m} - C_*(\|v\|_{W_\zeta}^{2q} + \|u\|_{W_\zeta}^{2\tau}) - \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q_s^*} dx \\ &= \frac{m^{1-p_m}}{p_m} \|v\|_{W_\zeta}^q - C_*(\|v\|_{W_\zeta}^{2q} + \|v\|_{W_\zeta}^{2\tau}) - S_{q_s^*, \zeta}^{-q_s^*} \|v\|_{W_\zeta}^{q_s^*}. \end{aligned}$$

Bằng các ước lượng đơn giản, ta chỉ ra rằng tồn tại $\alpha_1, \rho_1 > 0$ sao cho $J_\zeta(v) \geq \alpha_1$ với mọi $v \in W_\zeta$ sao cho $\|v\|_{W_\zeta} = \rho_1$ đủ nhỏ.

Chọn $u_0 \in W_\varepsilon \setminus \{0\}$ sao cho $u_0 \geq 0$. Khi $t \rightarrow \infty$ ta có

$$J_\zeta(tu_0) \leq \sum_{i=1}^m \frac{t^{p_i}}{p_i} \|u_0\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - t^{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{q_s^*} dx \rightarrow -\infty. \quad (2.5)$$

Đặt $e = tu_0$, t đủ lớn, ta có $J_\zeta(e) < 0$.

□

Từ Bổ đề 2.1.3 và sử dụng Định lý Vượt núi, tồn tại một dãy Palais-Smale $\{v_n\} \subset W_\zeta$ cho J_ζ sao cho

$$J_\zeta(v_n) \rightarrow c_\zeta \text{ và } J'_\zeta(v_n) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

trong đó

$$c_\zeta = \inf_{\gamma_* \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\zeta(\gamma_*(t)), \quad (2.7)$$

với

$$\Gamma = \{\gamma_* \in C([0,1], W_\zeta) : \gamma_*(0) = 0, J_\zeta(\gamma_*(1)) < 0\}.$$

Ký hiệu $A_\zeta^+ = \{u \in W_\zeta : |\text{supp}\{u^+\}| > 0\}$. Khi đó ta có kết quả sau:

Bổ đề 2.1.4. *Giả sử điều kiện (V), (f_2) và (f_3) thỏa mãn. Khi đó với mỗi $\zeta > 0$, ta có:*

- (i) J'_ζ biến các tập bị chặn của W_ζ thành các tập bị chặn của W_ζ^* .
- (ii) J'_ζ liên tục yếu theo dãy trong W_ζ .
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} J_\zeta(t_n v_n) = -\infty$, trong đó $v_n \in K$ và $K \subset A_\zeta^+ \setminus \{0\}$ là tập con compact trong W_ζ .

Chứng minh. (i). Giả sử $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong W_ζ và $\phi \in W_\zeta$. Khi đó

$$\begin{aligned} & | \langle J'_\zeta(v_n), \phi \rangle | \\ & \leq \sum_{i=1}^m \left| \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|^{p_i-2} (v_n(x) - v_n(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+p_i s}} dx dy \right| \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v_n|^{p_i-1} |\phi(x)| dx \\ & + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q(\zeta y) F(v_n)) \right] \right| |Q(\zeta x) f(v_n(x)) \phi(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^N} (v_n^+)^{q_s^*-1} \phi dx. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder ta được

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|^{t-2} (v_n(x) - v_n(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+ts}} dx dy \right| \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v_n|^{t-1} |\phi(x)| dx \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|^t}{|x - y|^{N+ts}} dx dy \right)^{\frac{t-1}{t}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^t}{|x - y|^{N+ts}} dx dy \right)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v_n|^t dx \right)^{\frac{t-1}{t}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |\phi(x)|^t dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
& \leq 2 \|v_n\|_{W_\zeta}^{t-1} \|\phi\|_{W_\zeta}
\end{aligned}$$

với mọi $t \in \{p_1, \dots, p_m\}$. Sử dụng Bổ đề 1.1.16, ta có

$$| \langle J'_\zeta(v_n), \phi \rangle | \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
& \leq 2(\|v_n\|_{W_\zeta}^{p_1-1} \|\phi\|_{W_\zeta} + \dots + \|v_n\|_{W_\zeta}^{p_m-1} \|\phi\|_{W_\zeta}) \\
& + C_1 Q_{\max} \lambda a \int_{\mathbb{R}^N} (|v_n|^{q-1} + |v_n|^{\tau-1}) |\phi(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q_s^*-1} \phi dx. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder trong (2.8), ta được

$$\begin{aligned}
& | \langle J'_\zeta(v_n), \phi \rangle | \\
& \leq 2(\|v_n\|_{W_\zeta}^{p_1-1} \|\phi\|_{W_\zeta} + \dots + \|v_n\|_{W_\zeta}^{p_m-1} \|\phi\|_{W_\zeta}) \\
& + C_1 Q_{\max} a \lambda (S_{q,\zeta}^{-q} \|v_n\|_{W_\zeta}^{q-1} \|\phi\|_{W_\zeta} + S_{\tau,\zeta}^{-\tau} \|v_n\|_{W_\zeta}^{\tau-1} \|\phi\|_{W_\zeta}) \\
& + S_{q_s^*,\zeta}^{-q_s^*} \|v_n\|_{W_\zeta}^{q_s^*-1} \|\phi\|_{W_\zeta}.
\end{aligned}$$

Vậy $\|J'_\zeta\|_{W_\zeta^*}$ là tập bị chặn và từ đó (i) được chứng minh.

(ii) Giả sử $v_n \rightarrow v$ yếu trong W_ζ và $\phi \in W_\zeta$. Ta sẽ chỉ ra rằng

$$\langle J'_\zeta(v_n), \phi \rangle \rightarrow \langle J'_\zeta(v), \phi \rangle$$

khi $n \rightarrow \infty$. Sử dụng phép nhúng compact từ $W_\zeta(B_R(0))$ vào $L^\nu(\mathbb{R}^N)$ với mọi $\nu \in [1, q_s^*)$, $\phi \in W_\zeta$ và Định lý hội tụ Vitali, ta có

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|^{t-2} (v_n(x) - v_n(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+ts}} dx dy \\
& \rightarrow \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{t-2} (v(x) - v(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{N+ts}} dx dy \quad (2.10)
\end{aligned}$$

và

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v_n|^{t-2} v_n \phi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |v|^{t-2} v \phi dx \quad (2.11)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (v_n^+)^{q_s^*-2} v_n^+ \phi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*-2} v^+ \phi dx \quad (2.12)$$

khi $n \rightarrow \infty$, $t \in \{p_1, \dots, p_m\}$. Lập luận tương tự Bổ đề 1.1.17, ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q(\zeta y)F(v_n)) \right] Q(\zeta x) f(v_n(x)) \phi(x) dx \\ & \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q(\zeta y)F(v)) \right] Q(\zeta x) f(v(x)) \phi(x) dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

khi $n \rightarrow \infty$. Kết hợp (2.10)-(2.13), ta được

$$\langle J'_\zeta(v_n), \phi \rangle \rightarrow \langle J'_\zeta(v), \phi \rangle \quad \text{khi } n \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

(iii). Từ (2.5), ta có

$$J_\zeta(t_n v_n) \leq \sum_{i=1}^m \frac{t_n^{p_i}}{p_i} \|v_n\|_{W_{V, \zeta}^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \frac{t_n^{q_s^*}}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^+|^{q_s^*} dx. \quad (2.15)$$

Vì $v_n \in K \subset A_\zeta^+ \setminus \{0\}$ là một tập compact nên khi chọn một dãy con nếu cần thiết, ta có thể giả sử rằng $v_n \rightarrow v \in K \subset A_\zeta^+ \setminus \{0\}$. Từ (2.15), cho $n \rightarrow \infty$, ta thu được $J_\zeta(t_n v_n) \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow \infty$. $\square$

Ký hiệu $\mathcal{N}_\zeta$ là đa tạp Nehari liên kết với bài toán (2.1) như sau:

$$\mathcal{N}_\zeta = \{v \in W_\zeta \setminus \{0\} : \langle J'_\zeta(v), v \rangle = 0\}.$$

Đặt $\mathbb{S}_\zeta = \{v \in W_\zeta : \|v\|_{W_\zeta} = 1\}$ và $\mathbb{S}_\zeta^+ = \mathbb{S}_\zeta \cap A_\zeta^+$. Khi đó ta có kết quả sau:

Mệnh đề 2.1.5. *Giả sử các điều kiện (V), $(f_2) - (f_3)$ thỏa mãn. Khi đó với mọi $\zeta > 0$, các khẳng định sau đúng:*

(i₁) *với mọi $v \in \mathbb{S}_\zeta^+$, tồn tại duy nhất $t_v > 0$ thỏa mãn $t_v v \in \mathcal{N}_\zeta$. Hơn nữa, $m_\zeta(v) = t_v v$ là điểm cực đại duy nhất của J_ζ trên W_ζ .*

(i₂) *Tập $\mathcal{N}_\zeta$ bị chặn dưới bởi 0. Ngoài ra, $\mathcal{N}_\zeta$ là tập đóng trong W_ζ .*

(i₃) *Với mỗi phần tử $v \in \mathbb{S}_\zeta^+$, tồn tại một số thực dương $\alpha > 0$ sao cho $t_v \geq \alpha$. Với mỗi tập compact $A \subset \mathbb{S}_\zeta^+$, tồn tại $C_A > 0$ sao cho $t_v < C_A$ với mọi $v \in A$.*

(i₄) *Với mỗi $v \in \mathcal{N}_\zeta$, ta có $m_\zeta^{-1}(u) = \frac{v}{\|v\|_{W_\zeta}} \in \mathcal{N}_\zeta$. Hơn nữa, $\mathcal{N}_\zeta$ là một đa tạp khả vi và đồng phôi với $\mathbb{S}_\zeta^+$.*

(i₅) $c_\zeta = \inf_{\mathcal{N}_\zeta} J_\zeta \geq \rho_1 > 0$ và J_ζ bị chặn dưới trên $\mathcal{N}_\zeta$.

Chứng minh. (i₁). Với mỗi $v \in \mathbb{S}_\zeta^+$ và $t > 0$, ta đặt $h(t) = J_\zeta(tv)$. Theo Bổ đề 2.1.3, ta có $h(t) > 0$ khi $t > 0$ đủ nhỏ và $h(t) < 0$ khi t đủ lớn. Khi đó, $\max_{t \geq 0} h(t)$ đạt cực đại tại $t = t_v > 0$ và theo Định lý Fermat, ta có $h'(t_v) = 0$ và $t_v v \in \mathcal{N}_\zeta$. Chú ý rằng $tv \in \mathcal{N}_\zeta$ nếu

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^p}{t^{q-p_i}} + \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,q}(\mathbb{R}^N)} \\ &= \lambda \int_{\{x:v(x)>0\}} \int_{\{y:v(y)>0\}} \frac{Q(\zeta y)F(tv(y))}{(tv(y))^{\frac{q}{2}}} \frac{Q(\zeta x)\mathfrak{f}(tv(x))}{(tv(x))^{\frac{q}{2}-1}} \frac{v(y)^{\frac{q}{2}}v(x)^{\frac{q}{2}}}{|x-y|^\mu} dx dy \\ & \quad + t^{q_s^*-q} \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Từ điều kiện (f₄), ta thấy rằng $\frac{F(t)}{t^{\frac{q}{2}}}$ và $\frac{\mathfrak{f}(t)}{t^{\frac{q}{2}-1}}$ tăng khi $t > 0$. Giả sử rằng với mỗi v , tồn tại $t_1 < t_2$ sao cho $t_1 v, t_2 v \in \mathcal{N}_\zeta$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{t_1^{q-p_i}} - \frac{1}{t_2^{q-p_i}} \right) \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} = \lambda \int_{\{x:v(x)>0\}} \int_{\{y:v(y)>0\}} Q(\zeta y)Q(\zeta x) \\ & \quad \times \left(\frac{F(t_1 v(y))}{(t_1 v(y))^{\frac{q}{2}}} \frac{\mathfrak{f}(t_1 v(x))}{(t_1 v(x))^{\frac{q}{2}-1}} - \frac{F(t_2 v(y))}{(t_2 v(y))^{\frac{q}{2}}} \frac{\mathfrak{f}(t_2 v(x))}{(t_2 v(x))^{\frac{q}{2}-1}} \right) \\ & \quad \times \frac{v(y)^{\frac{q}{2}}v(x)^{\frac{q}{2}}}{|x-y|^\mu} dx dy + (t_1^{q_s^*-q} - t_2^{q_s^*-q}) \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx < 0. \end{aligned}$$

Vô lý, vậy t_v là duy nhất.

(i₂) Từ điều kiện (f₂) và $v \in \mathcal{N}_\zeta$, ta có

$$\sum_{i=1}^m \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y)F(v(y))}{|x-y|^\mu} Q(\zeta x)\mathfrak{f}(v(x))v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx. \quad (2.17)$$

Áp dụng Bổ đề 1.1.14, tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|F(v(y))\mathfrak{f}(v(x))v(x)|}{|x-y|^\mu} dx dy \right| \leq C \|F(v)\|_{L^t(\mathbb{R}^N)} \|\mathfrak{f}(v)v\|_{L^t(\mathbb{R}^N)}, \quad (2.18)$$

trong đó $t = \frac{2N}{2N-\mu}$. Từ (1.2), ta có $|\mathfrak{f}(t)t| \leq a(|t|^q + |t|^\tau)$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Lập luận tương tự (2.4), tồn tại $C_1 > 0$ sao cho

$$\|F(v)\|_{L^t(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{2}{\theta} \|\mathbf{f}(v)v\|_{L^t(\mathbb{R}^N)} \leq C_1(\|v\|_{W_\zeta}^q + \|v\|_{W_\zeta}^\tau). \quad (2.19)$$

Kết hợp (2.17)-(2.19), tồn tại $C_* > 0$ sao cho

$$\sum_{i=1}^m \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \leq C\lambda.C_*Q_{\max}^2(\|v\|_{W_\zeta}^{2q} + \|v\|_{W_\zeta}^{2\tau}) + S_{q_s^*,\zeta}^{-q_s^*} \|v\|_{W_\zeta}^{q_s^*}$$

với mọi $u \in \mathcal{N}_\zeta$. Nếu tồn tại một dãy con $\{v_n\}_n \subset \mathcal{N}_\zeta$ sao cho $v_n \rightarrow 0$ trong W_ζ , khi đó ta có

$$m^{1-q} \|v_n\|_{W_\zeta}^q \leq \lambda C.C_*Q_{\max}^2(\|v_n\|_{W_\zeta}^{2q} + \|v_n\|_{W_\zeta}^{2\tau}) + S_{q_s^*,\zeta}^{-q_s^*} \|v_n\|_{W_\zeta}^{q_s^*}.$$

Điều này là mâu thuẫn vì $2q > q$ và $2\tau > q$. Do đó tồn tại $\kappa > 0$ sao cho $\|v\|_{W_\zeta} \geq \kappa > 0$ với mọi $v \in \mathcal{N}_\zeta$. Bây giờ ta chứng minh rằng tập $\mathcal{N}_\zeta$ là đóng trong W_ζ . Gọi $\{v_n\}$ là một dãy trong $\mathcal{N}_\zeta$ sao cho $v_n \rightarrow v$ trong W_ζ . Theo (i) của Bổ đề 2.1.4, ta thấy rằng $\{J'_\zeta(v_n)\}$ là bị chặn trong W_ζ^* . Do đó, sử dụng (2.14) với $\phi = v$, ta có

$$\begin{aligned} & \langle J'_\zeta(v_n), v_n \rangle - \langle J'_\zeta(v), v \rangle \\ &= \langle J'_\zeta(v_n) - J'_\zeta(v), v \rangle + \langle J'_\zeta(v_n), v_n - v \rangle \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Suy ra $\langle J'_\zeta(v), v \rangle = 0$ vì $v_n \in \mathcal{N}_\zeta$. Khi đó $\mathcal{N}_\zeta$ là đóng trong W_ζ .

(i₃). Với mỗi $v \in \mathbb{S}_\zeta^+$, tồn tại $t_v > 0$ sao cho $t_v v \in \mathcal{N}_\zeta$. Từ (i₂), ta có $t_v = \|t_v v\| \geq \kappa := \alpha$. Tiếp theo ta chỉ ra rằng tồn tại $C_A > 0$ sao cho $t_v \leq C_A$ với mọi $v \in A \subset \mathbb{S}_\zeta^+$. Ngược lại, giả sử tồn tại $\{v_n\} \subset A$ sao cho $t_n = t_{v_n} \rightarrow +\infty$. Vì A là tập con compact, ta có thể giả sử rằng tồn tại $v \in A$ sao cho $v_n \rightarrow v$. Từ (2.15), ta có

$$J_\zeta(t_n v_n) \rightarrow -\infty. \quad (2.20)$$

Hơn nữa, với mọi $v \in \mathcal{N}_\zeta$, đẳng thức sau đúng

$$\sum_{i=1}^m \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{K}_\zeta(v) Q(\zeta x) \mathbf{f}(v) v dx + \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} J_\zeta(v) &\geq \frac{1}{q} \sum_{i=1}^m \|v\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{K}_\zeta(v) Q(\zeta x) F(v) dx - \frac{1}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx. \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{K}_\zeta(v) Q(\zeta x) \left(\frac{f(v)v}{q} - \frac{F(v)}{2} \right) dx + \frac{s}{N} \int_{\mathbb{R}^N} (v^+)^{q_s^*} dx \geq 0 \end{aligned}$$

Theo điều kiện (f_3) , ta suy ra $J_\zeta(t_n v_n) \geq 0$ với mọi n . Điều này mâu thuẫn với (2.20) và do đó (i_3) được chứng minh.

(i_4) . Ta định nghĩa ánh xạ $\hat{m}_\zeta : W_\zeta \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{N}_\zeta$ và $m_\zeta : \mathbb{S}_\zeta^+ \rightarrow \mathcal{N}_\zeta$ như sau:

$$\hat{m}_\zeta(v) = t_v v \text{ và } m_\zeta = \hat{m}_\zeta|_{\mathbb{S}_\zeta^+}.$$

Theo $(i_1) - (i_3)$, ta áp dụng Mệnh đề 8 [69] ta thấy m_ζ là một song ánh giữa $\mathbb{S}_\zeta^+$ và $\mathcal{N}_\zeta$. Khi đó ta có $m_\zeta^{-1}(v) = \frac{v}{\|v\|_{W_\zeta}}$, trong đó m_ζ^{-1} là ánh xạ ngược của m_ζ . Vậy, $\mathcal{N}_\zeta$ là đa tập và đồng phôi với $\mathbb{S}_\zeta^+$.

(i_5) . Theo Bổ đề 2.1.3, tồn tại $C_*(\zeta) > 0$ và với mỗi $v \in W_\zeta \setminus \{0\}$ ta có

$$J_\zeta(tv) \geq \frac{m^{1-qt^q}}{q} \|v\|_{W_\zeta}^q - \lambda C_*(\zeta) (t^{2q} \|v\|_{W_\zeta}^{2q} + t^{2\tau} \|v\|_{W_\zeta}^{2\tau}) - S_{q_s^*, \zeta}^{-q_s^*} \|v\|_{W_\zeta}^{q_s^*}$$

với $t > 0$ đủ nhỏ, khi đó tồn tại $\rho_1 > 0$ sao cho $J_\zeta(tv) \geq \rho_1 > 0$. Theo $(i_1) - (i_3)$ và bằng các lập luận tương tự trong [58, Mệnh đề 3] và [69], ta thu được

$$c_\zeta = \inf_{v \in \mathcal{N}_\zeta} J_\zeta(v) = \inf_{v \in W_\zeta \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} J_\zeta(tv) = \inf_{v \in \mathbb{S}_\zeta^+} \max_{t \geq 0} J_\zeta(tv). \quad (2.21)$$

Ta thấy rằng $c_\zeta \geq \rho_1$ và khi đó $J_\zeta(v) \geq \rho_1$ với mọi $v \in \mathcal{N}_\zeta$. $\square$

Trước hết, ta có các kết quả sau:

Bổ đề 2.1.6. Cho dãy $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\zeta$ với J_ζ sao cho $J_\zeta(u_n) \rightarrow c \in (0, \frac{s}{N} \mathcal{S}_{q_s^*}^{\frac{N}{q_s}})$ và $u_n \rightarrow 0$ yếu trong W_ζ . Khi đó một trong hai khả năng sau xảy ra:

(i) $u_n \rightarrow 0$ trong W_ζ ;

(ii) tồn tại một dãy $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ và hằng số $R, \beta > 0$ sao cho

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^q dx \geq \beta > 0.$$

Chứng minh. Giả sử (ii) là sai, khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^q dx = 0$.

Vì W_ζ nhúng liên tục vào W , sử dụng Bổ đề 1.2.4, ta được $u_n \rightarrow 0$ trong $L^t(\mathbb{R}^N)$ với mọi $t \in (q, q_s^*)$. Từ giả thiết $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\zeta$ và Bổ đề 1.1.16, ta thu được

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|u_n\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} K_\zeta(u_n) Q(\zeta x) f(u_n) u_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+|^{q_s^*} dx \\ &\leq C_1 Q_{\max}(\delta \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + C(\delta) \|u_n\|_{L^\tau(\mathbb{R}^N)}) + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+|^{q_s^*} dx \quad (2.22) \end{aligned}$$

với mọi $\delta > 0$. Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+|^{q_s^*} dx = 0$ do $c \in (0, \frac{S}{N} \mathcal{S}_{q_s^*}^{\frac{N}{q_s}})$. Từ (2.22), khi $n \rightarrow \infty$, ta suy ra $u_n \rightarrow 0$ trong W_ζ . $\square$

Bổ đề 2.1.7. *Giả sử $\{\mathbf{v}_n\}$ là một dãy $(PS)_c$ cho J_ζ trong W_ζ sao cho $\mathbf{v}_n \rightarrow 0$ yếu trong W_ζ . Nếu $\mathbf{v}_n \not\rightarrow 0$ mạnh trong W_ζ , khi đó $c \geq c_{V_\infty, Q_\infty}$, với*

$$c_{V_\infty, Q_\infty} = \inf_{v \in \mathcal{M}_{V_\infty, Q_\infty}} \mathcal{I}_{V_\infty, Q_\infty}(v) = \inf_{v \in W \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} \mathcal{I}_{V_\infty, Q_\infty}(tv).$$

Chứng minh. Gọi $\{t_n\}$ là một dãy sao cho $\{t_n \mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{M}_{V_\infty, Q_\infty}$.

Khẳng định 1. Ta chứng minh rằng $\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n \leq 1$. Ngược lại, chọn một dãy con nếu cần, ta giả sử tồn tại một số thực dương $\delta > 0$ sao cho

$$t_n \geq 1 + \delta, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \quad (2.23)$$

Vì $\{\mathbf{v}_n\}$ là dãy $(PS)_c$ nên $\langle J'_\zeta(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n \rangle = o_n(1)$ khi $n \rightarrow \infty$ và $J_\zeta(\mathbf{v}_n) \rightarrow c$. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m ([\mathbf{v}_n]_{s,p_i}^{p_i} + \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y) F(\mathbf{v}_n(y)) Q(\zeta x) f(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x - y|^\mu} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{v}_n^+)^{q_s^*} dx + o_n(1). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Lưu ý rằng

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m-1} t^{p_i - q} ([\mathbf{v}_n]_{s,p_i}^{p_i} + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx) + [\mathbf{v}_n]_{s,q}^q + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty |\mathbf{v}_n|^q dx \\ &= \lambda Q_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(\mathbf{v}_n(y)) f(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{t_n^{q-1} |x - y|^\mu} dx dy + t^{q_s^* - q} \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{v}_n^+)^{q_s^*} dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Từ (2.24) và (2.25), ta có

$$\begin{aligned}
& \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{Q_\infty^2 F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{t_n^{q-1} |x-y|^\mu} - \frac{Q(\zeta y) Q(\zeta x) F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} \right) dx dy \\
& \leq \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(\zeta x)) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx + \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(\zeta x)) |\mathbf{v}_n|^q dx + o_n(1) \\
& \quad + (1 - t_n^{q_s^* - q}) \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{v}_n^+)^{q_s^*} dx. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
& Q_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(t_n \mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(t_n \mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{t_n^{q-1} |x-y|^\mu} dy dx \\
& \quad - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y) Q(\zeta x) F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} dy dx \\
& = Q_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{F(t_n \mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(t_n \mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{t_n^{q-1} |x-y|^\mu} - \frac{F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} \right) dy dx \\
& \quad + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(Q_\infty^2 - Q(\zeta y) Q(\zeta x)) F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} dy dx. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Theo điều kiện của các thể vị (V) và (Q) , với mọi $\zeta_* > 0$, tồn tại một số thực dương $R = R(\zeta_*) > 0$ sao cho

$$V(\zeta x) \geq V_\infty - \zeta_*, \quad Q(\zeta x) \leq Q_\infty + \zeta_* \quad \text{với mọi } |x| \geq R. \tag{2.28}$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned}
|Q_\infty^2 - Q(\zeta y) Q(\zeta x)| &= |(Q_\infty - Q(\zeta y)) Q_\infty + Q(\zeta y) (Q_\infty - Q(\zeta x))| \\
&\leq |(Q_\infty - Q(\zeta y))| Q_\infty + Q_{\max} |Q_\infty - Q(\zeta x)| \\
&\leq 2\zeta_* Q_{\max} \tag{2.29}
\end{aligned}$$

với mọi $|x| \geq R$ và $|y| \geq R$. Chú ý rằng W_ζ nhúng liên tục vào $L^t(\mathbb{R}^N)$ với mọi $t \in [p_i, (p_i)_s^*)$, $i = 1, \dots, m$ và là compact địa phương. Khi đó, ta có $v_n \rightarrow 0$ trong $L^{p_i}(B_R(0))$, $i = 1, \dots, m$. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(\zeta x)) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx \\
&= \int_{B_R(0)} (V_\infty - V(\zeta x)) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx + \int_{B_R^c(0)} (V_\infty - V(\zeta x)) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx \\
&\leq V_\infty \int_{B_R(0)} |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx + \zeta_* \int_{B_R^c(0)} |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx \\
&\leq o_n(1) + \frac{\zeta_*}{V_0} \int_{B_R^c(0)} V(\zeta x) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx \\
&\leq o_n(1) + \frac{\zeta_*}{V_0} \|\mathbf{v}_n\|_{W_\zeta}^{p_i} \leq o_n(1) + \frac{\zeta_* C}{m}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

với mọi $i = 1, \dots, m$ trong đó $C > 0$ là hằng số thích hợp. Kết hợp (2.26), (2.27) và (2.30), ta có

$$\begin{aligned}
& \lambda Q_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{F(t_n \mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(t_n \mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{t_n^{q-1} |x-y|^\mu} - \frac{F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} \right) dy dx \\
&\leq \lambda \int_{B_R(0)} \int_{B_R(0)} \frac{(Q_\infty^2 - Q(\zeta y) Q(\zeta x)) F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} dy dx \\
&+ \lambda \int_{B_R^c(0)} \int_{B_R^c(0)} \frac{(Q_\infty^2 - Q(\zeta y) Q(\zeta x)) F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} dy dx \\
&+ 2\lambda \int_{B_R^c(0)} \int_{B_R(0)} \frac{(Q_\infty^2 - Q(\zeta y) Q(\zeta x)) F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} dy dx \\
&+ \zeta_* C + o_n(1).
\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 1.1.16, tồn tại $C_0 > 0$ sao cho $\left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(\mathbf{v}_n(y))}{|x-y|^\mu} dy \right| \leq C_0$. Hơn nữa,

$$|Q_\infty^2 - Q(\zeta y) Q(\zeta x)| \leq 2Q_{\max}^2$$

trong $\mathbb{R}^N$, khi đó

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{F(t_n \mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(t_n \mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{t_n^{q-1} |x-y|^\mu} - \frac{F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} \right] dx dy \\
&\leq 2\zeta_* C + o_n(1)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

với $C > 0$ là hằng số thích hợp. Vì $\mathbf{v}_n \rightharpoonup 0$ trong W_ζ nên ta có thể sử dụng Bổ đề 1.1.10 để suy ra sự tồn tại của một dãy $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ và hai hằng số

dương R và β thỏa mãn

$$\int_{B_R(y_n)} |\mathbf{v}_n|^q dx \geq \beta > 0. \quad (2.32)$$

Ta ký hiệu $\mathbf{v}_n^-(x) = \min\{\mathbf{v}_n(x), 0\}$ và $\mathbf{v}_n^+(x) = \max\{\mathbf{v}_n(x), 0\}$. Vì $\{\mathbf{v}_n\}$ là dãy bị chặn trong W_ζ , nên $\{\mathbf{v}_n^-\}$ cũng là dãy bị chặn trong W_ζ và $\langle J'_\zeta(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n^- \rangle \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Theo điều kiện $f(t) = 0$ với mọi $t \in (-\infty, 0]$, ta có $\|\mathbf{v}_n^-\|_{W_\zeta} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Do đó $\mathbf{v}_n^- \rightarrow 0$ trong W_ζ . Đặt $\bar{w}_n = \mathbf{v}_n(x + y_n)$. Vì chuẩn $\|\cdot\|_{V_{\min}, W}$ là bất biến qua phép tịnh tiến nên

$$\|\bar{w}_n\|_{V_{\min}, W}^q = \|\mathbf{v}_n\|_{V_{\min}, W}^q \leq \|\mathbf{v}_n\|_{W_\zeta}^q$$

khi $V_{\min} \leq V(\zeta x)$. Do đó $\{\bar{w}_n\}$ là dãy bị chặn trong W . Trích một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử tồn tại $\bar{w} \in W$ sao cho $\bar{w}_n \rightarrow \bar{w}$ yếu trong W và $\bar{w}_n(x) \rightarrow \bar{w}(x)$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^N$. Từ Bổ đề Fatou, ta suy ra

$$\|\mathbf{w}^-\|_{V_{\min}, W} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}_n^-\|_{V_{\min}, W} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}_n^-\|_{W_\varepsilon} = 0.$$

Vậy $\bar{w} = \bar{w}^+$. Từ (2.32), ta có $\int_{B_R(0)} |\bar{w}|^q dx \geq \frac{\beta}{2} > 0$. Điều này kéo theo sự tồn tại của $a > 0$ và một tập con $\Omega \subset B_R(0)$ sao cho $|\Omega| > 0$ và $\bar{w}(x) > a > 0$, $\bar{w}_n(x) > \frac{a}{2} > 0$ với mọi $x \in \Omega$ khi n đủ lớn. Từ (2.31), ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\text{supp}(\bar{w}_n^+)} \int_{\text{supp}(\bar{w}_n^+)} \left[\frac{F(t_n \bar{w}_n(y)) f(t_n \bar{w}_n(x)) \bar{w}_n(x)}{t_n^{q-1} |x - y|^\mu} - \frac{F(\bar{w}_n(y)) f(\bar{w}_n(x)) \bar{w}_n(x)}{|x - y|^\mu} \right] dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{F(t_n \bar{w}_n(y)) \mathbf{f}(t_n \bar{w}_n(x)) \bar{w}_n(x)}{t_n^{q-1} |x - y|^\mu} - \frac{F(\bar{w}_n(y)) \mathbf{f}(\bar{w}_n(x)) \bar{w}_n(x)}{|x - y|^\mu} \right] dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{F(t_n \mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(t_n \mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{t_n^{q-1} |x - y|^\mu} - \frac{F(\mathbf{v}_n(y)) \mathbf{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x - y|^\mu} \right] dx dy \\ &\leq 2\zeta_* C + o_n(1). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Vì $\frac{\mathbf{f}(t)}{t^{\frac{q}{2}-1}}$ và $\frac{F(t)}{t^{\frac{q}{2}}}$ là các hàm tăng với mọi $t > 0$, nên từ (2.33), ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
0 &< \iint_{\Omega^2} \left[\frac{F((1+\delta)\bar{w}(y)) \mathfrak{f}((1+\delta)\bar{w}(x)) \bar{w}(x)}{(1+\delta)^{q-1}|x-y|^\mu} - \frac{F(\bar{w}(y)) \mathfrak{f}(\bar{w}(x)) \bar{w}(x)}{|x-y|^\mu} \right] dx dy \\
&= \int_{\Omega} \int_{\Omega} |\bar{w}(x)|^{\frac{q}{2}} |\bar{w}(y)|^{\frac{q}{2}} \\
&\quad \times \left[\frac{F((1+\delta)\bar{w}(y)) \mathfrak{f}((1+\delta)\bar{w}(x)) \bar{w}(x)}{((1+\delta)\bar{w}(y))^{\frac{q}{2}} |x-y|^\mu ((1+\delta)\bar{w}(x))^{\frac{q}{2}-1}} - \frac{F(\bar{w}(y)) \mathfrak{f}(\bar{w}(x)) \bar{w}(x)}{|\bar{w}(y)|^{\frac{q}{2}} |\bar{w}(x)|^{\frac{q}{2}} |x-y|^\mu} \right] dx dy \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\Omega} |\bar{w}_n(x)|^{\frac{q}{2}} |\bar{w}_n(y)|^{\frac{q}{2}} \\
&\quad \times \left[\frac{F(t_n \bar{w}_n(y)) \mathfrak{f}(t_n \bar{w}_n(x)) \bar{w}_n(x)}{(t_n \bar{w}_n(y))^{\frac{q}{2}} |x-y|^\mu (t_n \bar{w}_n(x))^{\frac{q}{2}-1}} - \frac{F(\bar{w}_n(y)) \mathfrak{f}(\bar{w}_n(x)) \bar{w}_n(x)}{|\bar{w}_n(y)|^{\frac{q}{2}} |\bar{w}_n(x)|^{\frac{q}{2}} |x-y|^\mu} \right] dx dy \\
&\leq \int_{\text{supp}(\bar{w}_n^+)} \int_{\text{supp}(\bar{w}_n^+)} \left[\frac{F(t_n \bar{w}_n(y)) \mathfrak{f}(t_n \bar{w}_n(x)) \bar{w}_n(x)}{t_n^{q-1} |x-y|^\mu} \right. \\
&\quad \left. - \frac{F(\bar{w}_n(y)) \mathfrak{f}(\bar{w}_n(x)) \bar{w}_n(x)}{|x-y|^\mu} \right] dx dy \\
&\leq 2\zeta_* C + o_n(1)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

với mọi $\zeta > 0$. Điều này là mâu thuẫn. Vậy **Khẳng định 1** được chứng minh. Bây giờ ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$. Trích ra một dãy con nếu cần thiết, ta giả sử $t_n \rightarrow 1$. Vì $J_\zeta(\mathbf{v}_n) \rightarrow c$ và $\{t_n \mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{M}_{V_\infty, Q_\infty}$, nên

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) &= J_\zeta(\mathbf{v}_n) = J_\zeta(\mathbf{v}_n) - \mathcal{I}_{V_\infty, Q_\infty}(t_n \mathbf{v}_n) + \mathcal{I}_{V_\infty, Q_\infty}(t_n \mathbf{v}_n) \\
&\geq J_\zeta(\mathbf{v}_n) - \mathcal{I}_{V_\infty, Q_\infty}(t_n \mathbf{v}_n) + c_{V_\infty, Q_\infty}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
&J_\zeta(\mathbf{v}_n) - \mathcal{I}_{V_\infty, Q_\infty}(t_n \mathbf{v}_n) \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{(1 - t_n^{p_i})}{p_i} [\mathbf{v}_n]_{s, p_i}^{p_i} + \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} (V(\zeta x) - t_n^{p_i} V_\infty) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx \\
&\quad + \lambda(Q_\infty^2 \mathcal{K}(t_n \mathbf{v}_n) - \mathcal{K}_\zeta(\mathbf{v}_n)) + \frac{t_n^{q_s^*} - 1}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{v}_n^+)^{q_s^*} dx.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$Q_\infty^2 \mathcal{K}(t_n \mathbf{v}_n) - \mathcal{K}_\zeta(\mathbf{v}_n) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{Q_\infty^2 F(t_n \mathbf{v}_n(y)) F(t_n \mathbf{v}_n(x))}{|x - y|^\mu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{Q(\zeta y) F(\mathbf{v}_n(y)) Q(\zeta x) F(\mathbf{v}_n(x))}{|x - y|^\mu} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(Q_\infty^2 - Q(\zeta x) Q(\zeta y)) F(t_n \mathbf{v}_n(y)) F(t_n \mathbf{v}_n(x))}{|x - y|^\mu} dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y) Q(\zeta x) (F(t_n \mathbf{v}_n(x)) F(t_n \mathbf{v}_n(y)) - F(\mathbf{v}_n(x)) F(\mathbf{v}_n(y)))}{|x - y|^\mu} dx dy \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} &F(t_n \mathbf{v}_n(x)) F(t_n \mathbf{v}_n(y)) - F(\mathbf{v}_n(x)) F(\mathbf{v}_n(y)) \\ &= F(t_n \mathbf{v}_n(x)) (F(t_n \mathbf{v}_n(y)) - F(\mathbf{v}_n(y))) + (F(t_n \mathbf{v}_n(x)) - F(\mathbf{v}_n(x))) F(\mathbf{v}_n(y)). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Từ giả thiết của (V) và (Q) , $\mathbf{v}_n \rightarrow 0$ trong $L^t(B_R(0))$, $t \in \{p_1, \dots, p_m\}$, $t_n \rightarrow 1$, (2.28), với mọi $|x| \geq R$, ta có

$$V(\zeta x) - t_n^{p_i} V_\infty = (V(\zeta x) - V_\infty) + (1 - t_n^{p_i}) V_\infty \geq -\zeta_* + (1 - t_n^{p_i}) V_\infty,$$

suy ra

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (V(\zeta x) - t_n^{p_i} V_\infty) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx \\ &= \int_{B_R(0)} (V(\zeta x) - t_n^{p_i} V_\infty) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx + \int_{B_R^c(0)} (V(\zeta x) - t_n^{p_i} V_\infty) |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx \\ &\geq (V_{\min} - t_n^{p_i} V_\infty) \int_{B_R(0)} |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx - \zeta_* \int_{B_R^c(0)} |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx \\ &\quad + V_\infty (1 - t_n^{p_i}) \int_{B_R^c(0)} |\mathbf{v}_n|^{p_i} dx \\ &\geq o_n(1) - \zeta_* C, \end{aligned} \quad (2.39)$$

với mọi $i = 1, \dots, m$. Do $\{\mathbf{v}_n\}$ là dãy bị chặn nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - t_n^{p_i})}{p_i} [\mathbf{v}_n]_{s, p_i}^{p_i} = 0, \quad (2.40)$$

với mọi $i = 1, \dots, m$. Kết hợp (2.36)-(2.40), ta có

$$\mathcal{J}_\zeta(\mathbf{v}_n) - \mathcal{I}_{V_\infty}(t_n \mathbf{v}_n) \geq \lambda(Q_\infty^2 \mathcal{K}(t_n \mathbf{v}_n) - \mathcal{K}_\zeta(\mathbf{v}_n)) + o_n(1) - 2\zeta_* C. \quad (2.41)$$

Vì $t_n \rightarrow 1$, sử dụng Định lý giá trị trung bình, điều kiện (f_2) , (2.37), (3.30) và Bổ đề 1.1.16, ta có $Q_\infty^2 \mathcal{K}(t_n \mathbf{v}_n) - \mathcal{K}_\zeta(\mathbf{v}_n) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Kết hợp (2.35) và (2.41), ta suy ra

$$c + o_n(1) \geq c_{V_\infty, Q_\infty} + o_n(1) - 2\zeta_* C.$$

Cho $n \rightarrow \infty$ và $\zeta_* \rightarrow 0$, ta thu được $c \geq c_{V_\infty, Q_\infty}$.

Trường hợp 2. Giả sử $\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0 < 1$. Khi đó, chọn một dãy con nếu cần, ta giả sử $t_n \rightarrow t_0 < 1$ và $t_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì $\langle \mathcal{I}'_{V_\infty, Q_\infty}(t_n \mathbf{v}_n), t_n \mathbf{v}_n \rangle = 0$ và $\mathcal{I}_{V_\infty, Q_\infty}(t_n \mathbf{v}_n) \geq c_{V_\infty, Q_\infty}$, $t \mapsto \frac{1}{q}f(t)t - \frac{1}{2}F(t)$ là hàm tăng khi $t > 0$, ta có

$$\begin{aligned} c_{V_\infty, Q_\infty} &\leq \mathcal{I}_{V_\infty, Q_\infty}(t_n \mathbf{v}_n) \\ &= \mathcal{I}_{V_\infty, Q_\infty}(t_n \mathbf{v}_n) - \frac{1}{q} \langle \mathcal{I}'_{V_\infty, Q_\infty}(t_n \mathbf{v}_n), t_n \mathbf{v}_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|t_n \mathbf{v}_n\|_{V_\infty, W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + \frac{\lambda Q_\infty^2}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(t_n \mathbf{v}_n(y)) \mathfrak{f}(t_n \mathbf{v}_n(x)) t_n \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} \\ &\quad - \frac{\lambda Q_\infty^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(t_n \mathbf{v}_n(y)) F(t_n \mathbf{v}_n(x))}{|x-y|^\mu} dx dy \\ &\quad + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |t_n \mathbf{v}_n^+|^{q_s^*} dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|\mathbf{v}_n\|_{V_\infty, W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + \frac{\lambda Q_\infty^2}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(\mathbf{v}_n(y)) \mathfrak{f}(\mathbf{v}_n(x)) \mathbf{v}_n(x)}{|x-y|^\mu} dx dy \\ &\quad - \frac{\lambda Q_\infty^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(\mathbf{v}_n(y)) F(\mathbf{v}_n(x))}{|x-y|^\mu} dx dy + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{v}_n^+|^{q_s^*} dx \\ &= J_\zeta(\mathbf{v}_n) - \frac{1}{q} \langle J'_\zeta(\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_n \rangle + o_n(1) = c + o_n(1). \end{aligned}$$

Điều này kéo theo $c \geq c_{V_\infty, Q_\infty}$. □

Bổ đề 2.1.8. Cho (u_n) là dãy $(PS)_c$ cho J_ζ , trong đó $c < c_{V_\infty, Q_\infty}$. Khi đó (u_n) là một dãy con hội tụ trong W_ζ .

Chứng minh. Đầu tiên, ta thấy rằng (u_n) bị chặn trong W_ζ . Trích một dãy con, ta có thể giả sử $u_n \rightarrow u$ yếu trong W_ζ , $u_n \rightarrow u$ trong $L^t_{loc}(\mathbb{R}^N)$ với mọi $t \in [1, (p_i)_s^*)$ với mọi $i = 1, \dots, m$ và $u_n \rightarrow u$ hầu khắp nơi trong $\mathbb{R}^N$. Ta kiểm tra được rằng $J'_\zeta(u) = 0$. Bây giờ, đặt $v_n = u_n - u$. Theo Bổ đề 1.1.18, ta có

$$\begin{aligned} J_\zeta(v_n) &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\|u_n\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}}{p_i} - \frac{\|u\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}}{p_i} \right) - \mathcal{K}_\zeta(u_n) + \mathcal{K}_\zeta(u) \\ &\quad - \frac{1}{q_s^*} \|u_n^+\|_{L^{q_s^*}(\mathbb{R}^N)}^{q_s^*} + \frac{1}{q_s^*} \|u^+\|_{L^{q_s^*}(\mathbb{R}^N)}^{q_s^*} + o_n(1) \\ &= J_\zeta(u_n) - J_\zeta(u) + o_n(1) \\ &= c - J_\zeta(u) + o_n(1) =: d + o_n(1). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Hơn nữa ta có thể chỉ ra được $J'_\zeta(v_n) = o_n(1)$. Thật vậy, theo Bổ đề 1.1.12 với $w_n = v_n$ và $w = u$, ta thu được

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |A_t(u_n) - A_t(v_n) - A_t(u)|^{t'} dx = o_n(1), \quad (2.43)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) \|v_n\|^{t-2} v_n - \|u_n\|^{t-2} u_n + \|u\|^{t-2} u^{t'} dx = o_n(1), \quad (2.44)$$

trong đó $t \in \{p_1, \dots, p_m\}$. Từ bất đẳng thức Hölder, với mọi $\phi \in W_\zeta$ sao cho $\|\phi\|_\zeta \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned} &| \langle J'_\zeta(v_n) - J'_\zeta(u_n) + J'_\zeta(u), \phi \rangle | \\ &\leq \sum_{t \in \{p_1, \dots, p_m\}} \left[\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |A_t(v_n) - A_t(u_n) - A_t(u)|^{t'} dx dy \right)^{\frac{1}{t'}} [\phi]_{s,t} \right. \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) \|v_n\|^{t-2} v_n - \|u_n\|^{t-2} u_n + \|u\|^{t-2} u^{t'} dx \right)^{\frac{1}{t'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta x) |\phi|^t dx \right)^{\frac{1}{t}} \Big] \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|v_n\|^{q_s^*-2} v_n - \|u_n\|^{q_s^*-2} u_n + \|u\|^{q_s^*-2} u^{(q_s^*)'} dx \right)^{\frac{1}{(q_s^*)'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{q_s^*} dx \right)^{\frac{1}{q_s^*}} \\ &\quad + \lambda | \langle \mathcal{K}'_\zeta(v_n) - \mathcal{K}'_\zeta(u_n) + \mathcal{K}'_\zeta(u), \phi \rangle |. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Kết hợp (2.43), (2.44), (2.45) và $J'_\zeta(\mathbf{u}_n) = 0$, $J'_\zeta(\mathbf{u}) = 0$, ta được $\langle J'_\zeta(\mathbf{v}_n), \phi \rangle = o_n(1)$ với mọi $\phi \in W_\zeta$ sao cho $\|\phi\|_\zeta \leq 1$. Theo điều kiện (f_2) , ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
& J_\zeta(\mathbf{u}) \\
&= J_\zeta(\mathbf{u}) - \frac{1}{q} \langle J'_\zeta(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle \\
&\geq \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|\mathbf{u}\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \\
&\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y)Q(\zeta x)}{|x-y|^\mu} \left(\frac{F(\mathbf{u}(y))f(\mathbf{u}(x))\mathbf{u}(x)}{q} - \frac{F(\mathbf{u}(y))F(\mathbf{u}(x))}{2} \right) dx dy \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Từ (2.42) và (2.46), ta suy ra

$$d \leq c < c_{V_\infty, Q_\infty},$$

kết hợp với Bổ đề 2.1.7, ta nhận được $\mathbf{v}_n \rightarrow 0$ trong W_ζ , tức là $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$ trong W_ζ . $\square$

Bổ đề 2.1.9. *Ta có $\limsup_{\zeta \rightarrow 0^+} c_\zeta \leq c_{V_{\min}, Q_{\max}}$.*

Chứng minh. Ta khẳng định rằng tồn tại $\bar{\zeta} > 0$ sao cho $c_\zeta < c_{V_{\min}, Q_{\max}}$ với mọi $\zeta \in (0, \bar{\zeta})$. Từ điều kiện (VQ) , ta có $V(0) = V_{\min}$ và $Q(0) = Q_{\max}$. Chọn hàm trơn $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ thỏa mãn

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in B_1(0), \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_2(0). \end{cases}$$

Ký hiệu $v_r(x) = \Phi(\frac{x}{r})w(x)$ với mỗi $r > 0$, $w \in W$ là một nghiệm dương không tầm thường với năng lượng cực tiểu của các bài toán giới hạn (P_{γ_1, γ_2}) (Theo Định lý 1.3.3). Khi đó tồn tại $t_{\zeta, r} > 0$ sao cho $t_{\zeta, r}v_r \in \mathcal{N}_\zeta$, ta có

$$\begin{aligned}
c_\zeta \leq J_\zeta(t_{\zeta, r}v_r) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \|t_{\zeta, r}v_r\|^{p_i} \\
&\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y)Q(\zeta x)F(t_{\zeta, r}v_r(y))F(t_{\zeta, r}v_r(x))}{|x-y|^\mu} dy dx \\
&\quad - \frac{1}{q_s^*} \|t_{\zeta, r}v_r\|_{L^{q_s^*}(\mathbb{R}^N)}^{q_s^*}.
\end{aligned}$$

Với mọi $u \in \mathcal{N}_\zeta$, ta có

$$\sum_{i=1}^m \|u\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y)Q(\zeta x)F(u(y))f(u(x))u(x)}{|x-y|^\mu} dy dx + \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{q_s^*} dx.$$

Vậy

$$\begin{aligned} J_\zeta(u)|_{\mathcal{N}_\zeta} &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \|u\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y)Q(\zeta x)F(u(y))F(u(x))}{|x-y|^\mu} dy dx - \frac{1}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{q_s^*} dx \\ &= J_\zeta(u) - \frac{1}{q} < J'_\zeta(u), u > \\ &\geq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta y)Q(\zeta x)F(u(y))}{|x-y|^\mu} \left[\frac{1}{q} f(u(x))u(x) - \frac{1}{2} F(u(x)) \right] dy dx \geq 0. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Do đó, từ (2.47), với mỗi $r > 0$, $\{t_{\zeta,r}\}$ là dãy bị chặn khi ζ đủ nhỏ. Thật vậy, giả sử rằng $\lim_{\zeta \rightarrow 0^+} t_{\zeta,r} = +\infty$, khi đó với r , cố định, ta có

$$J_\zeta(t_{\zeta,r}v_r) \leq \sum_{i=1}^m \frac{t_{\zeta,r}^{p_i}}{p_i} \|v_r\|_{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} - \frac{t_{\zeta,r}^{q_s^*}}{q_s^*} \|v_r\|_{L^{q_s^*}(\mathbb{R}^N)}^{q_s^*} \rightarrow -\infty.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.47). Do đó, ta có thể giả sử $t_{\zeta,r} \rightarrow t_r$ khi $\zeta \rightarrow 0^+$.

Chú ý rằng v_r có giá compact, khi đó

$$\begin{aligned} \limsup_{\zeta \rightarrow 0^+} c_\zeta &\leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \|t_r v_r\|_{V_{\min}}^{p_i} - \frac{\lambda Q_{\max}^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(t_r v_r(y))F(t_r v_r(x))}{|x-y|^\mu} dy dx \\ &\quad - \frac{1}{q_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} |t_r v_r|^{q_s^*} dx = \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(t_r v_r) \end{aligned}$$

theo Định lý Vitali. Ta nhắc lại rằng $t_r v_r, w \in \mathcal{M}_{V_{\min}, Q_{\max}}$ và theo [3, Bổ đề 2.2], $\lim_{r \rightarrow +\infty} v_r = w$ trong W . Do đó, theo điều kiện (f_5) ta suy ra $\lim_{r \rightarrow \infty} t_r = 1$ và

$$\limsup_{\zeta \rightarrow 0^+} c_\zeta \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(t_r v_r) = \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(w) = c_{V_{\min}, Q_{\max}}.$$

Vậy $c_\zeta < c_{V_\infty, Q_\infty}$ với mọi $\zeta > 0$ đủ nhỏ. □

Từ cơ sở phương pháp biến phân đã trình bày ở trên, ta chỉ ra sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu cho bài toán (2.1) với mọi ζ đủ nhỏ. Kết quả chính của chương này được phát biểu như sau:

Định lý 2.1.10. *Giả sử $(V), (Q), (VQ)$ và $(f_1) - (f_3)$ được thỏa mãn. Khi đó tồn tại $\zeta_0 > 0$ sao cho bài toán (2.1) có nghiệm với năng lượng cực tiểu với mọi $\zeta \in (0, \zeta_0)$.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.1.3, J_ζ thỏa mãn các điều kiện hình học của Định lý Vượt núi. Do đó tồn tại dãy $(PS)\text{-}\{u_n\}$ của J_ζ với mức c_ζ . Áp dụng Bổ đề 2.1.8 và Bổ đề 2.1.9, ta chỉ ra rằng $c_\zeta < c_{V_\infty, Q_\infty}$ với $\zeta > 0$ đủ nhỏ. Khi đó tồn tại nghiệm yếu cho bài toán (2.1) là giới hạn yếu của dãy $\{u_n\}$. Hơn nữa Theo (2.21), nghiệm yếu là nghiệm với năng lượng cực tiểu. $\square$

2.2 Sự cô đặc của nghiệm

Tiếp nối kết quả về sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu u_ζ , $\zeta \in (0, \zeta_0)$, trong mục này ta nghiên cứu hiện tượng cô đặc nghiệm khi $\zeta \rightarrow 0^+$ sau một phép tịnh tiến phù hợp. Bổ đề dưới đây thiết lập sự tồn tại của dãy tịnh tiến $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ nhằm khôi phục tính compact và chứng minh sự hội tụ của dãy nghiệm ban đầu.

Bổ đề 2.2.1. *Giả sử $\zeta_n \rightarrow 0^+$ và $\{u_n\} := \{u_{\zeta_n}\}$ là nghiệm với năng lượng cực tiểu của (2.1). Khi đó tồn tại dãy $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ sao cho khi trích một dãy con $\{y_n\} : y_n = \zeta_n \tilde{y}_n \rightarrow y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$. Hơn nữa, $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$ hội tụ mạnh trong W đến nghiệm với năng lượng cực tiểu v của phương trình sau trong $\mathbb{R}^N$*

$$\sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s u + V_{\min} \sum_{i=1}^m |u|^{p_i-2} u = \lambda Q_{\max}^2 \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u(y)) \right] f(u) + |u|^{q_s^*-2} u. \quad (2.48)$$

Chứng minh. Cho $\{u_n\}$ là một dãy nghiệm thu được từ Định lý 2.1.10 với $\zeta_n \rightarrow 0$. Khi đó ta có

$$J_{\zeta_n}(u_n) = J_{\zeta_n}(u_n) - \frac{1}{\theta} \langle J'_{\zeta_n}(u_n), u_n \rangle \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|_{W_{V, \zeta_n}^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_s^*} dx \\ &\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta_n y) Q(\zeta_n x) F(u_n(y))}{|x - y|^\mu} \left[\frac{1}{\theta} \mathfrak{f}(u_n(x)) u_n(x) - \frac{1}{2} F(u(x)) \right] dx \\ &\geq \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|_{W_{V, \zeta_n}^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Khi đó $\{u_n\}$ là một dãy bị chặn trong W . Đầu tiên, ta chỉ ra rằng tồn tại một dãy $\{\tilde{y}_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $R > 0$ và $\delta > 0$ thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(\tilde{y}_n)} |u_n|^q dx \geq \delta > 0. \quad (2.51)$$

Thật vậy, nếu với mọi $R > 0$, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^q dx = 0.$$

Từ Bổ đề 1.2.4, ta chỉ ra rằng $u_n \rightarrow 0$ trong $L^t(\mathbb{R}^N)$ với mọi $t \in (q, q_s^*)$. Chú ý rằng $J(u_{\zeta_n}) = c_{\zeta_n}$ và $\langle J'_{\zeta_n}(u_n), u_n \rangle = 0$ với mọi n . Theo Bổ đề 2.1.9 và Định lý 1.3.3, ta có $c_{\zeta_n} < c_{V_\infty, Q_\infty} \in (0, \frac{s}{N} \mathcal{S}_{q_s^*}^{\frac{N}{q_s}})$ với mọi λ đủ lớn. Từ điều kiện (f_1) và tính toán như Định lý 1.3.3, ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta_n x) Q(\zeta_n y) F(u_n(y)) \mathfrak{f}(u_n(x)) u_n(x)}{|x - y|^\mu} dy dx = 0.$$

Vì $u_n \in \mathcal{N}_{\zeta_n}$, nên

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|u_n\|_{W_{V, \zeta_n}^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(\zeta_n x) Q(\varepsilon_n y) F(u_n(y)) \mathfrak{f}(u_n(x)) u_n(x)}{|x - y|^\mu} dy dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_s^*} dx. \end{aligned}$$

Hơn nữa, theo Định lý 1.3.3, ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_s^*} dx = 0$. Vậy $\|u_n\|_{W_{\zeta_n}} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Điều này mâu thuẫn với Mệnh đề 2.1.5. Do đó (2.51) là đúng.

Đặt $v_n = u_n(x + \tilde{y}_n)$, $V_n(x) = V(\zeta_n x + \zeta_n \tilde{y}_n)$ và $Q_n(x) = Q(\zeta_n x + \zeta_n \tilde{y}_n)$. Chú ý rằng $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong W , khi trích một dãy con cần thiết, tồn tại phần tử $v \in W$ sao cho $v_n \rightarrow v$ yếu trong W và $v_n(x) \rightarrow v(x)$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^N$. Suy ra v_n là một nghiệm của phương trình:

$$\sum_{i=1}^m ((-\Delta)_{p_i}^s u + V_n(x)|u|^{p_i-2}u) = \lambda \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q_n(y)F(u(y))) \right] Q_n(x)f(u) + |u|^{q_s^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (2.52)$$

với phiếm hàm năng lượng

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\zeta_n}(v_n) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} ([v_n]_{s,p_i}^{p_i} + \int_{\mathbb{R}^N} V_n(x)|v_n|^{p_i} dx) \\ &\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q_n(y)Q_n(x)F(v_n(y))F(v_n(x))}{|x-y|^\mu} dy dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q_s^*} dx = I_{\zeta_n}(u_n) = c_{\zeta_n}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Chú ý rằng từ Bổ đề 2.1.9, ta có $\limsup_{\zeta \rightarrow 0} c_\zeta \leq c_{V_{\min}, Q_{\max}}$.

Khẳng định 1. Ta khẳng định rằng dãy $\{\zeta_n \tilde{y}_n\}$ là bị chặn. Thật vậy, ta giả sử dãy $\{\zeta_n \tilde{y}_n\}$ không bị chặn. Khi đó, trích một dãy con cần thiết, ta có thể giả sử rằng $\zeta_n \tilde{y}_n \rightarrow \infty$. Vì V và Q là các hàm bị chặn nên ta giả sử $V(\zeta_n \tilde{y}_n) \rightarrow V_0 \geq V_\infty > V_{\min}$ và $Q(\zeta_n \tilde{y}_n) \rightarrow Q_0 \leq Q_\infty < Q_{\max}$ khi $n \rightarrow \infty$. Hơn nữa, với mọi $R > 0$, V và Q là liên tục đều trên $B_R(0)$, ta thu được

$$|V_n(x) - V_0| \leq |V(\zeta_n(x + \tilde{y}_n)) - V(\zeta_n \tilde{y}_n)| + |V(\zeta_n \tilde{y}_n) - V_0| \rightarrow 0$$

khi $n \rightarrow \infty$ trên $B_R(0)$. Tương tự, ta cũng có

$$|Q_n(x) - Q_0| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ trên } B_R(0). \quad (2.54)$$

Từ [54], với mọi $\phi \in W$, ta có

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|^{p_i-2} (v_n(x) - v_n(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x-y|^{N+p_i s}} dx dy \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^{p_i-2} (v(x) - v(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x-y|^{N+p_i s}} dx dy \end{aligned} \quad (2.55)$$

khi $n \rightarrow \infty$ với mọi $i = 1, \dots, m$. Tiếp theo, theo Định lý hội tụ Vitali, ta suy ra

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q_n(y)F(v_n(y))) \right] Q_n(x) \mathfrak{f}(v_n) \phi dx \\ & \rightarrow Q_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right) \mathfrak{f}(v(x)) \phi(x) dx. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Từ (2.51), ta có $v \not\equiv 0$. Bằng các lập luận tương tự Bổ đề 1.1.17, tồn tại $C_* > 0$ sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mathfrak{f}(v_n) \phi| dx \leq C_*. \quad (2.57)$$

Áp dụng Bổ đề 1.1.16 và (2.57), tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q_n(y)F(v_n(y))) \right] Q_n(x) \mathfrak{f}(v_n) \phi \right| dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\mathfrak{f}(v_n) \phi| dx < +\infty. \quad (2.58)$$

Tương tự, ta cũng thu được $\int_{\mathbb{R}^N} \left| \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] \mathfrak{f}(v(x)) \phi(x) \right| dx < +\infty$. Vì vậy,

$$\left\{ \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q_n(y)F(v_n(y))) \right] Q_n(x) \mathfrak{f}(v_n) \phi - \left[\frac{Q_0^2}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] \mathfrak{f}(v(x)) \phi \right\} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Khi đó tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho

$$\left| \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q_n(y)F(v_n(y))) \right] Q_n(x) \mathfrak{f}(v_n) \phi - \left[\frac{Q_0^2}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] \mathfrak{f}(v(x)) \phi \right| \leq K$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^N$. Do đó với mọi $\delta > 0$, tồn tại $\tau = \delta/K$ sao cho với tập E đếm được bất kỳ thỏa mãn $|E| < \delta/K$, ta có

$$\begin{aligned} & \int_E \left| \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q_n(y)F(v_n(y))) \right] Q_n(x) \mathfrak{f}(v_n) \phi - \left[\frac{Q_0^2}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] \mathfrak{f}(v(x)) \phi \right| dx \\ & \leq |E|K = \tau \end{aligned}$$

với mọi n . Vậy

$$\left\{ \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q_n(y)F(v_n(y))) \right] Q_n(x) \mathfrak{f}(v_n) \phi - \left[\frac{Q_0^2}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] \mathfrak{f}(v(x)) \phi \right\}_n$$

là đồng khả tích trên $\mathbb{R}^N$. Lập luận tương tự như Bổ đề 1.1.17 và Q là hàm bị chặn, ta suy ra rằng tồn tại $C_* > 0$ sao cho

$$\int_{B_R^c(0)} \left| \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q_n(y)F(v_n(y))) \right] Q_n(x)f(v_n)\phi - \left[\frac{Q_0^2}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] f(v(x))\phi \right| dx < C_* \tau_* \quad (2.59)$$

khi $R > 0$ đủ lớn. Chú ý rằng

$$\left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q_n(y)F(v_n(y))) \right] Q_n(x)f(v_n)\phi - \left[\frac{Q_0^2}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] f(v(x))\phi \rightarrow 0$$

hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^N$. Do đó, theo Định lý hội tụ của Vitali, (2.56) được chứng minh. Lập luận tương tự, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^B} V_n(x)|v_n|^{p_i-2}v_n\phi dx = V_0 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p_i-2}v\phi dx, i = 1, \dots, m. \quad (2.60)$$

Vậy $\langle \mathcal{I}'_{V_0, Q_0}(v), \phi \rangle = 0$ với mọi $\phi \in W$.

Kết hợp (2.55), (2.60) và (2.56), ta có v là một nghiệm của phương trình:

$$\sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s u + V_0 \sum_{i=1}^m |u|^{p_i-2}u = \lambda Q_0^2 \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right] f(u) + |u|^{q_s^*-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Sử dụng Bổ đề Fatou và (2.53), ta thu được

$$\begin{aligned} c_{V_{\min}, Q_{\max}} &< c_{V_0, Q_0} \leq \mathcal{I}_{V_0, Q_0}(v) = \mathcal{I}_{V_0, Q_0}(v) - \frac{1}{q} < \mathcal{I}'_{V_0, Q_0}(v), v > \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|v\|_{V_0, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q_s^*} dx \\ &\quad + Q_0^2 \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] \left(\frac{1}{q} f(v)v - \frac{1}{2} F(v) \right) dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{I}_{\zeta_n}(v_n) - \frac{1}{q} < \tilde{I}'_{\zeta_n}(v_n), v_n > \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(J_{\zeta_n}(u_n) - \frac{1}{q} < J'_{\zeta_n}(u_n), u_n > \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} c_{\zeta_n} \leq c_{V_{\min}, Q_{\max}}. \end{aligned}$$

Điều này là mâu thuẫn. Vậy $\{\zeta_n \tilde{y}_n\}$ phải bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, ta có thể giả sử rằng tồn tại một điểm $y \in \mathbb{R}^N$ sao cho $\zeta_n \tilde{y}_n \rightarrow y$ khi $n \rightarrow \infty$, sau khi lấy một dãy con nếu cần thiết.

Khẳng định 2. $y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$.

Nếu $y \notin \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$, thì $V(y) > V_{\min}$ hoặc $Q(y) < Q_{\max}$ và

$$\begin{aligned}
c_{V_{\min}, Q_{\max}} &< c_{V(y), Q(y)} \leq \mathcal{I}_{V(y), Q(y)}(v) = \mathcal{I}_{V(y), Q(y)}(v) - \frac{1}{q} < \mathcal{I}'_{V(y), Q(y)}(v), v > \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|v\|_{V(y), W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q_s^*} dx \\
&\quad + \lambda Q(y)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] \left(\frac{1}{q} \mathfrak{f}(v)v - \frac{1}{2} F(v) \right) dx \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{I}_{\zeta_n}(v_n) - \frac{1}{q} < \tilde{I}'_{\zeta_n}(v_n), v_n > \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} c_{\zeta_n} \leq c_{V_{\min}, Q_{\max}}.
\end{aligned}$$

Điều này là không thể. Vậy Khẳng định 2 được chứng minh.

Khẳng định 3. $v_n \rightarrow v$ mạnh trong W . Lập luận tương tự Khẳng định 1 ta có $\mathcal{I}'_{V_{\min}, Q_{\max}}(v) = 0$. Tiếp theo ta cần chứng minh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} = \|v\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}, i = 1, \dots, m. \quad (2.61)$$

Từ (2.61), ta có $v_n \rightarrow v$ mạnh trong W , theo Bổ đề của Brezis-Lieb. Ta cũng có

$$\|v\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}, i = 1, \dots, m \quad (2.62)$$

theo Bổ đề Fatou. Bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử rằng

$$\|v\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}$$

với $i \in \{1, \dots, m\}$.

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
c_{V_{\min}, Q_{\max}} + o_n(1) &= \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(v_n) - \frac{1}{q} < \mathcal{I}'_{V_{\min}, Q_{\max}}(v_n), v_n > \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q_s^*} dx \\
&\quad + Q_{\max}^2 \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n(y)) \right] \left(\frac{1}{q} \mathfrak{f}(v_n)v_n - \frac{1}{2} F(v_n) \right) dx.
\end{aligned}$$

Sử dụng điều kiện (f_2) và Bổ đề Fatou, ta thu được

$$\begin{aligned}
c_{V_{\min}, Q_{\max}} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \\
&\quad + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_s^*} \right) \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q_s^*} dx \\
&\quad + \lambda Q_{\max}^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n(y)) \right] \left[\frac{1}{q} f(v_n) v_n - \frac{F(v_n)}{2} \right] dx \\
&> \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|v\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q_s^*} dx \\
&\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} Q_{\max}^2 \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right] \left[\frac{1}{q} f(v) v - \frac{F(v)}{2} \right] dx \\
&= \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(v) - \frac{1}{q} < \mathcal{I}'_{V_{\min}, Q_{\max}}(v), v > = \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(v) \geq c_{V_{\min}, Q_{\max}},
\end{aligned}$$

điều này là mâu thuẫn. Vậy

$$\|v\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i}, i = 1, \dots, m. \quad (2.63)$$

Kết hợp (2.62) và (2.63), ta thu được (2.61).

Khẳng định 4. v là một nghiệm với năng lượng cực tiểu của (2.48). Thật vậy, v là nghiệm của (2.48) và nó thỏa mãn

$$\begin{aligned}
c_{V(y), Q(y)} &\leq \mathcal{I}_{V(y), Q(y)}(v) \\
&= \mathcal{I}_{V(y), Q(y)}(v) - \frac{1}{q} < \mathcal{I}'_{V(y), Q(y)}(v), v > \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|v\|_{V(y), W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \\
&\quad + Q(y)^2 \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v(y)) \right] \left(\frac{1}{q} f(v) v - \frac{1}{2} F(v) \right) dx \\
&\quad + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q_s^*} dx.
\end{aligned}$$

Theo Bổ đề Fatou và $y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$, ta suy ra

$$\begin{aligned}
c_{V_{\min}, Q_{\max}} &= c_{V(y), Q(y)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m=1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \|v\|_{V_n(y), W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \\
&+ \lambda \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} Q_n(x) Q_n(y) \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n(y)) \right] \left(\frac{1}{q} f(v_n(x)) v_n(x) - \frac{F(v_n(x))}{2} \right) dx \\
&+ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q_s^*} dx \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{I}_{\zeta_n}(v_n) - \frac{1}{q} \langle \tilde{I}'_{\zeta_n}(v_n), v_n \rangle \right) \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(J_{\zeta_n}(u_n) - \frac{1}{q} \langle J'_{\zeta_n}(u_n), u_n \rangle \right) \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} c_{\zeta_n} \leq c_{V_{\min}, Q_{\max}}.
\end{aligned}$$

Vậy $\mathcal{I}_{V(y), Q(y)}(v) = \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(v) = c_{V_{\min}, Q_{\max}}$, và v là nghiệm với năng lượng cực tiểu của (2.48). $\square$

Bổ đề 2.2.2. Giả sử $\zeta_n \rightarrow 0^+$ và $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\zeta_n}$ thỏa mãn $J_{\zeta_n}(u_n) \rightarrow c_{V_{\min}, Q_{\max}}$. Khi đó tồn tại $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ sao cho khi chọn một dãy con cần thiết ta được $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$ hội tụ mạnh trong W . Hơn nữa, $y_n = \zeta_n \tilde{y}_n \rightarrow y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$.

Chứng minh. Vì $\langle J'_{\zeta_n}(u_n), u_n \rangle = 0$ và $J_{\zeta_n}(u_n) \rightarrow c_{V_{\min}, Q_{\max}}$ nên (u_n) bị chặn trong W . Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại một dãy $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ và hằng số $R > 0$ và $\beta > 0$ thỏa mãn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(\tilde{y}_n)} |u_n|^q dx \geq \beta > 0. \quad (2.64)$$

Giả sử khẳng định (2.64) là sai. Khi đó với mọi $R > 0$ ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^q dx = 0.$$

Lại có (u_n) là bị chặn trong W , khi đó từ Bổ đề 1.1.10, ta suy ra $u_n \rightarrow 0$ trong $L^t(\mathbb{R}^N)$ với mọi $t \in (q, q_s^*)$. Khi λ đủ lớn, ta có

$$c_{V_{\min}, Q_{\max}} \in (0, \frac{s}{N} \mathcal{S}_{q_s^*}^{\frac{N}{q_s}}). \quad (2.65)$$

Theo Bổ đề 1.1.16 và (f_2) , với mọi $\tau_* > 0$ tồn tại $C_{\tau_*} > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * Q(\zeta_n y) F(u_n) \right] Q(\zeta_n x) f(u_n) u_n dx \right| \\ & \leq C_2 (\tau_* \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q + C_{\tau_*} \|u_n\|_{L^\tau(\mathbb{R}^N)}^\tau), \end{aligned} \quad (2.66)$$

trong đó $C_2 > 0$ là một hằng số phù hợp. Sử dụng giả thiết $\langle J'_{\zeta_n}(u_n), u_n \rangle = 0$ và tính toán tương tự như Định lý 1.3.3, ta thu được $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{q_s^*} dx = 0$. Do đó $\|u_n\|_{\zeta_n} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Suy ra $J_{\zeta_n}(u_n) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Điều này mâu thuẫn với $J_{\zeta_n}(u_n) \rightarrow c_{V_{\min}, Q_{\max}} > 0$. Đặt $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y}_n)$. Khi đó (v_n) là dãy bị chặn trong W và từ (2.64), ta có thể giả sử rằng $v_n \rightarrow v \neq 0$ trong W khi $n \rightarrow \infty$. Cố định $t_n > 0$ sao cho $\tilde{v}_n = t_n v_n \in \mathcal{M}_{V_{\min}, Q_{\max}}$. Vì $u_n \in \mathcal{N}_{\zeta_n}$ nên

$$\begin{aligned} c_{V_{\min}, Q_{\max}} & \leq \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(\tilde{v}_n) = \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(t_n u_n) \leq J_{\zeta_n}(t_n u_n) + o_n(1) \\ & \leq J_{\zeta_n}(u_n) + o_n(1) = c_{V_{\min}, Q_{\max}} + o_n(1), \end{aligned}$$

suy ra $\mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(\tilde{v}_n) \rightarrow c_{V_{\min}, Q_{\max}}$. Ta giả sử rằng $t_n \rightarrow t_0 > 0$ khi $n \rightarrow \infty$ và $\tilde{v}_n \rightarrow t_0 v := \tilde{v} \neq 0$ yếu trong W và $\mathcal{I}'_{V_{\min}, Q_{\max}}(\tilde{v}) = 0$. Sử dụng Bổ đề Brezis-Lieb [20] và Bổ đề 1.1.17, ta có

$$\mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(\tilde{v}_n - \tilde{v}) \rightarrow c_{V_{\min}, Q_{\max}} - \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(\tilde{v}) = 0 \text{ và } \mathcal{I}'_{V_{\min}, Q_{\max}}(\tilde{v}_n - \tilde{v}) \rightarrow 0$$

khi $n \rightarrow \infty$. Vậy tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \|\tilde{v}_n - \tilde{v}\|_{V_{\min}, W^{s, p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} \\ & \leq C \left[\mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(\tilde{v}_n - \tilde{v}) - \frac{1}{\theta} \langle \mathcal{I}'_{V_{\min}, Q_{\max}}(\tilde{v}_n - \tilde{v}), \tilde{v}_n - \tilde{v} \rangle \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

khi $n \rightarrow \infty$, nghĩa là

$$\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} \text{ trong } W. \quad (2.67)$$

Vì $t_n \rightarrow t_0$ với $t_0 > 0$ nên $v_n \rightarrow v$ trong W khi $n \rightarrow \infty$.

Ký hiệu $y_n = \zeta_n \tilde{y}_n$, lấy một dãy con nếu cần thiết, ta sẽ chứng minh rằng $y_n \rightarrow y$ với mọi $y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$. Đầu tiên, ta chỉ ra rằng (y_n) bị chặn. Bằng phương pháp phản chứng, giả sử rằng $|y_n| \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$. Từ (2.67),

$V_{\min} < V_{\infty}$ và $Q_{\max} > Q_{\infty}$, ta có

$$\begin{aligned}
c_{V_{\min}, Q_{\max}} &= \mathcal{I}_{V_{\min}, Q_{\max}}(\tilde{v}) < \mathcal{I}_{V_{\infty}, Q_{\infty}}(\tilde{v}) \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{t \in \{p_1, \dots, p_m\}} \left(\frac{1}{t} [\tilde{v}_n]_{s,t}^t + \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta_n x + y_n) |\tilde{v}_n|^t dx \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda Q_{\infty}^2}{2} \mathcal{K}(\tilde{v}_n) \right] \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in \{p_1, \dots, p_m\}} \left(\frac{t_n^t}{t} [u_n]_{s,t}^t + \frac{t_n^t}{t} \int_{\mathbb{R}^N} V(\zeta_n z) |u_n|^t dz \right) \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{Q(\zeta_n z) Q(\zeta_n \bar{z}) F(t_n u_n(\bar{z})) F(t_n u_n(z))}{|z - \bar{z}|^{\mu}} dz d\bar{z} \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} J_{\zeta_n}(t_n u_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_{\zeta_n}(u_n) = c_{V_{\min}, Q_{\max}},
\end{aligned}$$

điều này là vô lý. Do đó, (y_n) là một dãy bị chặn, khi trích ra một dãy con cần thiết, ta có $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}^N$. Dễ thấy, $y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$. Ngược lại, nếu $y \notin \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$, khi đó $V_{\min} < V(y)$ hoặc $Q_{\max} > Q(y)$. Theo lập luận của bất đẳng thức trước đó, ta suy ra mâu thuẫn. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Tiếp theo, ta đưa ra ước lượng L^{∞} thông qua phương pháp lặp Moser trong [52, 6].

Bổ đề 2.2.3. Cho v_n là một nghiệm với năng lượng cực tiểu của bài toán

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v_n + \sum_{i=1}^m V_n(x) |v_n|^{p_i-2} v_n \\ = \lambda \left(\frac{1}{|x|^{\mu}} * (Q_n(y) F(v_n)) \right) Q_n(x) f(v_n) + |v_n|^{q_s^*-2} v_n \text{ trong } \mathbb{R}^N \\ v_n \in W, \quad v_n \geq 0 \text{ trong } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.68)$$

trong đó $V_n(x) = V(\zeta_n x + \zeta_n \tilde{y}_n)$, $Q_n(x) = Q(\zeta_n x + \zeta_n \tilde{y}_n)$ và $\zeta_n \tilde{y}_n \rightarrow y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$. Nếu $v_n \rightarrow v \neq 0$ trong W , khi đó tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$|v_n|_{\infty} \leq C \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Hơn nữa ta có

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v_n(x) = 0 \text{ hầu khắp nơi trong } n \in \mathbb{N},$$

và $|v_n|_{\infty} \geq \sigma$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và hằng số $\sigma > 0$.

Chứng minh. Với mọi $L > 0$ và $\beta > 1$, ta ký hiệu

$$\gamma(v_n) = \gamma_{L,\beta}(v_n) = v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} \in W_\zeta,$$

trong đó $v_{L,n} = \min\{v_n, L\}$. Theo [4], ta có

$$\begin{aligned} & |\Gamma(v_n)(x) - \Gamma(v_n)(y)|^q \\ & \leq |v_n(x) - v_n(y)|^{q-2} (v_n(x) - v_n(y)) \left(\left(v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} \right)(x) - \left(v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} \right)(y) \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

và

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|^{p_i-2} (v_n(x) - v_n(y))}{|x - y|^{N+p_i s}} \\ & \quad \left[\left(v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} \right)(x) - \left(v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} \right)(y) \right] dx dy \geq 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

với mọi $i = 1, \dots, m-1$. Lấy $\gamma(v_n) = v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)}$ là hàm thử trong (2.68). Từ (2.69) và (2.70), ta thu được

$$\begin{aligned} & [\Gamma(v_n)]_{s,q}^q + \int_{\mathbb{R}^N} V_n(x) |v_n|^{q(\beta-1)} v_n dx \\ & \leq \sum_{i=1}^{m-1} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|^{p_i-2} (v_n(x) - v_n(y))}{|x - y|^{N+p_i s}} \\ & \quad \times \left[\left(v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} \right)(x) - \left(v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} \right)(y) \right] dx dy \\ & \quad + \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|^{q-2} (v_n(x) - v_n(y))}{|x - y|^{N+qs}} \\ & \quad \times \left[\left(v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} \right)(x) - \left(v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} \right)(y) \right] dx dy \\ & \quad + \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} V_n(x) v_n^{p_i} v_{L,n}^{q(\beta-1)} dx \\ & = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * Q_n(y) F(v_n) \right) Q_n(x) f(v_n) v_n v_{L,n}^{q(\beta-1)} dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q_s^*} v_{L,n}^{q(\beta-1)} dx. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Vì $\Gamma(v_n) \geq \frac{1}{\beta} v_n v_{L,n}^{\beta-1}$, nên

$$[\Gamma(v_n)]_{s,q}^q \geq S_*^{-1} \|\Gamma(v_n)\|_{L^{q_s^*}(\mathbb{R}^N)}^q \geq \left(\frac{1}{\beta} \right)^q S_*^{-1} \|v_n v_{L,n}^{\beta-1}\|_{L^{q_s^*}(\mathbb{R}^N)}^q, \quad (2.72)$$

trong đó S_* là hằng số phù hợp. Chú ý rằng (v_n) là dãy bị chặn và sử dụng Bổ đề 1.1.16, tồn tại một hằng số $C_0 > 0$ sao cho

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathbb{K}(v_n)|_\infty \leq C_0. \quad (2.73)$$

Từ các giả thiết của f , với mọi $\xi > 0$, tồn tại $C_\xi > 0$ sao cho

$$|f(v_n)| \leq \xi |v_n|^{q^*-1} + C_\xi |v_n|^{q_s^*-1}. \quad (2.74)$$

Chọn $\xi \in \left(0, \frac{V_{\min}}{\lambda C_0 Q_{\max}^2}\right)$ và sử dụng (2.71)-(2.74) kết hợp cùng tính bị chặn của Q ta suy ra tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\|w_{L,n}\|_{L^{q_s^*}(\mathbb{R}^N)}^q \leq C \beta^q \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q_s^*} v_{L,n}^{q(\beta-1)} dx, \quad (2.75)$$

trong đó $w_{L,n} := v_n v_{L,n}^{\beta-1}$. Ta lấy $\beta = \frac{q_s^*}{q}$ và cố định $R > 0$. Vì $0 \leq v_{L,n} \leq v_n$ nên

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q_s^*} v_{L,n}^{q(\beta-1)} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q_s^*-q} v_n^q v_{L,n}^{q_s^*-q} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q_s^*-q} \left(v_n v_{L,n}^{\frac{q_s^*-q}{q}} \right)^q dx \\ &\leq \int_{\{v_n < R\}} R^{q_s^*-q} v_n^{q_s^*} dx + \int_{\{v_n > R\}} v_n^{q_s^*-q} \left(v_n v_{L,n}^{\frac{q_s^*-q}{q}} \right)^q dx \\ &\leq \int_{\{v_n < R\}} R^{q_s^*-q} v_n^{q_s^*} dx + \left(\int_{\{v_n > R\}} v_n^{q_s^*} dx \right)^{\frac{q_s^*-q}{q_s^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(v_n v_{L,n}^{\frac{q_s^*-q}{q}} \right)^{q_s^*} dx \right)^{\frac{q}{q_s^*}}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Vì $v_n \rightarrow v$ trong W ta chọn $R > 0$ đủ lớn sao cho

$$\left(\int_{\{v_n > R\}} v_n^{q_s^*} dx \right)^{\frac{q_s^*-q}{q_s^*}} \leq \eta \beta^{-q}, \quad (2.77)$$

trong đó $\eta > 0$. Kết hợp (2.75)-(2.77) ta có

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(v_n v_{L,n}^{\frac{q_s^*-q}{q}} \right)^{q_s^*} dx \right)^{\frac{q}{q_s^*}} &\leq C \beta^q \int_{\mathbb{R}^N} R^{q_s^*-q} v_n^{q_s^*} dx \\ &\quad + C \eta \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(v_n v_{L,n}^{\frac{q_s^*-q}{q}} \right)^{q_s^*} dx \right)^{\frac{q}{q_s^*}} < \infty. \end{aligned}$$

Lấy giới hạn khi $L \rightarrow \infty$ và chọn $\eta > 0$ sao cho $1 - \eta C > 0$, ta thu được $v_n \in L^{\frac{(q_s^*)^2}{q}}(\mathbb{R}^N)$. Sử dụng $0 \leq v_{L,n} \leq v_n$ và cho $L \rightarrow \infty$ trong (2.75), ta có

$$\|v_n^\beta\|_{L^{q_s^*}(\mathbb{R}^N)}^q \leq C\beta^q \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q_s^*+q(\beta-1)} dx.$$

Từ đó suy ra

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\beta q_s^*} dx \right)^{\frac{1}{(\beta-1)q_s^*}} \leq (C^{1/q}\beta)^{\frac{1}{\beta-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q_s^*+q(\beta-1)} dx \right)^{\frac{1}{q(\beta-1)}}.$$

Với $m \geq 1$, ta chọn β_{m+1} thỏa mãn $q_s^* + q(\beta_{m+1} - 1) = q_s^*\beta_m$ và $\beta_1 = \frac{q_s^*}{q}$. Dễ thấy,

$$\beta_{m+1} = \beta_1^m(\beta_1 - 1) + 1,$$

và $\beta_m \rightarrow \infty$ khi $m \rightarrow \infty$. Theo công thức của β_{m+1} , ta có

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\beta_{m+1} q_s^*} dx \right)^{\frac{1}{(\beta_{m+1}-1)q_s^*}} \leq \left(C^{1/q}\beta_{m+1} \right)^{\frac{1}{\beta_{m+1}-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q_s^*\beta_m} dx \right)^{\frac{1}{q_s^*(\beta_m-1)}}.$$

Đặt

$$D_m = \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{q_s^*\beta_m} dx \right)^{\frac{1}{q_s^*(\beta_m-1)}}.$$

Tiếp tục quá trình trên, tồn tại hằng số $C_* > 0$ độc lập với m sao cho

$$D_{m+1} \leq \prod_{k=1}^m \left(C^{1/q}\beta_{k+1} \right)^{\frac{1}{\beta_{k+1}-1}} D_1 \leq C_* D_1.$$

Lấy giới hạn khi $m \rightarrow \infty$, ta thu được $|v_n|_\infty \leq K_*$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong đó $K_* > 0$ là hằng số thích hợp. Vì $v_n \rightarrow v$ trong W , ta suy ra $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v_n(x) = 0$ hầu khắp nơi trong $n \in \mathbb{N}$. Hơn nữa, sử dụng $v_n \rightarrow v \neq 0$ trong W theo Bổ đề 2.2.2, tồn tại $(\tilde{y}_n)$ và $\beta, R > 0$ sao cho

$$\int_{B_R(\tilde{y}_n)} |v_n|^q dx \geq \beta.$$

Nếu $|v_n|_\infty \rightarrow 0$ thì

$$0 < \beta \leq \int_{B_R(\tilde{y}_n)} |v_n|^q dx \leq |B_R(0)| |v_n|_\infty^q \rightarrow 0,$$

điều này là mâu thuẫn. Vậy tồn tại một hằng số $\sigma > 0$ sao cho $|v_n|_\infty \geq \sigma$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Định lý 2.2.4. *Giả sử $(V), (Q), (VQ)$, và $(f_1) - (f_5)$ được thỏa mãn, Khi đó tồn tại $\zeta_0 > 0$ sao cho phương trình (2.1) có một nghiệm dương không tầm thường với mọi λ đủ lớn và $\zeta \in (0, \zeta_0)$. Ta ký hiệu nghiệm trên là v_ζ và $x_\zeta \in \mathbb{R}^N$ là cực đại toàn cục của nó, khi đó $\lim_{\zeta \rightarrow 0} V(x_\zeta) = V_{\min}$, $\lim_{\zeta \rightarrow 0} Q(x_\zeta) = Q_{\max}$.*

Chứng minh Định lý 2.2.4. Từ Định lý 2.1.10, ta suy ra sự tồn tại nghiệm với năng lượng cực tiểu của bài toán (2.1). Gọi u_{ζ_n} là một nghiệm yếu của (2.1). Khi đó $v_n = u_{\zeta_n} (\cdot + \tilde{y}_n)$ là nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v_n + \sum_{i=1}^m V_n(x) |v_n|^{p_i-2} v_n \\ = \lambda \left(\frac{1}{|x|^\mu} * Q_n(y) F(v_n) \right) Q_n(x) f(v_n) + |v_n|^{q_s^*-2} v_n \text{ trong } \mathbb{R}^N \\ v_n \in W, \quad v_n \geq 0 \text{ trong } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

trong đó $V_n(x) = V(\zeta_n x + \zeta_n \tilde{y}_n)$, $Q_n(x) = Q(\zeta_n x + \zeta_n \tilde{y}_n)$ và $(\tilde{y}_n) \subset \mathbb{R}^N$ được cho bởi Bổ đề 2.2.2. Hơn nữa, khi trích một dãy con nếu cần thiết, ta có thể giả sử $y_n := \zeta_n \tilde{y}_n \rightarrow y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$ và $v_n \rightarrow v$ trong W . Nếu p_n là điểm cực đại của v_n , thì tồn tại $R > 0$ sao cho $|p_n| \leq R$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, theo Bổ đề 2.2.3. Khi đó điểm cực đại của u_{ζ_n} được cho bởi $z_{\zeta_n} = p_n + \tilde{y}_n$ và $\zeta_n z_{\zeta_n} \rightarrow y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}$. Từ tính liên tục của V và Q , ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\zeta_n z_{\zeta_n}) \rightarrow V(y) = V_{\min}$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(\zeta_n z_{\zeta_n}) \rightarrow Q(y) = Q_{\max}$. $\square$

Định lý tiếp theo thu được trực tiếp từ Bổ đề 2.2.1.

Định lý 2.2.5. *Giả sử v_ζ là nghiệm thỏa mãn Định lý 2.2.4. Khi đó tồn tại một dãy $\{\tilde{y}_\zeta\}$ sao cho $w_\zeta(x) := v_\zeta(x + \tilde{y}_\zeta)$ hội tụ mạnh trong W đến một nghiệm với năng lượng cực tiểu của*

$$\sum_{i=1}^m (-\Delta)_{p_i}^s v + V_{\min} \sum_{i=1}^m |v|^{p_i-2} v = \lambda Q_{\max}^2 \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right] f(v) + |v|^{q_s^*-2} v$$

trong $\mathbb{R}^N$ khi $\zeta \rightarrow 0^+$.

Kết luận Chương 2

Trong chương này, sử dụng phương pháp biến phân, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và sự cô đặc của nghiệm cho phương trình Choquard phân thứ nhiều pha (2.1). Các kết quả chính của chương này là Định lý 2.2.4 và Định lý 2.2.5. Các kết quả của chương này được công bố trong [62]. Định lý 2.2.4 cho thấy sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán không ô-tô-nôm (2.1) khi ζ đủ nhỏ và cực đại toàn cục của nghiệm cô đặc quanh cực tiểu toàn cục của thế vị V và cực đại toàn cục của thế vị Q . Định lý 2.2.5 nói rằng dãy nghiệm của bài toán (2.1) sau phép đổi biến tịnh tiến sẽ hội tụ tới nghiệm của bài toán giới hạn. Trong [6], [9], [22] và [80] không có các kết quả kiểu này. Do đó kết quả này của chúng tôi là mới. Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán không ô-tô-nôm, trước hết chúng tôi chỉ ra phiếm hàm năng lượng thỏa mãn điều kiện hình học của Định lý Vượt núi. Do đó sẽ tồn tại dãy (PS) với mức vượt núi C_ζ được xác định trong (2.7). Tiếp theo, ta chứng minh tính compact của dãy (PS) khi mức vượt núi bị chặn trên bởi mức vượt núi của bài toán giới hạn (1.18) với λ đủ lớn. Do đó nghiệm yếu của bài toán (2.1) là giới hạn của dãy (PS) . Bài toán chứa thế vị hút V và thế vị đẩy Q , điều này dẫn đến khó khăn khi chúng tôi chứng minh tính compact của dãy (PS) . Hơn nữa, khó khăn cũng gặp phải khi chúng tôi chứng minh giới hạn của dãy nghiệm của (2.1) về nghiệm của bài toán giới hạn. So sánh với kết quả của Chen-Li-Yang, Ambrosio, Định lý 2.2.4 khi $m = 1$, phương trình (2.1) của chúng tôi chứa hai thế vị V và Q , trong khi bài toán mà Chen-Li-Yang [22], Ambrosio [6] xét chỉ chứa một thế vị V . Do đó kết quả của chúng tôi là mới trong trường hợp $m = 1$. Hiện cũng chưa có các kết quả cho $m \geq 2$ của phương trình (2.1). Các kết quả của Ambrosio [9], Zheng cùng các cộng sự [80] nghiên cứu sự nhiều nghiệm

và sự cô đặc nghiệm cho bài toán (8). Bài toán này không có số hạng tới hạn $|u|^{q_s^*-2}u$. Hơn nữa giả thiết của hàm thế vị V thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) , khác với giả thiết của V trong kết quả của chúng tôi, dẫn đến họ dùng phương pháp chặt cụt hàm phi tuyến để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm. Do đó kết quả của chúng tôi là độc lập với kết quả của họ.

Chương 3

Sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ

3.1 Phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng mũ tối hạn

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha với kỳ dị

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T M_i \Big(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p_i} dx \Big) \\ \times (\mathcal{L}_{p_i}^s u(x) + V(x) |u|^{p_i-2} u) = \frac{f(x, u)}{|x|^\gamma}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

trong đó $T \geq 1$, $N = p_1 s$, $\gamma \in [0, N)$, $s \in (0, 1)$, $2 \leq p = p_1 < \dots < p_T < +\infty$. V là hàm thế vị thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) . Hàm Kirchhoff $M_i(t)$ ($i = 1, \dots, T$) thuộc lớp $\mathfrak{M}$ các hàm M thỏa mãn điều kiện:

$$(c_1) \quad M(t) \geq m_0 > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

$$(c_2) \quad M(t) \leq b_0 + b_1 t^{\alpha_1} + \dots + b_m t^{\alpha_m}, \quad t \geq 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \alpha_m > \dots >$$

$\alpha_1 \geq 1$. Khi đó

$$\mathcal{M}(t) = \int_0^t M(\tau) d\tau \leq b_0 t + b_1 \frac{t^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} + \dots + b_m \frac{t^{\alpha_m+1}}{\alpha_m+1}.$$

(m_3) tồn tại $\theta > 1$ sao cho $\frac{M(t)}{t^{\theta-1}}$ là tăng trong $(0, \infty)$.

Nhân kỳ dị $K_i, i = 1, \dots, T$ thỏa mãn các điều kiện:

(C_1^i) $\eta K_i \in L^1(\mathbb{R}^N)$, trong đó $\eta(x) = \min\{|x|^{p_i}, 1\}$.

(C_2^i) Tồn tại $k_i > 0$ thỏa mãn $K_i(x) \geq k_i |x|^{-(N+p_i s)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, T$.

Ta giả sử rằng hàm phi tuyến liên tục $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ có độ tăng mũ tới hạn thỏa mãn điều kiện:

(f_i) Tồn tại các hằng số $\alpha_0 \in (0, \beta_*)$, $0 < \beta_* < \alpha_*$, $b_1, b_2 > 0$ sao cho

$$|f(x, t)| \leq b_1 |t|^{p-1} + b_2 \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)}),$$

với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, trong đó $\Phi_{N,s}(y) = e^y - \sum_{j=0}^{j_p-2} \frac{y^j}{j!}$, $j_p = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$.

(f_{ii}) Tồn tại $\mu > \max\{p_T \theta, p_T(\alpha_m + 1)\}$ sao cho

$$f(x, t) - \mu F(x, t) \geq -\rho |t|^{N/s}$$

với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$ và thỏa mãn

$$\frac{\rho A_{N/s, \gamma}^{-N/s}}{\mu} < \frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu},$$

trong đó $\theta > 1$ là hằng số được cho trong điều kiện (m_3).

(f_{iii}) Tồn tại một hằng số $B > 0$ thỏa mãn $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x, t)}{|t|^{N/s}} < B$ đều theo $x \in \mathbb{R}^N$ sao cho $\frac{m_0 s}{N} - B A_{N/s, \gamma}^{-N/s} > 0$.

(f_{iv}) Tồn tại $\gamma_1 > 0$ sao cho

$$F(x, t) \geq \gamma_1 |t|^\mu$$

với mọi $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, trong đó $\mu > \max\{p_T \theta, p_T(\alpha_m + 1)\}$ là hằng số được cho trong điều kiện (f_2).

Hàm thế vị V là hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện sau:

(V₁) $V(x) \geq V_0 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$;

(V₂) Với mỗi $c > 0$, ta có $\text{meas}(\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq c\}) < \infty$, trong đó meas là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^N$. Ta giả sử V thỏa mãn thêm một số điều kiện ngoài (V₁) và (V₂) như sau:

(V₃) Tồn tại $h > 0$ sao cho $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \text{meas}(\{x \in B_h(y) : V(x) \leq c\}) = 0$ với mọi $c > 0$.

Trước khi trình bày các kết quả chính, chúng tôi thiết lập một số ký hiệu và định nghĩa. Ký hiệu $\mathcal{W}_{K_i}^{s,p_i}$ ($i = 1, \dots, T$) là không gian Sobolev phân thứ cho bởi

$$\mathcal{W}_{K_i}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N) := \{v \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) : [v]_{s,K_i,p_i} < \infty\},$$

trong đó $[v]_{s,K_i,p_i} = \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |v(x) - v(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy \right)^{1/p_i}$. Chú ý rằng $\mathcal{W}_{K_i}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$ là không gian Banach lồi đều (như trong [64]) với chuẩn

$$\|v\|_{\mathcal{W}_{K_i}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)} = \left(\|v\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^N)}^{p_i} + [v]_{s,K_i,p_i}^{p_i} \right)^{1/p_i}.$$

Gọi $\mathcal{W}_i$ ($i = 1, \dots, T$) là bao đóng của $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ với chuẩn

$$\|v\|_{\mathcal{W}_i} = \left([v]_{s,p_i}^{p_i} + \|v\|_{p_i,V}^{p_i} \right)^{1/p_i}, \quad \|v\|_{p_i,V}^{p_i} = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |v(x)|^{p_i} dx.$$

Khi đó, $\mathcal{W}_i$ là không gian Banach lồi đều (theo [64], Bổ đề 10), và $\mathcal{W}$ là không gian phản xạ. Một ví dụ của nhân kỳ dị K_i ($i = 1, \dots, T$) là $K_i(x) = |x|^{-(N+p_i s)}$. Khi $K_i(x) = |x|^{-(N+p_i s)}$, ta sử dụng ký hiệu $W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$ thay cho $\mathcal{W}_{K_i}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$ và $[v]_{s,p_i}$ thay cho $[v]_{s,K_i,p_i}$.

Đặt $\mathcal{W} = \cap_{i=1}^T \mathcal{W}_i$. Với mọi $\nu \in [\frac{N}{s}, +\infty)$, áp dụng Định lý 6.9 [57], ta có các phép nhúng $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{W}_1 \hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\nu(\mathbb{R}^N)$ là liên tục do điều kiện (V₁). Khi đó, hằng số tối ưu $S_\nu > 0$ được xác định bởi

$$S_\nu = \inf_{v \neq 0, v \in \mathcal{W}} \frac{\|v\|_{\mathcal{W}}}{\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N)}}.$$

Như vậy, với mọi $v \in \mathcal{W}$, ta có

$$\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N)} \leq S_\nu^{-1} \|v\|_{\mathcal{W}}. \quad (3.2)$$

Nghiệm yếu của phương trình (3.1) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3.1.1. Hàm $u \in \mathcal{W}$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình (3.1) nếu với mọi hàm thử $\varphi \in \mathcal{W}$, ta có

$$\sum_{i=1}^T M_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \mathcal{A}_i(u, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u) \varphi(x)}{|x|^\gamma} dx,$$

trong đó,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i(u, \varphi) &= \iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i-2} (u(x) - u(y)) (\varphi(x) - \varphi(y)) K_i(x - y) dx dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p_i-2} u \varphi dx. \end{aligned}$$

Sau đây chúng tôi trình bày một số kết quả về tính nhúng compact của không gian $\mathcal{W}_1$.

Bổ đề 3.1.2. [70] Nếu V thỏa mãn (V_1) và (V_3) , thì không gian $\mathcal{W}_1$ được nhúng compact vào $L^\nu(\mathbb{R}^N)$ với mọi $\nu \in [\frac{N}{s}, +\infty)$.

Bổ đề 3.1.3. [70] Giả sử V thỏa mãn các điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) , $q \geq \frac{N}{s}$ và $\gamma \in [0, N)$, khi đó $\mathcal{W}_1$ nhúng compact vào $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})$.

Áp dụng hai bổ đề trên, tồn tại hằng số tối ưu $A_{\nu, \gamma}$ ($\nu \geq \frac{N}{s}$) được xác định như sau

$$A_{\nu, \gamma} = \inf_{v \neq 0, v \in \mathcal{W}} \frac{\|v\|_{\mathcal{W}_1}}{\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})}}.$$

Suy ra

$$\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})} \leq A_{\nu, \gamma}^{-1} \|v\|_{\mathcal{W}_1}. \quad (3.3)$$

Vì $\mathcal{W}$ được nhúng liên tục vào $\mathcal{W}_1$, theo Bổ đề 3.1.3, với mọi $\nu \in [\frac{N}{s}, +\infty)$, tồn tại một phép nhúng liên tục từ $\mathcal{W}$ vào $L^\nu(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})$ ($0 \leq \gamma < N$), khi đó hằng số tối ưu $\mathbb{A}_{\nu, \gamma}$ hoàn toàn được xác định như sau

$$\mathbb{A}_{\nu, \gamma} = \inf_{v \neq 0, v \in \mathcal{W}} \frac{\|v\|_{\mathcal{W}}}{\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})}}.$$

Suy ra

$$\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})} \leq \mathbb{A}_{\nu, \gamma}^{-1} \|v\|_{\mathcal{W}} \quad (3.4)$$

Cho Ω là miền bị chặn với biên trơn trong $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Khi đó $W_0^{k,p}(\Omega)$ nhúng liên tục vào $L^{Np/(N-kp)}(\Omega)$ với $1 \leq k < N$ và $1 \leq p < \frac{N}{k}$. Trong trường hợp biên, $k = 1$, $p = N$, ta không có phép nhúng từ $W_0^{1,N}(\Omega)$ vào $L^\infty(\Omega)$. Để khắc phục điều này, Trudinger [71] chứng minh rằng tồn tại hai hằng số dương α_N và C_N sao cho

$$\int_{\Omega} e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} dx \leq C_N |\Omega|$$

với mọi $0 \leq \alpha \leq \alpha_N$, $u \in C_c^\infty(\Omega)$, $\int_{\Omega} |\nabla u|^N dx \leq 1$, trong đó

$$\alpha_N := \sup \left\{ \alpha > 0 : \sup_{u \in W_0^{1,N}(\Omega), \|\nabla u\|_N \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} dx < \infty \right\}.$$

Năm 1970, Moser [53] chứng minh rằng $\alpha_N = N w_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$, với w_{N-1} là diện tích mặt cầu đơn vị. Nếu $\alpha > \alpha_N$, thì

$$\sup_{u \in W_0^{1,N}(\Omega), \|\nabla u\|_N \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} dx = \infty.$$

Khoảng 30 năm sau đó, Adachi và Tanach [1] dùng khai triển Taylor để đưa ra dạng mở rộng của bất đẳng thức Trudinger-Moser như sau:

Định lý 3.1.4. *Đặt*

$$\Phi(t) = e^t - \sum_{i=0}^{N-2} \frac{t^i}{i!}.$$

Khi đó tồn tại hằng số $C_N > 0$ sao cho

$$\sup_{u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^N dx \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}) dx \leq C_N \int_{\mathbb{R}^N} |u|^N dx$$

với $0 \leq \alpha \leq \alpha_N$.

Tương tự, trong không gian Sobolev phân thứ, $W^{s,p}(\Omega)$ được nhúng liên tục vào $L^q(\Omega)$ với mọi q sao cho $p \leq q \leq p_s^* = \frac{pN}{N-ps}$, $N > ps$. Khi $N = ps$ ta không có phép nhúng. Năm 2016, Parini và Ruf [61] đã mở rộng bất đẳng thức Trudinger-Moser cho không gian Sobolev phân thứ như sau:

Định lý 3.1.5. Cho Ω là một miền mở bị chặn của $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) với biên Lipschitz, và cho $s \in (0, 1)$, $sp = N$. $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ là bao đóng của $C_0^\infty(\Omega)$ với chuẩn

$$\|u\|_{\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + [u]_{s,p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

trong đó

$$[u]_{s,p} := \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{1/p}.$$

Khi đó tồn tại hằng số $\alpha_* = \alpha_*(s, \Omega) > 0$ sao cho

$$\sup_{u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega), [u]_{s,p} \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}} dx < +\infty,$$

với $\alpha \in [0, \alpha_*)$. Hơn nữa,

$$\sup_{u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega), [u]_{s,p} \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}} dx = +\infty,$$

trong đó $\alpha \in (\alpha_{s,N}^*, +\infty)$ và theo [61]

$$\alpha_{s,N}^* = N \left(\frac{2(Nw_N)^2 \Gamma(p+1)}{N!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+k-1)!}{k!} \frac{1}{(N+2k)^p} \right)^{\frac{s}{N-s}}.$$

Năm 2020, Thìn [70] đã mở rộng định lý trên cho trường hợp kỳ dị như sau:

Định lý 3.1.6. Cho $\gamma \in [0, N)$, $s \in (0, 1)$ và ta giả sử $sp = N$, $N \geq 1$. Khi đó tồn tại một hằng số $\beta_* > 0$ sao cho

$$\sup_{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Phi_{N,s}(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}})}{|x|^\gamma} dx < +\infty$$

đúng với mọi $0 \leq \alpha \leq \beta_* < \alpha_*(1 - \frac{\gamma}{N})$, trong đó $\Phi_{N,s}(t) = e^t - \sum_{j=0}^{j_p-2} \frac{t^j}{j!}$, $j_p = \min \{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$. Hơn nữa với $\alpha > \alpha_{s,N}^*$, ta có

$$\sup_{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Phi_{N,s}(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}})}{|x|^\gamma} dx = +\infty.$$

Để chứng minh các kết quả chính trong phần này, ta xét hàm năng lượng

$$J(u) = \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u)}{|x|^\gamma} dx. \quad (3.5)$$

Theo Định nghĩa (3.1.1, ta thấy rằng nếu u là điểm tới hạn của hàm năng lượng J trong $\mathcal{W}$, khi và chỉ khi u là nghiệm yếu của phương trình (3.1).

Bổ đề 3.1.7. *Giả sử hàm thế vị V thỏa mãn điều kiện (V_1) và hàm phi tuyến f thỏa mãn các điều kiện (f_i) và (f_{iii}) . Khi đó tồn tại các hằng số dương t_0, ρ_0 sao cho $J(u) \geq \rho_0$ với mọi $u \in \mathcal{W}$, trong đó $\|u\|_{\mathcal{W}} = t_0$.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 6 [70], với $q > p_T$, tồn tại $C > 0$ sao cho

$$|F(x, t)| \leq (B - \tau) |t|^{N/s} + C |t|^q \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)})$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^N$ và $t \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} J(u) &= \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u)}{|x|^\gamma} dx \\ &\geq \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - (B - \tau) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{N/s}}{|x|^\gamma} dx \\ &\quad - C \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \frac{\Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)})}{|x|^\gamma} dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Chọn các hằng số $t > 1 : t\gamma < N, t' > 1$ sao cho $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$, áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta thu được

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \frac{\Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)})}{|x|^\gamma} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)})}{|x|^\gamma} \right)^t dx \right)^{\frac{1}{t}} \|u\|_{L^{qt'}(\mathbb{R}^N)}^q. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự Bổ đề 9 [70] và áp dụng Định lý 3.1.6, tồn tại một hằng số $D > 0$ thỏa mãn

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)})}{|x|^\gamma} \right)^t dx \right)^{\frac{1}{t}} \leq D.$$

Vì $\mathcal{W}$ được nhúng liên tục vào $L^{qt'}(\mathbb{R}^N)$, nên

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q \Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)})}{|x|^\gamma} dx \leq D S_{qt'}^{-q} \|u\|_{\mathcal{W}}^q < +\infty.$$

Theo Bổ đề 3.1.3, với mọi $u \in \mathcal{W}$, ta có

$$\|u\|_{L^{N/s}(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})} \leq A_{N/s, \gamma}^{-1} \|u\|_{\mathcal{W}_1}.$$

Khi $\|u\|_{\mathcal{W}}$ đủ nhỏ, ta thu được

$$\sum_{i=1}^T \|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} \geq \frac{T^{1-p_T}}{p_T} \|u\|_{\mathcal{W}}^{p_T}.$$

Nếu $T \geq 2$, thì

$$\begin{aligned} J(u) &= \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - (B - \tau) A_{N/s, \gamma}^{-N/s} \|u\|_{\mathcal{W}_1}^{p_1} - CDS_{qt'}^{-q} \|u\|_{\mathcal{W}}^q \\ &\geq \left(\frac{m_0}{p_1} - (B - \tau) A_{N/s, \gamma}^{-N/s} \right) \|u\|_{\mathcal{W}_1}^{p_1} + \sum_{i=2}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - CDS_{qt'}^{-q} \|u\|_{\mathcal{W}}^q \\ &\geq \min \left\{ \frac{m_0}{p_1} - (B - \tau) A_{N/s, \gamma}^{-N/s}, \min_{i=2, \dots, T} \frac{m_0}{p_i} \right\} \left(\sum_{i=1}^T \|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} \right) - CDS_{qt'}^{-q} \|u\|_{\mathcal{W}}^q \\ &\geq \|u\|_{\mathcal{W}}^{p_T} \left(C_* - CDS_{qt'}^{-q} \|u\|_{\mathcal{W}}^{q-p_T} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

trong đó

$$C_* = \frac{T^{1-p_T}}{p_T} \cdot \min \left\{ \frac{m_0}{p_1} - (B - \tau) A_{N/s, \gamma}^{-N/s}, \min_{i=2, \dots, T} \frac{m_0}{p_i} \right\}.$$

Cho $h(t) = C_* - CDS_{qt'}^{-q} t^{q-p_T}$. Dễ thấy $h(t)$ là hàm liên tục trong $[0, +\infty)$ và $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = C_*$. Khi đó tồn tại $t_0 : h(t) \geq C_* - \varepsilon_1$ với mọi $0 \leq t \leq t_0$, t_0 là đủ nhỏ sao cho $\|u\|_{\mathcal{W}} = t_0$. Đặt $\varepsilon_1 = \frac{C_*}{2}$, ta có $h(t) \geq \frac{C_*}{2}, 0 \leq t \leq t_0$. Đặc biệt, ta cũng thu được $h(t_0) \geq \frac{C_*}{2}$. Suy ra $J(u) \geq \frac{C_* \|u\|_{\mathcal{W}}^{p_T}}{2}$ với $u \in \mathcal{W}$ sao cho $\|u\|_{\mathcal{W}} = t_0$, và $J(u) \geq \frac{t_0^{p_T} C_*}{2} := \rho_0$.

Chúng minh tương tự như trường hợp $T = 2$, ta thu được kết luận của bổ đề khi $T = 1$. $\square$

Bổ đề 3.1.8. *Giả sử (V_1) và (f_{iv}) được thỏa mãn, khi đó tồn tại $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ với $\|v\|_{\mathcal{W}} > t_0 : J(v) < 0$, trong đó $t_0 > 0$ được cho trong Bổ đề 3.1.7.*

Chứng minh. Với mọi $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, theo (f_{iv}) , (c_2) và $t > 0$, ta có

$$J(tu) = \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|tu\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, tu)}{|x|^\gamma} dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0 \|tu\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} + \frac{b_1 \|tu\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i(\alpha_1+1)}}{\alpha_1+1} + \dots + \frac{b_m \|tu\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i(\alpha_m+1)}}{\alpha_m+1} \right) \\
&\quad - \gamma_1 t^\mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^\mu}{|x|^\gamma} dx \\
&= \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0 t^{p_i} \|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} + \frac{b_1 t^{p_i(\alpha_1+1)} \|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i(\alpha_1+1)}}{\alpha_1+1} + \dots + \frac{b_m t^{p_i(\alpha_m+1)} \|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i(\alpha_m+1)}}{\alpha_m+1} \right) \\
&\quad - \gamma_1 t^\mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^\mu}{|x|^\gamma} dx.
\end{aligned}$$

Vì $\mu > p_T(\alpha_m + 1)$, nên $J(tu) \rightarrow -\infty$ khi $t \rightarrow +\infty$. Đặt $v = \rho_1 u$ với $\rho_1 > t_0 > 0$ đủ lớn, khi đó $J(v) < 0$ với $\|v\|_{\mathcal{W}} > t_0$. $\square$

Bổ đề 3.1.9. *Giả sử f thỏa mãn điều kiện (f_{iv}) và thế vị V thỏa mãn điều kiện (V_1) . Khi đó tồn tại một hằng số $C_{\gamma_1} > 0$ sao cho $\rho_0 \leq c \leq C_{\gamma_1}$, trong đó c là mức vượt núi cho hàm năng lượng J trên $\mathcal{W}$ và ρ_0 được cho trong Bổ đề 3.1.7.*

Chứng minh. Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một hàm $w \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ sao cho $\|w\|_{L^\mu(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})} = 1$ và $\|u\|_{\mathcal{W}_i} \leq \|w\|_{\mathcal{W}} \leq \mathbb{A}_{\mu, \gamma} + \varepsilon, i = 1, \dots, T$. Chọn $\varepsilon = 1$, khi đó $\|w\|_{\mathcal{W}_i} \leq \|w\|_{\mathcal{W}} \leq \mathcal{A}_{\mu, \gamma} + 1, i = 1, \dots, T$. Theo Định lý Vượt núi, ta thu được

$$c = \inf_{\gamma_* \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J(\gamma_*(t)) \geq \rho_0 > 0,$$

trong đó

$$\Gamma = \{\gamma_* \in C([0, 1], X) : \gamma_*(0) = 0, J(\gamma_*(1)) < 0\}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
c &\leq \max_{t \geq 0} J(tw) \\
&= \max_{t \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|tw\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, tw)}{|x|^\gamma} dx \right\} \\
&\leq \max_{t \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0 \|tw\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} + \frac{b_1}{\alpha_1+1} \|tw\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i(\alpha_1+1)} + \dots + \frac{b_m}{\alpha_m+1} \|tw\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i(\alpha_m+1)} \right) \right\} \\
&\quad - \min_{t \geq 0} \gamma_1 t^\mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^\mu}{|x|^\gamma} dx \leq \max_{t \geq 0} g(t),
\end{aligned}$$

trong đó

$$g(t) = \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0 t^{p_i} (\mathbb{A}_{\mu, \gamma} + \varepsilon)^{p_i} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\alpha_j + 1} t^{p_i(\alpha_j+1)} (\mathbb{A}_{\mu, \gamma} + \varepsilon)^{p_i(\alpha_j+1)} \right) - \gamma_1 t^\mu,$$

$t \in [0, +\infty)$. Vậy

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} g(t) + \max_{t \geq 1} g(t).$$

Khi $t \in [0, 1]$, ta có

$$\begin{aligned} g(t) &\leq h(t) \\ &= \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0 (\mathbb{A}_{\mu, \gamma} + \varepsilon)^{p_i} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\alpha_j + 1} (\mathbb{A}_{\mu, \gamma} + \varepsilon)^{p_i(\alpha_j+1)} \right) t^p - \gamma_1 t^\mu. \end{aligned}$$

Đặt

$$a = \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0 (\mathbb{A}_{\mu, \gamma} + \varepsilon)^{p_i} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\alpha_j + 1} (\mathbb{A}_{\mu, \gamma} + \varepsilon)^{p_i(\alpha_j+1)} \right)$$

trong hàm trên, ta thu được $h(t) = at^p - \gamma_1 t^\mu$. Ta có

$$\begin{aligned} h'(t) &= pat^{p-1} - \gamma_1 \mu t^{\mu-1} = 0 \\ \Rightarrow t &= \left(\frac{pa}{\mu \gamma_1} \right)^{\frac{1}{\mu-p}}. \end{aligned}$$

Khi đó $\max_{t \in [0,1]} g(t) \leq h(\theta_{\gamma_1}) = C_{\gamma_1}$, với $\theta_{\gamma_1} = \left(\frac{pa}{\mu \gamma_1} \right)^{\frac{1}{\mu-p}} \leq 1$ khi $\gamma_1 \geq \frac{ap}{\mu} := \gamma_*$. Hơn nữa ta cũng có

$$\begin{aligned} C_{\gamma_1} &= h(\theta_{\gamma_1}) = a(\theta_{\gamma_1})^p - \gamma_1 (\theta_{\gamma_1})^\mu = a(\theta_{\gamma_1})^p (1 - \gamma_1 (\theta_{\gamma_1})^{\mu-p}) \\ &= a \left(\frac{pa}{\mu \gamma_1} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \gamma_1 \left(\frac{pa}{\mu \gamma_1} \right) \right) \\ &= a \left(\frac{pa}{\mu \gamma_1} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Với $t \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} g(t) &\leq h_*(t) \\ &= \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0 (\mathbb{A}_{\mu, \gamma} + \varepsilon)^{p_i} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\alpha_j + 1} (\mathbb{A}_{\mu, \gamma} + \varepsilon)^{p_i(\alpha_j+1)} \right) t^{p_T(\alpha_m+1)} - \gamma_1 t^\mu. \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta tìm điểm cực trị của $h_*(t) = at^{p_T(\alpha_m+1)} - \gamma_1 t^\mu$ bằng việc giải phương trình

$$\begin{aligned} h'_*(t) &= p_T(\alpha_m + 1)at^{p_T(\alpha_m+1)-1} - \mu\gamma_1 t^{\mu-1} \\ &= t^{p_T(\alpha_m+1)-1} \left(p_T(\alpha_m + 1)a - \mu\gamma_1 t^{\mu-p_T(\alpha_m+1)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Vậy $t = \left(\frac{p_T(\alpha_m+1)a}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{1}{\mu-p_T(\alpha_m+1)}}$ là điểm cực đại của h_* . Đặt

$$\beta_{\gamma_1} = \left(\frac{p_T(\alpha_m + 1)a}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{1}{\mu-p_T(\alpha_m+1)}}.$$

Chọn $\gamma_1 \geq \frac{ap_T(\alpha_m+1)}{\mu} = \gamma_{**} > \gamma_*$, ta có

$$\left(\frac{p_T(\alpha_m + 1)a}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{1}{\mu-p_T(\alpha_m+1)}} \leq 1.$$

Vậy

$$\max_{t \geq 1} g(t) \leq h_*(1) = a - \gamma_1.$$

Chọn $\gamma_{***} = a$, khi đó $\max_{t \geq 1} g(t) \leq 0$ với mọi $\gamma_1 \geq \max \{\gamma_*, \gamma_{**}, \gamma_{***}\} = a$ vì $\frac{p}{\mu} < \frac{p_T(\alpha_m + 1)}{\mu} < 1$. Từ đó ta thu được

$$c \leq C_{\gamma_1} = a \left(\frac{pa}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \cdot \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right).$$

Do đó $\lim_{\gamma_1 \rightarrow +\infty} \theta_{\gamma_1} = 0$ và $\lim_{\gamma_1 \rightarrow +\infty} h(\theta_{\gamma_1}) = 0$. Theo Bổ đề 3.1.7, ta thấy rằng $c \geq \rho_0$. $\square$

Bổ đề 3.1.10. Cho V thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) , và f thỏa mãn điều kiện (f_i) -(f_{iv}). Khi đó hàm J thỏa mãn điều kiện Palais-Smale với mức $\rho_0 \leq c \leq C_{\gamma_1}$.

Chứng minh. Giả sử $\{v_n\}$ là một dãy $(PS)_c$ trong $\mathcal{W}$. Khi đó ta có $J(v_n) \rightarrow c$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{W}}=1} |\langle J'(v_n), \varphi \rangle| \rightarrow 0.$$

Ta chứng minh theo hai bước. Đầu tiên, ta khẳng định rằng $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong $\mathcal{W}$ và có thể trích ra một dãy con nếu cần thiết, u_n hội tụ mạnh

trong $\mathcal{W}$. Thật vậy, theo định nghĩa của dãy (PS) ta có

$$J(v_n) - \frac{1}{\mu} \langle J'(v_n), v_n \rangle = c + o_n(1) + o_n(1) \|v_n\|_{\mathcal{W}}, \quad (3.9)$$

trong đó μ được cho trong điều kiện (f_{ii}) . Khi đó ta suy ra

$$\begin{aligned} & J(v_n) - \frac{1}{\mu} \langle J'(v_n), v_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, v_n)}{|x|^\gamma} dx - \frac{1}{\mu} \left[\sum_{i=1}^T M_i(\|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \right. \\ & \quad \times \left(\iint_{\mathbb{R}^N} |v_n(x) - v_n(y)|^{p_i} K_i(x-y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |v_n(x)|^{p_i} dx \right) \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, v_n) v_n}{|x|^\gamma} dx \right] \\ &= \sum_{i=1}^T \left(\frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - \frac{1}{\mu} M_i(\|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} \right) \\ & \quad + \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(x, v_n) v_n}{|x|^\gamma} - \frac{\mu F(x, v_n)}{|x|^\gamma} \right) dx \\ &\geq \sum_{i=1}^T \left(\frac{1}{p_i \theta} M_i(\|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} - \frac{1}{\mu} M_i(\|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} \right) - \frac{\rho}{\mu} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v_n|^{N/s}}{|x|^\gamma} dx \\ &\geq \sum_{i=1}^T \left(\frac{1}{p_i \theta} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} - \frac{\rho}{\mu} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v_n|^{N/s}}{|x|^\gamma} dx. \end{aligned}$$

Giả sử $T \geq 2$ (trường hợp $T = 1$ được chứng minh tương tự), do $\mathcal{W}_1$ nhúng liên tục vào $L^{N/s}(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})$, sử dụng (3.3) ta có

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v_n|^{N/s}}{|x|^\gamma} dx \leq A_{N/s, \gamma}^{-N/s} \|v_n\|_{\mathcal{W}_1}^p,$$

từ đó suy ra

$$\begin{aligned} J(v_n) - \frac{1}{\mu} \langle J'(v_n), v_n \rangle &\geq \left(\frac{1}{p\theta} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|v_n\|_{\mathcal{W}_1}^p + \sum_{i=2}^T \left(\frac{1}{p_i \theta} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} \\ &\quad - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s, \gamma}^{-N/s} \|v_n\|_{\mathcal{W}_1}^p. \\ &= \left(\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s, \gamma}^{-N/s} \right) \|v_n\|_{\mathcal{W}_1}^p + \sum_{i=2}^T \left(\frac{1}{p_i \theta} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Theo điều kiện (f_{ii}) , ta có $\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s} > 0$ và $\mu > p_T\theta > p_i\theta, i = 2, \dots, T$, kết hợp với (3.10) và (3.9) ta thu được

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s} \right) \|v_n\|_{\mathcal{W}_1}^p + \sum_{i=2}^T \left(\frac{1}{p_i\theta} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i} \\ & \leq c + o_n(1) + o_n(1) \|v_n\|_{\mathcal{W}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Theo (3.11), ta suy ra $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trong $\mathcal{W}$. Vì

$$J(v_n) - \frac{1}{\mu} \langle J'(v_n), v_n \rangle \rightarrow c$$

khi $n \rightarrow \infty$ nên

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{\mathcal{W}_1}^{N/s} \leq \frac{c}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s}} \leq \frac{C_{\gamma_1}}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s}}. \quad (3.12)$$

Với mọi $q > \frac{N}{s}$, trích một dãy con nếu cần thiết, ta có thể giả sử v_n hội tụ yếu đến v trong $\mathcal{W}$, v_n hội tụ mạnh đến v trong $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})$ (theo Bổ đề 3.1.2. 3.1.3) và $v_n(x) \rightarrow v(x)$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^N$.

Với mỗi $\psi \in \mathcal{W}$, ta ký hiệu B_ψ^i là một toán tử tuyến tính trong $\mathcal{W}$ được định nghĩa bởi

$$B_\psi^i(w) = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} |\psi(x) - \psi(y)|^{p_i-2} (\psi(x) - \psi(y)) (w(x) - w(y)) K_i(x-y) dx dy.$$

Theo bất đẳng thức Hölder, B_ψ^i là hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{W}$ và với mọi $w \in \mathcal{W}$, ta có

$$|B_\psi^i(w)| \leq \|\psi\|_{\mathcal{W}}^{p_i-1} \|w\|_{\mathcal{W}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, trong đó $p' = \frac{p}{p-1}$ là số mũ liên hợp Hölder của p , ta thu được

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Phi_{N,s}(\alpha_0 |v_n|^{N/(N-s)})}{|x|^\gamma} |v_n - v| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Phi_{N,s}(\alpha_0 |v_n|^{N/(N-s)})}{|x|^{\gamma/p'}} \frac{|v_n - v|}{|x|^{\gamma/p}} dx \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\Phi_{N,s}(\alpha_0 |v_n|^{N/(N-s)}))^{p'}}{|x|^\gamma} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v_n - v|^p}{|x|^\gamma} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\Phi_{N,s}(\alpha_0 |v_n|^{N/(N-s)}))^{p'}}{|x|^\gamma} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \|v_n - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Đặt $\mathbf{c} > p' > 1$, ở đây để thuận tiện, ta chọn $\mathbf{c} = 2p'$. Khi đó tồn tại một hằng số $C(\mathbf{c}) > 0$ sao cho

$$\left(\Phi_{N,s}(\alpha_0 |v|^{N/(n-s)}) \right)^{p'} \leq C(\mathbf{c}) \Phi_{N,s}(\mathbf{c}\alpha_0 |v|^{N/(n-s)}), \quad (3.14)$$

với mọi $v \in \mathcal{W}$. Theo (3.8) và (3.12) ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|v_n\|_{\mathcal{W}_1}^{N/s} \leq \left[a \left(\frac{pa}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right) \right] \cdot \frac{1}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s}}. \quad (3.15)$$

Khi đó với mọi $\zeta > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$\|v_n\|_{\mathcal{W}_1}^{N/s} \leq \left[a \left(\frac{pa}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right) \right] \cdot \frac{1}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s}} + \zeta.$$

Chọn

$$\zeta = \left[a \left(\frac{pa}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right) \right] \frac{1}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s}},$$

khi đó

$$\|v_n\|_{\mathcal{W}_1}^{N/s} \leq 2 \left[a \left(\frac{pa}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right) \right] \frac{1}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s}},$$

với mọi $n \geq n_0$. Theo 3.1.6, chọn $\beta_* = \frac{\alpha_*}{2}(1 - \frac{\gamma}{N})$, suy ra

$$\begin{aligned} \mathbf{c}\alpha_0 \sup_{n \geq n_0} \|u_n\|_{\mathcal{W}^{s,N/s}(\mathbb{R}^N)}^{N/(N-s)} &\leq \mathbf{c}\alpha_0 \max \{k_1^{-1}, V_0^{-1}\}^{s/(N-s)} \|u_n\|_{\mathcal{W}_1}^{N/(N-s)} \\ &\leq \beta_* = \frac{\alpha_*}{2}(1 - \frac{\gamma}{N}) < \alpha_*(1 - \frac{\gamma}{N}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

khi $\gamma_1 \geq \max\{a, \gamma_0\}$ và γ_0 thỏa mãn bất đẳng thức

$$\begin{aligned} &\max \{k_1^{-1}, V_0^{-1}\}^{s/(N-s)} \mathbf{c}\alpha_0 \\ &\times \left(2 \left[a \left(\frac{pa}{\mu\gamma_0} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right) \right] \left(\frac{1}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s}} \right) \right)^{\frac{s}{N-s}} \leq \frac{\alpha_*}{2}(1 - \frac{\gamma}{N}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Bây giờ, ta chứng minh chi tiết về việc ước lượng hằng số γ_0 . Từ (3.17), ta

có

$$\begin{aligned} & 2 \left[a \left(\frac{pa}{\mu\gamma_0} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right) \right] \left(\frac{1}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s}} \right) \\ & \leq \left(\frac{\alpha_*}{2\mathfrak{c}\alpha_0} \left(1 - \frac{\gamma}{N} \right) \right)^{\frac{N-s}{s}} \min\{k_1, V_0\}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\left(\frac{pa}{\mu\gamma_0} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \leq \left(\frac{\alpha_*}{2\mathfrak{c}\alpha_0} \left(1 - \frac{\gamma}{N} \right) \right)^{\frac{N-s}{s}} \frac{\min\{k_1, V_0\}}{2a \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right)} \left(\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s} \right).$$

Khi đó, ta có thể chọn

$$\gamma_0 \geq \frac{\mu}{pa} \left[\left(\frac{\alpha_*}{4p'\alpha_0} \left(1 - \frac{\gamma}{N} \right) \right)^{\frac{N-s}{s}} \frac{\min\{k_1, V_0\}}{2a \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right)} \left(\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s,\gamma}^{-N/s} \right) \right]^{\frac{p-\mu}{p}} := \gamma_0^*$$

với $\mathfrak{c} = 2p'$. Tiếp theo, sử dụng Bất đẳng thức Trudinger-Moser phân thứ với kỳ dị (Định lý 3.1.6), ta được

$$\begin{aligned} & \sup_{n \geq n_0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Phi_{N,s}(c\alpha_0 |v_n|^{N/(N-s)})}{|x|^\gamma} dx \\ & = \sup_{n \geq n_0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Phi_{N,s}(c\alpha_0 \|v_n\|_{\mathcal{W}^{s,N/s}(\mathbb{R}^N)}^{N/(N-s)} (v/\|v_n\|_{\mathcal{W}^{s,N/s}(\mathbb{R}^N)})^{N/(N-s)})}{|x|^\gamma} dx < +\infty, \end{aligned} \quad (3.18)$$

với $\gamma_1 \geq \max\{a, \gamma_0^*\}$. Từ điều kiện (f_i) và (3.18), tồn tại hằng số $D_1 > 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(f(x, v_n) - f(x, v))(v_n - v)|}{|x|^\gamma} dx \\ & \leq b_1 (\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})}^{p-1} + \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})}^{p-1}) \|v_n - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})} \\ & + D_1 \|v_n - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(f(x, v_n) - f(x, v))(v_n - v)}{|x|^\gamma} dx = 0. \quad (3.19)$$

Để thấy $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle J'(v_n) - J'(v), v_n - v \rangle = 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \langle J'(v_n) - J'(v), v_n - v \rangle \\
&= \sum_{i=1}^T (M_i(\|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) B_{v_n}^i(v_n - v) - M_i(\|v\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) B_u^i(v_n - v)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^T \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (|v_n|^{p_i-2} v_n - |v|^{p_i-2} v) (v_n - v) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{[f(x, v_n) - f(x, v)] (v_n - v)}{|x|^\gamma} dx \\
&= \sum_{i=1}^T \left([M_i(\|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - M_i(\|v\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i})] B_v^i(v_n - v) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^T M_i(\|v_n\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) (B_{v_n}^i(v_n - v) - B_u^i(v_n - v)) \right) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{[f(x, v_n) - f(x, v)] (v_n - v)}{|x|^\gamma} dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^T \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (|v_n|^{p_i-2} v_n - |v|^{p_i-2} v) (v_n - v) dx.
\end{aligned}$$

Ta nhận thấy $B_v^i(v_n - v) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$, với mọi $i = 1, \dots, T$. Theo bất đẳng thức Simon và lập luận trong [70] ta suy ra $v_n \rightarrow v$ mạnh trong $\mathcal{W}$ khi $n \rightarrow \infty$. $\square$

Định lý 3.1.11. *Giả sử V thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) , f thỏa mãn điều kiện (f_i) - (f_{iv}) , và hàm Kirchhoff M_i ($i = 1, \dots, T$) thỏa mãn (m_3) , (c_1) và (c_2) . Khi đó, với mọi $\gamma_1 \geq \max\{a, \gamma_0^*\}$, bài toán (3.1) có một nghiệm không tầm thường, trong đó*

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0(\mathcal{A}_{\mu, \gamma} + 1)^{p_i} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\alpha_j + 1} (\mathcal{A}_{\mu, \gamma} + 1)^{p_i(\alpha_j + 1)} \right), \\
\gamma_0^* &= \frac{pa}{\mu} \left[\left(\frac{\alpha_*}{4p'\alpha_0} \left(1 - \frac{\gamma}{N} \right) \right)^{\frac{N-s}{s}} \frac{\min\{k_1, V_0\}}{2a \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right)} \left(\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} - \frac{\rho}{\mu} A_{N/s, \gamma}^{-N/s} \right) \right]^{\frac{p-\mu}{p}}
\end{aligned}$$

và $p' = \frac{p}{p-1}$ là số mũ liên hợp của p .

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.1.7, 3.1.8, tồn tại một dãy $\{v_n\} \in \mathcal{W}$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = c > 0, \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} J'(v_n) = 0 \text{ trong } \mathcal{W}^*$$

khi $n \rightarrow \infty$. Áp dụng Bổ đề 3.1.10, tồn tại $v \in \mathcal{W}$ sao cho $J(v) = c > 0$, $J'(v) = 0$ trong $\mathcal{W}^*$. Do đó $v \neq 0$ là nghiệm yếu của bài toán (3.1). $\square$

3.2 Phương trình kiểu Kirchhoff-Schrödinger phân thứ nhiều pha trong $\mathbb{R}^N$ với độ tăng trên tối hạn

Ta nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của (3.1) khi $\gamma = 0$ và $f(x, t) = h(t)e^{\beta_0|t|^\tau}$ ($t \in \mathbb{R}$), trong đó $\beta_0 > 0$ và $\tau \geq \frac{N}{N-s}$. Cụ thể, trong mục này ta chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T M_i \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p_i} dx \right) \\ \times (\mathcal{L}_{p_i}^s u(x) + V(x) |u|^{p_i-2} u) = h(t)e^{\beta_0|t|^\tau}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ta giả sử h là hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện sau:

- (h_1) $h(t) \equiv 0$ với mọi $t \in (-\infty, 0]$ và $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(t)}{t^{p_T-1}} = 0$;
- (h_2) Tồn tại $\mu > \max\{\theta p_T, (\alpha_m + 1)p_T\}$ sao cho $0 < \mu H(t) \leq h(t)t$ với mọi $t \in (0, \infty)$, trong đó $H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$ và θ được cho trong điều kiện (m_3).
- (h_3) Tồn tại $\delta \in (0, \frac{N}{N-s})$ và $\gamma > 0, C > 0$ sao cho $0 \leq h(t) \leq Ce^{\gamma|t|^\delta}$ với mọi $t \in [0, \infty)$.
- (h_4) Tồn tại một hằng số $\gamma_1 > 0$ đủ lớn sao cho $H(t) \geq \gamma_1|t|^\mu$ với mọi $t \geq 0$.

Bây giờ, chúng tôi đưa ra một ví dụ về hàm h thỏa mãn các điều kiện (h_1) – (h_4) như sau

$$h(t) = \begin{cases} \gamma_1 \mu t^{\mu-1} e^{\beta t^\alpha} & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{if } t \leq 0 \end{cases},$$

trong đó α được chọn sao cho $0 < \alpha < \delta$, $\delta \in (0, \frac{N}{N-s})$, $\beta > 0$ là một

hằng số nhỏ và μ là hằng số từ điều kiện (h_2) . Vì $\mu > \theta p_T > p_T$, nên

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(t)}{t^{p_T-1}} = \gamma_1 \mu \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\mu-p_T} e^{\beta t^\alpha} = 0.$$

Do đó h thỏa mãn điều kiện (h_1) . Hiển nhiên, $\frac{h(t)}{t^{\mu-1}} = \gamma_1 \mu e^{\beta t^\alpha}$ là một hàm tăng trên $[0, \infty)$. Với bất kỳ $\tau \in (0, t]$, ta có $\frac{h(\tau)}{\tau^{\mu-1}} \leq \frac{h(t)}{t^{\mu-1}}$, và khi đó $h(\tau) \leq \frac{h(t)}{t^{\mu-1}} \tau^{\mu-1}$. Bây giờ, chúng ta tích phân cả hai vế của bất đẳng thức từ 0 đến t theo biến τ để được

$$\int_0^t h(\tau) d\tau \leq \int_0^t \frac{h(t)}{t^{\mu-1}} \tau^{\mu-1} d\tau.$$

Vì vậy, ta thu được

$$H(t) \leq \frac{h(t)}{t^{\mu-1}} \int_0^t \tau^{\mu-1} d\tau$$

và

$$H(t) \leq \frac{h(t)}{t^{\mu-1}} \left[\frac{\tau^\mu}{\mu} \right]_0^t = \frac{h(t)}{t^{\mu-1}} \cdot \frac{t^\mu}{\mu}.$$

Như vậy, ta có

$$H(t) \leq \frac{h(t)t}{\mu},$$

và h thỏa mãn điều kiện (h_2) . Tiếp theo, ta chứng minh rằng h thỏa mãn điều kiện (h_3) . Đầu tiên, ta chỉ ra rằng

$$t^{\mu-1} e^{\beta t^\alpha} \leq C e^{\gamma t^\delta}, \quad \gamma > 0,$$

trong đó $C > 0$ là một hằng số phù hợp. Ký hiệu

$$f_*(t) = \frac{t^{\mu-1} e^{\beta t^\alpha}}{e^{\gamma t^\delta}} = t^{\mu-1} e^{\beta t^\alpha - \gamma t^\delta} := t^{\mu-1} e^{E(t)},$$

với $E(t) = \beta t^\alpha - \gamma t^\delta$. Ta thấy

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\delta (\beta t^{\alpha-\delta} - \gamma) = -\infty,$$

và

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\mu-1}}{e^{\gamma t^\delta - \beta t^\alpha}} = 0.$$

Lưu ý rằng f_* là một hàm số liên tục trên $[0, \infty)$, $f_*(0) = 0$ và $\lim_{t \rightarrow \infty} f_*(t) = 0$, sử dụng định lý về giá trị cực trị, f_* phải bị chặn trên khoảng $[0, \infty)$. Do đó, tồn tại một giá trị cực đại M sao cho

$$f_*(t) \leq M \quad \implies \quad t^{\mu-1} e^{\beta t^\alpha} \leq M e^{\gamma t^\delta} \text{ với mọi } t \in [0, \infty).$$

Đặt $C := \gamma_1 \mu M$, khi đó $h(t) \leq Ce^{\gamma t^\delta}$, $t \in [0, \infty)$ và điều kiện (h_3) được thỏa mãn. Cuối cùng, h thỏa mãn điều kiện (h_4) vì

$$H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \geq \gamma_1 \mu \int_0^t \tau^{\mu-1} d\tau = \gamma_1 t^\mu, t \in [0, \infty).$$

Thúc đẩy bởi kết quả trong [5, 67], với mỗi $R \geq 1$, ta xét hàm sau

$$f_R(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ h(t)e^{\beta_0 t^\tau}, & 0 \leq t \leq R. \\ h(t)e^{\beta_0 R^{\tau-\delta} t^\delta}, & t \geq R \end{cases} \quad (3.21)$$

Khi đó từ các điều kiện (h_1) , (h_3) , và (3.21), với mọi $\zeta > 0$, tồn tại hằng số $C_i(R, \zeta) > 0, i = 1, 2, 3$ sao cho

$$\begin{aligned} 0 \leq f_R(t) &\leq \zeta |t|^{p_T-1} + C_1(R, \zeta) e^{(\gamma + \beta_0 R^{\tau-\delta})|t|^\delta} \\ &\leq \zeta |t|^{p_T-1} + C_2(R, \zeta) e^{\alpha_0 |t|^{\frac{N}{N-s}}} \\ &\leq \zeta |t|^{p_T-1} + C_3(R, \zeta) |t|^{q-1} \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

với mọi $t \in \mathbb{R}$ và $q \geq 1$, trong đó $\alpha_0 \in (0, \alpha_*)$ được cho trong điều kiện (f_i) . Bằng lập luận tương tự như [5, Bổ đề 3.1], ta có

$$0 < \mu F_R(t) \leq f_R(t)t, \quad \text{với mọi } t \in [0, \infty), \quad F_R(t) = \int_0^t f_R(\tau) d\tau. \quad (3.23)$$

Theo điều kiện (h_4) , dễ thấy rằng

$$F_R(t) = \int_0^t f_R(\tau) d\tau \geq \int_0^t h(\tau) d\tau = H(t) \geq \gamma_1 |t|^\mu \quad (3.24)$$

với mọi $t \in [0, +\infty)$. Từ (h_1) , (h_4) , (3.22), (3.23) và (3.24), ta suy ra f_R thỏa mãn các điều kiện (f_i) , (f_{ii}) với $\rho = 0$, (f_{iii}) và (f_{iv}) . Khi $\gamma = 0$, a được thay thế bởi a^* như sau

$$a^* = \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \left(b_0 (\mathcal{A}_{\mu,0} + 1)^{p_i} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\alpha_j + 1} (\mathcal{A}_{\mu,0} + 1)^{p_i(\alpha_j+1)} \right).$$

Trong hằng số γ_0^* , ta đặt $\rho = 0, \gamma = 0$, khi đó γ_0^* được thay thế bởi

$$\gamma_0^{**} = \frac{pa^*}{\mu} \left[\left(\frac{\alpha_*}{4p'\alpha_0} \right)^{\frac{N-s}{s}} \frac{\min\{k_1, V_0\}}{2a^* \left(1 - \frac{pa^*}{\mu} \right)} \left(\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} \right) \right]^{\frac{p-\mu}{p}}.$$

Định nghĩa 3.2.1. Hàm $u \in \mathcal{W}$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình (3.20) nếu với mọi hàm thử $\varphi \in \mathcal{W}$, ta có

$$\sum_{i=1}^T M_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \mathcal{A}_i(u, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) \varphi(x) dx,$$

trong đó, $f(x, u) = h(u(x))e^{\beta_0|u(x)|^\tau}$.

Do hàm phi tuyến trong phương trình (3.20) có độ tăng mũ trên giới hạn nên phép nhúng không còn compact và không có Bất đẳng thức kiểu Trudinger-Moser cho trường hợp trên tới hạn. Từ đó việc áp dụng phương pháp biến phân để chứng minh nghiệm yếu của bài toán trở nên khó khăn. Để khắc phục điều đó, chúng tôi giới thiệu hàm cải biên nhằm đưa bài toán về trường hợp tới hạn. Khi đó, ta có thể xét bài toán cải biên như sau

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T M_i \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^{p_i} K_i(x - y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p_i} dx \right) \\ \times (\mathcal{L}_{p_i}^s u(x) + V(x) |u|^{p_i-2} u) = f_R(u). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Vì $h(t) = 0$ với mọi $t \in (-\infty, 0]$, khi đó tất cả các nghiệm (3.20) và (3.25) là không âm. Nghiệm yếu của (3.25) được hiểu như trong Định nghĩa 3.2.1 khi thay $f(x, u)$ bởi $f_R(u)$. Bằng lập luận tương tự Định lý 3.1.11, ta suy ra:

Định lý 3.2.2. *Giả sử V thỏa mãn điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) , h thỏa mãn điều kiện $(h_1) - (h_4)$ và hàm Kirchhoff M_i ($i = 1, \dots, T$) thỏa mãn (m_3) , (c_1) và (c_2) . Khi đó tồn tại $\gamma^* = \max\{a^*, \gamma_0^{**}\} > 0$ sao cho bài toán (3.25) có một nghiệm không âm không tầm thường trong $\mathcal{W}$ với mọi $\gamma_1 \geq \gamma^*$.*

Cố định $\varepsilon_0 > 0$ và ε_0 gần 0. Ký hiệu

$$\gamma_0^{***} = \frac{pa^*}{\mu} \left(\frac{\left(\frac{\alpha_*}{4(1+\varepsilon_0)\alpha_0} \right)^{\frac{N-s}{s}} \min\{k_1, V_0\}}{a^* \left(1 - \frac{pa^*}{\mu} \right)} \right)^{\frac{p-\mu}{p}}.$$

Bây giờ, ta ước lượng L^∞ cho nghiệm của phương trình (3.25) được cho trong Định lý 3.2.2 như sau:

Bổ đề 3.2.3. *Ta giả sử điều kiện (V_1) và $(h_1) - (h_4)$ được thỏa mãn. Khi đó với mọi $\tau \geq \frac{N}{N-s}$, tồn tại $\beta_{**}(\tau) > 0$ và $\gamma^{**} > 0$ sao cho với mọi $\beta_0 \in (0, \beta_{**}(\tau))$ và $\gamma_1 \geq \gamma^{**} = \max\{a^*, \gamma_0^{***}\}$, mọi nghiệm không âm không tầm thường u của phương trình (3.25) phải thỏa mãn $|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_*$, trong đó $C_* > 0$ là hằng số thích hợp.*

Chứng minh. Ta xét hàm năng lượng liên quan đến bài toán (3.25):

$$I_R(u) = \sum_{i=1}^T \frac{1}{p_i} \mathcal{M}_i(\|u\|_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) - \int_{\mathbb{R}^N} F_R(u) dx.$$

Trong bổ đề này, nghiệm u thu được từ Định lý 3.2.2. Hơn nữa, theo Định lý Vượt núi, nghiệm yếu $u \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$I_R(u) = c = \inf_{\gamma_* \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_R(\gamma_*(t)) > 0,$$

trong đó

$$\Gamma = \{\gamma_* \in C([0,1], \mathcal{W}) : \gamma_*(0) = 0, I_R(\gamma_*(1)) < 0\},$$

và $I'_R(u) = 0$ trong $\mathcal{W}^*$. Theo điều kiện (h_4) và lập luận tương tự Bổ đề 3.1.9, ta suy ra c thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$0 < c \leq C_{\gamma_1} = a \left(\frac{pa}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa}{\mu} \right), \quad (3.26)$$

với γ_1 đủ lớn. Hơn nữa ta có $\langle I'_R(u), u \rangle = 0$. Khi đó

$$c = I_R(u) = I_R(u) - \frac{1}{\mu} \langle I'_R(u), u \rangle \geq \left(\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu} \right) \|u\|_{\mathcal{W}_1}^{N/s}.$$

Lập luận tương tự (3.15), khi $\gamma_1 \geq a^*$, ta thu được

$$\|u\|_{\mathcal{W}_1}^{N/s} \leq \frac{c}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu}} \leq \left[a^* \left(\frac{pa^*}{\mu\gamma_1} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa^*}{\mu} \right) \right] \frac{1}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu}}. \quad (3.27)$$

Ký hiệu $\mathfrak{d}_* = \min\{V_0, k_1\}$. Chọn γ_1 đủ lớn sao cho

$$\|u\|_{\mathcal{W}_1}^{N/(N-s)} \leq \frac{\beta_* \mathfrak{d}_*^{s/(N-s)}}{\mathfrak{c}\alpha_0}, \quad (3.28)$$

trong đó $0 < \beta_* = \frac{\alpha_*}{2} < \alpha_*$ và $\mathfrak{c} > 1$ là hằng số thích hợp. Vậy

$$\mathfrak{c}\alpha_0 \|u\|_{\mathcal{W}^{s,N/s}(\mathbb{R}^N)}^{N/(N-s)} \leq \mathfrak{c}\alpha_0 \max\{k_1^{-1}, V_0^{-1}\}^{s/(N-s)} \|u\|_{\mathcal{W}_1}^{N/(N-s)} \leq \frac{\alpha_*}{2}$$

khi $\gamma_1 \geq \max\{a^*, \gamma_0\}$ và γ_0 thỏa mãn bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & \mathfrak{c}\alpha_0 \cdot \max\{k_1^{-1}, V_0^{-1}\}^{s/(N-s)} \\ & \times \left(\left[a^* \left(\frac{pa^*}{\mu\gamma_0} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa^*}{\mu} \right) \right] \left(\frac{1}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu}} \right) \right)^{\frac{s}{N-s}} \leq \frac{\alpha_*}{2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Áp dụng Định lý 3.1.6 cho $\gamma = 0$, ta suy ra

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s}(\mathfrak{c}\alpha_0 |u|^{N/(N-s)}) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s}(\mathfrak{c}\alpha_0 \|u\|_{\mathcal{W}^{s,N/s}(\mathbb{R}^N)}^{N/(N-s)} (u/\|u\|_{\mathcal{W}^{s,N/s}(\mathbb{R}^N)})^{N/(N-s)}) dx < +\infty. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Từ (3.29), ta có

$$\left[a^* \left(\frac{pa^*}{\mu\gamma_0} \right)^{\frac{p}{\mu-p}} \left(1 - \frac{pa^*}{\mu} \right) \right] \left(\frac{1}{\frac{m_0}{p\theta} - \frac{m_0}{\mu}} \right) \leq \left(\frac{\alpha_*}{2\mathfrak{c}\alpha_0} \right)^{\frac{N-s}{s}} \min\{k_1, V_0\}.$$

Điều này kéo theo (3.30) thỏa mãn nếu

$$\gamma_0 \geq \frac{pa^*}{\mu} \left(\frac{\left(\frac{\alpha_*}{2\mathfrak{c}\alpha_0} \right)^{\frac{N-s}{s}} \min\{k_1, V_0\}}{a^*(1 - \frac{pa^*}{\mu})} \right)^{\frac{p-\mu}{p}}. \quad (3.31)$$

Với mọi $L > 0$ và $\zeta > 1$, ta ký hiệu

$$\gamma(u) = \gamma_{L,\zeta}(u) = uu_L^{p(\zeta-1)} \in \mathcal{W}, u_L = \min\{u, L\}.$$

Đặt

$$\Lambda(t) = \frac{|t|^p}{p} \text{ và } \Gamma(t) = \int_0^t (\gamma'(t))^{\frac{1}{p}} d\tau.$$

Khi đó theo kết quả trong [4, Bổ đề 6.1], ta có

$$\begin{aligned} & |\Gamma(u(x)) - \Gamma(u(y))|^p \\ & \leq |u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) ((uu_L^{p(\zeta-1)})(x) - (uu_L^{p(\zeta-1)})(y)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vậy nếu chọn $\gamma(u) = uu_L^{p(\zeta-1)}$ như một hàm thử trong (3.25), ta thu được

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^T M_i(||u||_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \\ & \times \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p_i-2} (u(x) - u(y)) ((uu_L^{p(\zeta-1)})(x) - (uu_L^{p(\zeta-1)})(y))}{|x - y|^{N+p_i s}} dx dy \\ & + \sum_{i=1}^T M_i(||u||_{\mathcal{W}_i}^{p_i}) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{p_i-2} u^2 u_L^{p(\zeta-1)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f_R(u) uu_L^{p(\zeta-1)} dx. \quad (3.33) \end{aligned}$$

Chọn $\beta_{**} = \frac{1}{R^{\tau-\delta}}$, khi đó theo điều kiện (h_1) và (h_3) , với mọi $\beta_0 \in (0, \beta_{**})$ và $t \geq 1$, tồn tại $C_2 > C_1 > C$ không phụ thuộc vào R sao cho

$$\begin{aligned} |f_R(t)| & \leq C e^{\gamma|t|^\delta} e^{\beta_{**} R^{\tau-\delta} |t|^\delta} \leq C e^{(\gamma+1)|t|^\delta} \leq C_1 e^{\alpha_0 |t|^{\frac{N}{N-s}}} \\ & \leq C_2 \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{\frac{N}{N-s}}) \leq C_2 |t|^{p-1} \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{\frac{N}{N-s}}). \end{aligned}$$

Dễ thấy $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_R(t)}{t^{p-1}} = 0$, khi đó với mọi $\varepsilon_* > 0$, tồn tại $C(\varepsilon_*) > 0$ không phụ thuộc vào R sao cho

$$\frac{|f_R(t)|}{m_0} \leq \varepsilon_* |t|^{p-1} + C(\varepsilon_*) |t|^{p-1} \Phi_{N,s}(\alpha_0 |t|^{N/(N-s)})$$

với mọi $t \in \mathbb{R}$. Lập luận tương tự [4, Bổ đề 6.1], ta có

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p_i-2} (u(x) - u(y)) ((uu_L^{p(\zeta-1)})(x) - (uu_L^{p(\zeta-1)})(y))}{|x - y|^{2N}} dx dy \geq 0$$

với mọi $i = 2, \dots, T$ nếu $T \geq 2$. Từ bất đẳng thức trên và (3.32), (3.33), ta suy ra

$$[\Gamma(u)]_{s,p}^p + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)}{m_0} |v_n|^p u_L^{p(\zeta-1)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f_R(u)}{m_0} uu_L^{p(\zeta-1)} dx.$$

Vì $\Gamma(u) \geq \frac{1}{\zeta} uu_L^{\zeta-1}$, $uu_L^{\zeta-1} \geq \Gamma(u)$ và phép nhúng liên tục $W^{s,N/s}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{N^*}(\mathbb{R}^N)$ ($N^* > \frac{N}{s}$) nên tồn tại $S_* > 0$ sao cho

$$||\Gamma(u)||_{V_0 m_0^{-1}, W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^p \geq S_* ||\Gamma(u)||_{L^{N^*}(\mathbb{R}^N)}^p \geq \frac{1}{\zeta^p} S_* ||uu_L^{\zeta-1}||_{L^{N^*}(\mathbb{R}^N)}^p, \quad (3.34)$$

trong đó với mỗi $\eta > 0$, ta ký hiệu

$$||u||_{\eta, W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = (\eta ||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + [u]_{s,p}^p)^{1/p}.$$

Vậy tồn tại hằng số tối ưu

$$\mathcal{S}_\nu = \inf_{u \neq 0, u \in W^{s,N/s}(\mathbb{R}^N)} \frac{||u||_{V_0 m_0^{-1}, W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}}{||u||_{L^\nu(\mathbb{R}^N)}}, \nu \geq \frac{N}{s}$$

do phép nhúng liên tục $W^{s,N/s}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^\nu(\mathbb{R}^N)$ ($\nu \geq \frac{N}{s}$). Do đó

$$||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{S}_p^{-1} ||u||_{V_0 m_0^{-1}, W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \text{ với mọi } u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N). \quad (3.35)$$

Ta có

$$\begin{aligned} & ||\Gamma(u)||_{V_0 m_0^{-1}, W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^p \\ & \leq \varepsilon_* \int_{\mathbb{R}^N} |uu_L^{\beta-1}|^p dx + C(\varepsilon_*) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)}) |uu_L^{\zeta-1}|^p dx \\ & \leq \varepsilon_* \zeta^p \int_{\mathbb{R}^N} |\Gamma(u)|^p dx + C(\varepsilon_*) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)}) |uu_L^{\zeta-1}|^p dx \\ & \leq \varepsilon_* \zeta^p \mathcal{S}_p^{-p} ||\Gamma(u)||_{V_0 m_0^{-1}, W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^p + C(\varepsilon_*) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)}) |uu_L^{\zeta-1}|^p dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Chọn $0 < \varepsilon_* < \zeta^{-p} \mathcal{S}_p^p$, áp dụng bất đẳng thức Hölder với $q := \frac{1 + \varepsilon_0}{\varepsilon_0} >> \frac{N}{s}$ sao cho $N^{**} = qp < N^*$, $q' = 1 + \varepsilon_0$, q' rất gần với 1 khi $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ sao cho $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, khi đó (3.36) kéo theo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta^p} S_*(1 - \varepsilon_* \zeta^p \mathcal{S}_p^{-p}) ||uu_L^{\zeta-1}||_{L^{N^*}(\mathbb{R}^N)}^p \\ & \leq C(\varepsilon_*) \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)}))^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uu_L^{\zeta-1}|^{qp} dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Trong (3.31), ta chọn $\mathfrak{c} = 2q' > q' > 1$ và sử dụng bất đẳng thức (3.30), khi đó tồn tại $D_{*,1} > 0$ sao cho

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (\Phi_{N,s}(\alpha_0 |u|^{N/(N-s)}))^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s}(\alpha_0 \mathfrak{c} |u|^{N/(N-s)}) dx \right)^{\frac{1}{q'}} \leq D_{*,1}. \quad (3.38)$$

với mọi

$$\gamma_0 \geq \gamma_0^{***} := \frac{pa^*}{\mu} \left(\frac{\left(\frac{\alpha_*}{4(1+\varepsilon_0)\alpha_0} \right)^{\frac{N-s}{s}} \min\{k_1, V_0\}}{a^*(1 - \frac{pa^*}{\mu})} \right)^{\frac{p-\mu}{p}}.$$

Kết hợp (3.37) và (3.38), tồn tại một hằng số $D_* > 0$ sao cho

$$\|uu_L^{\zeta-1}\|_{L^{N^*}(\mathbb{R}^N)}^p \leq D_* \zeta^p \|uu_L^{\zeta-1}\|_{L^{qp}(\mathbb{R}^N)}^p.$$

Cho $L \rightarrow +\infty$ trong bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\|u\|_{L^{N^*\zeta}} \leq D_*^{\frac{1}{p\zeta}} \zeta^{\frac{1}{\zeta}} \|u\|_{L^{N^{**}\zeta}(\mathbb{R}^N)}. \quad (3.39)$$

Chọn $\zeta = \frac{N^*}{N^{**}} > 1$, ta có $\zeta^2 N^{**} = \zeta N^*$ và (3.39) vẫn thỏa mãn khi ta thay ζ bởi ζ^2 . Vậy

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{N^*\zeta^2}} &\leq D_*^{\frac{1}{p\zeta^2}} \zeta^{\frac{2}{\zeta^2}} \|u\|_{L^{N^{**}\zeta^2}(\mathbb{R}^N)} \\ &= D_*^{\frac{1}{p\zeta^2}} \zeta^{\frac{2}{\zeta^2}} \|u\|_{L^{N^*\zeta}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq D_*^{\frac{1}{p}(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2})} \zeta^{\frac{1}{\zeta} + \frac{2}{\zeta^2}} \|u\|_{L^{N^{**}\zeta}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Với mọi số nguyên dương $\mathbf{m}$, bằng lập luận tương tự (3.40) đến lần thứ $\mathbf{m}$, ta thu được

$$\|u\|_{L^{N^*\zeta^{\mathbf{m}}}} \leq D_*^{\sum_{j=1}^{\mathbf{m}} \frac{1}{p\zeta^j}} \zeta^{\sum_{j=1}^{\mathbf{m}} j\zeta^{-j}} \|u\|_{L^{N^{**}\zeta}(\mathbb{R}^N)}. \quad (3.41)$$

Lấy giới hạn trong (3.41) khi $\mathbf{m} \rightarrow \infty$, ta có $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_*$, trong đó

$$C_* = D_*^{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p\zeta^j}} \zeta^{\sum_{j=1}^{\infty} j\zeta^{-j}} \|u\|_{L^{N^{**}\zeta}(\mathbb{R}^N)} < +\infty.$$

□

Nếu ta chọn $R = \max\{C_*, 1\}$ trong (3.21) thì $f_R(u) = f(u)$ theo định nghĩa của f_R . Khi đó nghiệm u thu được từ Định lý 3.2.2 chính là nghiệm của phương trình (3.20) và ta có kết quả sau:

Định lý 3.2.4. *Giả sử V thỏa mãn các điều kiện (V_1) và (V_2) hoặc (V_1) và (V_3) , h thỏa mãn các điều kiện $(h_1) - (h_4)$ và hàm Kirchhoff M_i ($i = 1, \dots, T$) thỏa mãn (m_3) , (c_1) và (c_2) . Với mọi $\tau \geq \frac{N}{N-s}$, tồn tại $\beta_{**}(\tau) = \frac{1}{R^{\tau-\delta}} > 0$ và $\gamma^{***} = \max\{a^*, \gamma_0^{**}, \gamma_0^{***}\} > 0$ sao cho bài toán (3.20) có nghiệm không tầm thường $u \in \mathcal{W}$ với mọi $\gamma_1 \geq \gamma^{***}$ và $\beta_0 \in (0, \beta_{**}(\tau))$.*

Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán kiểu Kirchhoff phân thứ nhiều pha mà hàm phi tuyến có độ tăng mũ tới hạn và trên tới hạn. Kết quả đầu tiên là Định lý 3.1.11. Phương trình của chúng tôi được nghiên cứu lần đầu tiên, do đó các kết quả là mới. Cụ thể kết quả này là mở rộng kết quả trong [70] cho bài toán kiểu Kirchhoff phân thứ chứa nhiều pha. Khó khăn gặp phải là có sự xuất hiện của hàm Kirchhoff M_i ($i = 1, \dots, T$), chúng tôi cần điều chỉnh tính toán trong [70] cho phù hợp với phương trình mới. Dựa vào giả thiết của thế vị V , ta có phép nhúng compact từ không gian nghiệm $\mathcal{W}$ vào $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^{-\gamma})$ với mọi $q \geq \frac{N}{s}$. Từ đó ta chứng minh được tính compact của dãy (PS) và giới hạn yếu của nó là nghiệm của bài toán đã cho. Trong trường hợp hàm phi tuyến có độ tăng trên tới hạn, chúng tôi thu được Định lý 3.2.4. Vì chưa có bất đẳng thức Trudinger trong không gian Sobolev phân thứ cho trường hợp trên tới hạn. Do đó chúng tôi giới thiệu hàm cải biên mới, để đưa bài toán về trường hợp tới hạn. Tiếp theo, chúng tôi thiết lập ước lượng L^∞ cho nghiệm và chứng minh nghiệm của bài toán cải tiến với hàm cải biên đề xuất (3.25) là nghiệm của bài toán (3.20). Các kết quả của chương này được công bố trong công trình [75]. Theo hiểu biết của chúng tôi, hiện chưa có bất kỳ kết quả nào cho sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình p-Laplacian phân thứ với độ tăng mũ trên tới hạn. Do đó, kết quả của chúng tôi góp phần bổ sung, làm phong phú thêm vấn đề tồn tại nghiệm cho phương trình phân thứ nhiều pha với độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser.

Kết luận chung

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và cô đặc nghiệm của một số lớp phương trình elliptic chứa toán tử p -Laplace phân thứ. Cụ thể chúng xét bài toán phân thứ nhiều pha.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Kết quả chính của Chương 1 là các Định lý 1.2.5 và Định lý 1.3.3 về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình phân thứ nhiều pha chứa đại lượng phi tuyến Choquard. Hàm phi tuyến có độ tăng dưới tới hạn và độ tăng tới hạn mũ kiểu Trudinger-Moser.
2. Kết quả chính của Chương 2 là các Định lý 2.2.4 và Định lý 2.2.5 về sự tồn tại nghiệm, cô đặc nghiệm và giới hạn của dãy nghiệm cho bài toán không ô-tô-nôm (2.1).
3. Kết quả chính của Chương 3 là hai Định lý 3.1.11 và 3.2.4. Định lý 3.1.11 nói về sự tồn tại nghiệm của phương trình kiểu Kirchhoff phân thứ nhiều pha với kỳ dị (3.1) khi hàm phi tuyến có độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser. Kết quả tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (3.20) khi hàm phi tuyến có độ tăng trên tới hạn mũ.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo:

1. Chứng minh sự tồn tại nghiệm của (2.1) khi λ nhỏ.
2. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình phân thứ nhiều pha.

Danh mục các Công trình của tác giả liên quan đến luận án

1. [62] Pham T. Q., Nguyen T. V. (2026), Concentration phenomena for anisotropic fractional Choquard equations and potential competition, Bulletin of Mathematical Sciences, Vol. 16, No. 1, Article number: 2550018 (48 pages).
2. [75] Trang P. Q., Ahmad B., Thin N. V. (2026), On fractional anisotropic Kirchhoff-Schrödinger type equations in $\mathbb{R}^N$, Discrete and Continuous Dynamical Systems - S. doi: 10.3934/dcdss.2026112.
3. [76] Trang P. Q. (2025), The existence of weak solution to fractional anisotropic equation in $\mathbb{R}^N$ with exponential growth, *TNU Journal of Science and Technology*, 230(06), pp. 487 - 494.

Tài liệu tham khảo

- [1] ADACHI S., TANAKA K. (2000), Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their best exponents, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128, pp. 2051-2057.
- [2] ADIMURTHI, YANG Y. (2010) Interpolation of Hardy inequality and Trudinger-Moser inequality in $\mathbb{R}^N$ and its applications, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 13, pp. 2394-2426.
- [3] AMBROSIO V., T. ISERNIA T. (2018), Multiplicity and concentration results for some nonlinear Schrödinger equations with the fractional p -Laplace, *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*, 38(11), pp. 5835-5881.
- [4] ALVES C. O., AMBROSIO V., ISERNIA T. (2019), Existence, multiplicity and concentration for a class of fractional (p, q) -Laplacian problems in $\mathbb{R}^N$, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 18(4), pp. 2009-2045.
- [5] ALVES C. O., SHEN L. (2024), On existence of solutions for some classes of elliptic problems with supercritical exponential growth, *Math. Zeit*, 306, Article number: 29.
- [6] AMBROSIO V. (2019), On the multiplicity and concentration of positive solutions for a p -fractional Choquard equation in $\mathbb{R}^N$, *Computers & Mathematics with Applications*, 78(8), pp. 2593-2617.
- [7] Ambrosio V. (2022), A Kirchhoff type equation in $\mathbb{R}^N$ involving the fractional (p, q) -Laplacian, *J. Geom. Anal*, 32, no. 4, Paper no. 135, 46 pp.

- [8] Ambrosio V. (2022), Fractional (p, q) -Schrödinger equations with critical and supercritical growth, *Appl. Math. Optim*, 86, no. 3, Paper No. 31.
- [9] AMBROSIO V. (2024), Multiple concentrating solutions for a fractional (p, q) -Choquard equation, *Adv. Nonlinear Stud*, 24(2), pp. 510–541.
- [10] AMBROSIO V. (2024), Nonlinear scalar field (p_1, p_2) -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$: existence and multiplicity, *Calc. Var*, 63, Paper no. 210.
- [11] AMBROSIO V. (2024), Least energy solutions for a class of (p_1, p_2) -Kirchhoff-type problems in $\mathbb{R}^N$ with general nonlinearities, *J. London Math. Soc*, 2, Paper no. 110:e13004.
- [12] AMBROSIO V., ISERNIA T. (2021), Multiplicity of positive solutions for a fractional $p \& q$ -Laplacian problem in $\mathbb{R}^N$, *J. Math. Anal. Appl*, 501(1), Paper no. 124487.
- [13] AMBROSIO V. (2022), A strong maximum principle for the fractional (p, q) -Laplacian operator, *Applied Mathematics Letters*, 126, Paper no. 107813.
- [14] ALVES C. O., YANG M. (2016), Investigating the multiplicity and concentration behaviour of solutions for a quasi-linear Choquard equation via the penalization method, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 146A, pp. 23-58.
- [15] ANTONTSEV S. N., SHMAREV S. I. (2006), Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions: Existence, uniqueness and localization properties of solutions, *Nonlinear Anal*, 65, pp. 722-755.
- [16] AMBROSIO V., RĂDULESCU V. D. (2020), Fractional double-phase patterns: concentration and multiplicity of solutions, *J. Math. Pures Appl*, 142, pp. 101-145.
- [17] AMBROSIO V., REPOVS D. (2021), Multiplicity and concentration results for a (p, q) -Laplacian problem in $\mathbb{R}^N$, *Z. Angew. Math. Phys*, 72, Article number: 33.

- [18] BONHEURE D., D'AVENIA P., POMPONIO A (2016). On the electrostatic Born-Infeld equation with extended charges, *Commun. Math. Phys*, 346, 877–906.
- [19] BORN M., INFELD L. (1933), Foundations of the new field theory, *Nature*, 132, Paper no. 1004.
- [20] BREZIS H., LIEB E. (1983), A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *Proc. Amer. Math. Soc*, 88, pp. 486–490.
- [21] Bucur C., Valdinoci E. (2016), Nonlocal Diffusion and Applications, *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*, 20, Springer.
- [22] CHEN S., LI L., YANG Z. (2020), Multiplicity and concentration of nontrivial nonnegative solutions for a fractional Choquard equation with critical exponent, *RACSAM*, 114, Paper no. 33.
- [23] CAO D. M. (1992), Nontrivial solution of semilinear elliptic equations with critical exponent in $\mathbb{R}^2$, *Comm. Partial Differential Equations*, 17, pp. 407–435.
- [24] Chen S., Fiscella A., Pucci P, X. Tang X. (2020), Coupled elliptic systems in $\mathbb{R}^N$ with (p, N) Laplacian and critical exponential nonlinearities. *Nonlinear Analysis*, 201, Paper no. 112066, 14 pp.
- [25] Fiscella A., Valdinoci E. (2014), A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator, *Nonlinear Anal*, 94, pp. 156–170.
- [26] FURTADO M., ZANATA H. (2021), Kirchhoff-Schrodinger equations in $\mathbb{R}^2$ with critical exponential growth and indefinite potential, *Commun. Contemp. Math*, 23(7), Paper no. 2050030.
- [27] CHERFILS L., IL'YASOV V. (2004), On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with p&q-Laplacian, *Commun. Pure Appl. Anal*, 1(4), pp. 1-14.

- [28] DENG S., XIONG S. (2022), Existence of ground state solutions for fractional Kirchhoff Choquard problems with critical Trudinger-Moser nonlinearity, *Comp. and Appl. Math*, 41, Article number: 21.
- [29] DENG S., TIAN X., XIONG S. (2024), Multiplicity and concentration of solutions for a Choquard equation with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Differ. Equ. Appl*, 31, Paper no. 32.
- [30] Eslami H., Jayasinghe L. B., Waldmann D. (2021), Nonlinear three-dimensional anisotropic material model for failure analysis of timber, *Engineering Failure Analysis*, 130, Article number: 105764.
- [31] Eddine N. C., Ragusa M. A., Repovš D. (2024), On the concentration-compactness principle for anisotropic variable exponent Sobolev spaces and its applications, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 27, pp. 725–756.
- [32] Figueiredo G., Ikoma N., Junior J. S. (2014), Existence and concentration result for the Kirchhoff type equations with general nonlinearities, *Arch. Ration. Mech. Anal*, 213, pp. 931–979.
- [33] FISCELLA A., PUCCI P. (2020), Degenerate Kirchhoff (p, q) -Fractional systems with critical nonlinearities, *Fract. Calc. Appl. Anal*, 23(3), pp. 723-752.
- [34] FRÖHLICH H. (1937), Theory of electrical breakdown in ionic crystal. *Proc. R. Soc. Ser. A*, 160(901), pp. 230–241.
- [35] FRÖHLICH H. (1954), Electrons in lattice fields, *Adv. Phys*, 3(11), pp. 325-361.
- [36] Guidotti P. (2015), Anisotropic diffusions of image processing from Perona-Malik on, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 67, pp. 131-156.
- [37] Giovanni B. M., Radulescu V. D., Servadei R. (2016), Variational Methods for Nonlocal Fractional Equations, *Encyclopedia Math. Appl*, Cambridge University Press, Cambridge, 162.

- [38] ISERNIA T. (2020), Fractional (p, q) -Laplacian problems with potentials vanishing at infinity, *Opuscula Math*, 40(1), pp. 93-110.
- [39] ISERNIA T., REPOVS D. (2021), Nodal solutions for double phase Kirchhoff problems with vanishing potentials, *Asymptotic Analysis*, 124(3-4), pp. 371-396.
- [40] JONES K. R. W. (1995), Newtonian quantum gravity, *Aust. J. Phys*, 48, pp. 1055–1081.
- [41] KRATOU M. (2022), Kirchhoff systems involving fractional p -Laplacian and singular nonlinearity, *Electronic Journal of Differential Equations*, 77, pp. 1-15.
- [42] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Leipzig: Teubner, 1883.
- [43] LIEB E., LOSS M. (2001) *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, Rhode island.
- [44] Liang S., Shi S., Thin N. V. (2024), Multiplicity and Concentration Properties for Fractional Choquard Equations with Exponential Growth, *J Geom Anal*, 34, Paper no. 367.
- [45] Liu S., Perera K. (2024), Multiple solutions for (p, q) -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical or subcritical exponents, *Calc. Var*, 63, Paper no. 199.
- [46] LIEB E. H. (1977), Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation, *Stud. Appl. Math*, 57, pp. 93–105.
- [47] LIONS P. L. (1980), The Choquard equation and related questions, *Nonlinear Anal: Theory, Methods Appl*, 4, pp. 1063–1072.
- [48] LIU S., YANG J., CHEN H. (2022), Infinitely many sign-changing solutions for Choquard equation with doubly critical exponents, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 67(2), pp. 315-337.
- [49] LIA Q., YANG Z. (2016), Multiple solutions for a class of fractional quasi-linear equations with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$, *Complex Var. Elliptic Equ*, 61, pp. 969-983.

- [50] LI Q., YANG Z. (2015), Multiple solution for N –Kirchhoff type problems with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Anal*, 117, pp. 159-168.
- [51] LIU Y., LIU C. (2022), The Ground State Solutions for Kirchhoff-Schrodinger Type Equation with Singular Exponential Nonlinearities in $\mathbb{R}^N$, *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 43(4), pp. 549-566.
- [52] MOSER J. (1960), A new proof of De Giorgi’s theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math*, 13, pp. 457-468.
- [53] MOSER J. (1971), A sharp form of an inequality by N. Trudinger, *Indiana Univ. Math. J*, 20, pp. 1077-1092.
- [54] GIOVANNI B. M., THIN N. V., VILASI L. (2022), On a class of nonlocal Schrödinger equations with exponential growth, *Advances in Differential Equations*, 27, (9-10), pp. 571-610.
- [55] MOROZ V., SCHAFTINGEN J. V., A guide to the Choquard equation, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19, pp. 773–813.
- [56] MOROZ I. M., PENROSE R., TOD P. (1998), Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations, *Classical Quantum Gravity*, 15, pp. 2733–2742.
- [57] NEZZA E. D., PALATUCCI G., VALDINOCI E. (2012), Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces, *Bull. Sci. Math*, 136, pp. 521-573.
- [58] NGUYEN T. V., RĂDULESCU V. D. (2024), Multiplicity and concentration of solutions to fractional anisotropic Schrödinger equations with exponential growth, *Manuscripta math*, 173, pp. 499–554.
- [59] PEKAR S. (1954), Untersuchung über die Elektronentheorie der Kristalle, p. 2. Akademie Verlag, Berlin.
- [60] PENROSE R. (1996), On gravity’s role in quantum state reduction, *Gen. Relativ. Gravitation*, 28, pp. 581–600.

- [61] PARINI E., RUF B. (2018), On the Moser-Trudinger inequality in fractional Sobolev-Slobodeckil spaces, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.*, 29, pp. 315-319.
- [62] PHAM T. Q., NGUYEN T. V. (2026), Concentration phenomena for anisotropic fractional Choquard equations and potential competition, *Bulletin of Mathematical Sciences*, Vol. 16, No. 1, Article number: 2550018 (48 pages).
- [63] Pohozaev I. (1975), A certain class of quasilinear hyperbolic equations. *Mat. Sb*, 96, pp. 152–166.
- [64] PUCCI P., XIANG M., ZHANG B. (2015), Multiple solutions for non-homogeneous Schrödinger-Kirchhoff type equations involving the fractional p -Laplacian in $\mathbb{R}^N$, *Calc. Var.*, 54, pp. 2785-2806.
- [65] QIN D., RĂDULESCU V. D., TANG X. H. (2021), Ground states and geometrically distinct solutions for periodic Choquard-Pekar equations, *Journal of Differential Equations*, 275, pp. 652-683.
- [66] RABINOWITZ P. (1986), Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS Reg. Conf. Ser. Math, *American Mathematical Society*, Providence.
- [67] SHEN L., RADULESCU V. D. (2024), Concentration of ground state solutions for supercritical zero-mass (N, q) -equations of Choquard reaction, *Math. Z*, 308, Paper no. 66.
- [68] STRUWE M. (1990), Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, *Ergeb. Math. Grenzgeb. Berlin: Springer*.
- [69] SZULKIN A., WETH T. (2010), The method of Nehari manifold, in: D. Y. Gao, D. Montreanu, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, *International Press*, Boston, pp. 597-632.
- [70] THIN N. V. (2020), Singular Trudinger-Moser inequality and fractional p -Laplace equations in $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Anal*, 196, pp. 1-28.

- [71] Trudinger N. S. (1967), On imbeddings into Orlicz spaces and some applications, *J. Math. Mech*, 17, pp. 473–483.
- [72] Thin N. V., Thuy P. T., Linh T. T. D. (2024) Existence of solution for the (p,q) -fractional Laplacian equation with nonlocal Choquard reaction and exponential growth, *Complex Var. Elliptic Equ*, 69(11), pp. 1949-1972.
- [73] THIN N. V. (2022), Multiplicity and concentration of solutions to a fractional (p, p_1) -Laplace problem with exponential growth, *J. Math. Anal. Appl*, 506(2), Paper no. 125667.
- [74] TENG K., AGARWAL R. P. (2019), Ground state and bounded state solution for the nonlinear fractional Choquard-Schrödinger-Poisson system, *J. Math. Phys*, 60, Article number: 103507.
- [75] TRANG P. Q., AHMAD B., THIN N. V. (2025), On fractional anisotropic Kirchhoff-Schrödinger type equations in $\mathbb{R}^N$, Discrete and Continuous Dynamical Systems - S. doi: 10.3934/dcdss.2026112.
- [76] TRANG P. Q. (2025), The existence of weak solution to fractional anisotropic equation in $\mathbb{R}^N$ with exponential growth, *TNU Journal of Science and Technology*, 230(06), pp. 487 - 494.
- [77] XIE X. L., WANG F., ZHANG W. (2023), Existence of solutions for the (p, q) -Laplacian equation with nonlocal Choquard reaction, *Applied Mathematics Letters*, 135, Article number 108418.
- [78] ZHANG Y., TANG X., RĂDULESCU V. D. (2021), Concentrating of solutions for fractional double-phase problems: critical and supercritical cases, *J. Differential Equations*, 302, pp. 139-184.
- [79] ZHANG W., ZHANG J., RĂDULESCU V. D. (2023), Concentrating solutions for singularly perturbed double phase problems with nonlocal reaction, *J. Differential Equations*, 347, pp. 56-103.
- [80] ZHANG Y., RĂDULESCU V. D., CHEN J., QIN D. D. (2024), Concentration and multiplicity of solutions for fractional double phase problems,

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics,
First View , pp. 1 - 54, DOI: <https://doi.org/10.1017/prm.2024.84>.

- [81] ZHIKOV V. V. (1986), Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat*, 50(4), pp. 675–710; English translation in *Math. USSR, Izv.* 29 (1) (1987), 33–66.
- [82] ZHIKOV V. V. (1995), On Lavrentiev’s phenomenon, *Russ. J. Math. Phys*, 3(2), pp. 249–269.
- [83] ZHANG C. (2019), Trudinger-Moser inequalities in Fractional Sobolev-Slobodeckij spaces and multiplicity of weak solutions to the Fractional-Laplacian equation, *Adv. Nonlinear Stud*, 19, pp. 197-217.
- [84] ZHANG L., TANG X., ZHANG N. (2022), On critical N –Kirchhoff type equations involving Trudinger-Moser nonlinearity, *Math Meth Appl Sci*, 45, pp. 5945-5964.
- [85] ZHANG B., HAN X., THIN N. V. (2023), Schrodinger-Kirchhoff-type problems involving the fractional p –Laplacian with exponential growth, *Appl. Anal*, 102(7), pp. 1942-1974.
- [86] WILLEM M. (1996) Minimax Theorems, *Basel: Birkhäuser*.

Phụ lục

Ký hiệu	Ý nghĩa	Nguồn/Mô tả
$C^1(X, Y)$	Không gian các hàm liên tục, khả vi bậc 1 từ X vào Y	
$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$	Không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong $\mathbb{R}^N$	
$B_R(y)$	Hình cầu tâm y bán kính R	
$L^p(\Omega)$	Không gian các hàm f đo được trên Ω	Định nghĩa 1.1.1
$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$	Nửa chuẩn Gagliardo	Định nghĩa 1.1.2
$W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$	Không gian Sobolev phân thứ	Định nghĩa 1.1.2
$\ u\ _{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$	Chuẩn của không gian Sobolev phân thứ	Định nghĩa 1.1.2
$W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N), i \in \{1, \dots, m\}$	Không gian Sobolev phân thứ	Dùng cho bài toán (1.18) và (1.36)
$\ u\ _{\gamma, W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}$	Chuẩn của không gian $W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$	Trang 19
W	Giao của các không gian Sobolev phân thứ $W^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$	Trang 19
p_s^*	Số mũ tới hạn	$p_s^* = \frac{Np}{N-ps}$
$\mathcal{A}_{\nu,\gamma}$	Hằng số tối ưu cho bất đẳng thức nhúng	Xem trong (1.1)
$(-\Delta)_{p_i}^s u(x)$	Toán tử p_i -Laplace phân thứ	Định nghĩa 1.1.3

Ký hiệu	Ý nghĩa	Nguồn/Mô tả
$\mathcal{S}_{p_s^*}$	Hằng số tối ưu	Bổ đề 1.1.13
$W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N),$ $i = 1, \dots, m$	Không gian Sobolev phân thứ	Dùng cho bài toán (2.1)
$\ v\ _{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}$	Chuẩn của không gian $W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$	Trang 46
W_ζ	Giao của các không gian $W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$	Trang 46
$\ v\ _{W_\zeta}$	Chuẩn của không gian W_ζ	$\sum_{i=1}^m \ v\ _{W_{V,\zeta}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}$
$S_{\nu,\zeta}$	Hằng số tối ưu cho phép nhúng	Xem trong (2.2)
$\mathcal{N}_\zeta$	Đa tập Nehari liên kết với bài toán (2.1)	Trang 52
$\mathcal{L}_p^s \varphi(x)$	Toán tử p -Laplace phân thứ	$\mathcal{L}_p^s \varphi(x) = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x)} \left(\varphi(x) - \varphi(y) ^{p-2} (\varphi(x) - \varphi(y)) K(x-y) \right) dy$
$\mathcal{L}_{p_i}^s \varphi(x)$	Toán tử p_i -Laplace phân thứ	
$\mathcal{W}_{K_i}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N),$ $i = 1, \dots, T$	Không gian Sobolev phân thứ	Dùng cho bài toán (3.1) và (3.20)
$\ v\ _{\mathcal{W}_{K_i}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)}$	Chuẩn của không gian $\mathcal{W}_{K_i}^{s,p_i}(\mathbb{R}^N)$	Trang 85
$\mathcal{W}_i,$ $i = 1, \dots, T$	Bao đóng của $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$	Trang 85
$\ v\ _{\mathcal{W}_i}$	Chuẩn của không gian $\mathcal{W}_i$	Trang 85
$\mathcal{W}$	Giao của các không gian $\mathcal{W}_i$	
S_ν	Hằng số tối ưu cho phép nhúng từ $\mathcal{W}$ vào $L^\nu(\mathbb{R}^N)$	Xem trong (3.2)
$L^q(\mathbb{R}^N, x ^{-\gamma})$	Không gian các hàm đo được có trọng số trong $\mathbb{R}^N$	Chuẩn: $\ u\ _{L^q(\mathbb{R}^N, x ^{-\gamma})} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x) ^q x ^{-\gamma} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$

Ký hiệu	Ý nghĩa	Nguồn/Mô tả
$A_{\nu,\gamma}$	Hằng số tối ưu cho phép nhúng từ $\mathcal{W}_1$ vào $L^\nu(\mathbb{R}^N, x ^{-\gamma})$	Xem trong (3.3)
$\mathbb{A}_{\nu,\gamma}$	Hằng số tối ưu cho phép nhúng từ $\mathcal{W}$ vào $L^\nu(\mathbb{R}^N, x ^{-\gamma})$	Xem trong (3.4)