

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN DUY PHƯƠNG

VỀ ĐA THỨC XÁC ĐỊNH DUY NHẤT VÀ TẬP XÁC ĐỊNH
DUY NHẤT ĐỐI VỚI L -HÀM VÀ HÀM PHÂN HÌNH

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 9460102

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2026

Công trình được hoàn thành tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học:

1. TS. Vũ Hoài An
2. TS. Lê Quang Ninh

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường học tại:
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên vào hồi ... giờ ... ngày
... tháng ... năm 2026.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam;
- Trung tâm Số - Đại học Thái Nguyên;
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Vào những năm 20 của thế kỷ XX, kế thừa tư tưởng về sự tồn tại nghiệm của Định lý cơ bản của Đại số đối với các đa thức trên trường số phức, nhà toán học Phần Lan R. Nevanlinna đã xây dựng nên một trong những lý thuyết sâu sắc và có ảnh hưởng rộng lớn của Giải tích phức, đó là Lý thuyết phân bố giá trị của các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, ngày nay được biết đến rộng rãi với tên gọi Lý thuyết Nevanlinna. Lý thuyết phân bố giá trị đánh dấu một bước phát triển mang tính đột phá trong giải tích phức khi chuyển hướng từ việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của đa thức sang khảo sát sự phân bố giá trị của các hàm phân hình. Hạt nhân của lý thuyết này nằm ở hai định lý cơ bản. Cụ thể, Định lý cơ bản thứ nhất đóng vai trò kế thừa và mở rộng sâu sắc Định lý cơ bản của Đại số nhằm mô tả sự phân bố đều giá trị của hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Tiếp nối nền tảng đó, Định lý cơ bản thứ hai mô tả ảnh hưởng của đạo hàm đối với quá trình phân bố giá trị này. Trong quá trình phát triển, Lý thuyết Nevanlinna đã thu hút sự quan tâm và đóng góp của nhiều nhà toán học như H. Cartan [10] đã mở rộng lý thuyết cho tổ hợp

tuyến tính và các đường cong chỉnh hình trên không gian xạ ảnh, tạo nền tảng hình học cho các nghiên cứu của H. Weyl [62], L. Ahlfors [1] và P. Griffiths [9, 19], ... và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của Toán học. Đóng góp đầu tiên của toán học Việt Nam cho lĩnh vực này phải kể đến công trình của L. V. Thiêm [37] về bài toán ngược của lý thuyết phân bố giá trị, ông đã chứng minh sự tồn tại của hàm phân hình với các chỉ số rẽ nhánh cho trước thông qua lý thuyết mặt Riemann.

Một trong những ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna là bài toán xác định duy nhất đối với hàm phân hình, nhằm tìm kiếm các điều kiện để hai hàm phân hình đồng nhất hoặc có liên hệ tuyến tính. Kết quả khởi đầu cho lý thuyết này là Định lý 5 điểm của R. Nevanlinna (1926), khẳng định một hàm phân hình được xác định duy nhất thông qua ảnh ngược của năm giá trị phân biệt.

Để thiết lập công cụ khảo sát bài toán xác định duy nhất, các nhà toán học đã xây dựng một bộ khung ký hiệu chuẩn hóa nhằm mô tả sự trùng khớp ảnh ngược của hai hàm phân hình. Cụ thể, các công cụ này được thiết lập như sau:

Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ký hiệu $E_f(a)$ (tương ứng $\overline{E}_f(a)$) là tập các a -điểm của f trong đó mỗi a -điểm được tính với bội của nó (tương ứng là tập các a -điểm phân biệt của f). Ta ký hiệu

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} E_f(a); \quad \overline{E}_f(S) = \bigcup_{a \in S} \overline{E}_f(a).$$

Hai hàm phân hình f, g được gọi là chia sẻ giá trị a kể cả bội (không kể bội) nếu $E_f(a) = E_g(a)$ (tương ứng $\overline{E}_f(a) = \overline{E}_g(a)$). Hai

hàm phân hình f, g được gọi là chia sẻ tập S kể cả bội (không kể bội) nếu $E_f(S) = E_g(S)$ (tương ứng $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$).

Từ kết quả của Nevanlinna, bài toán được phát triển theo hướng chia sẻ tập hợp. F. Gross [20] nghiên cứu cấu trúc ảnh ngược của các tập hợp và đề xuất khái niệm tập xác định duy nhất. Các kết quả theo hướng nghiên cứu này được C.-C. Yang và H.-X. Yi [67] hệ thống hóa thành các tiêu chuẩn đồng nhất cơ bản cho hàm phân hình thông qua bài toán xác định duy nhất đối với tập xác định duy nhất và tập song xác định duy nhất. Nhằm giảm thiểu số lượng phần tử của các tập chia sẻ, I. Lahiri [35] đưa ra phương pháp chia sẻ trọng số, sau đó được A. Banerjee [6] và nhiều tác giả tiếp tục phát triển.

Đồng thời, bài toán xác định duy nhất cũng được mở rộng cho các không gian và đối tượng cấu trúc khác. Trên trường số p -adic, nền tảng của lý thuyết Nevanlinna được thiết lập bởi H. H. Khoái [27], từ đó bài toán chia sẻ giá trị được ông và A. Escassut [12] phát triển. Đối với không gian nhiều biến, lý thuyết được H. Fujimoto [16] và M. Ru [56] mở rộng cho các đường cong chỉnh hình và ánh xạ phân hình.

Đóng góp vào sự phát triển chung của bài toán xác định duy nhất, các nhà toán học Việt Nam đã đạt được nhiều kết quả đối với các lớp đối tượng khác nhau. Tiêu biểu có thể kể đến các nghiên cứu của Đ. Đ. Thái - S. Đ. Quang [61] đối với ánh xạ phân hình nhiều biến với điều kiện bội bị chặn, T. T. Tấn [11] về bài toán chia sẻ mục tiêu di động, T. T. H. An [2] về sự xác định duy nhất của các đa thức vi phân chia sẻ hàm nhỏ, H. T. Phương [54] đối với lý thuyết Nevanlinna và bài toán xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh

hình trên hình vành khuyên chia sẻ các siêu mặt. Những nghiên cứu này cùng với các công trình của các tác giả khác đã đóng góp vào sự phát triển của lý thuyết trong nước.

Năm 1926, R. Nevanlinna (xem [51]) đã chứng minh nếu hai hàm phân hình chia sẻ năm giá trị phân biệt không kể bội thì đồng nhất bằng nhau. Kết quả này cho thấy hai hàm phân hình được xác định duy nhất thông qua ảnh ngược không kể bội của năm điểm phân biệt. Kể từ đó, hướng nghiên cứu này đã thu hút được nhiều tác giả trong và ngoài nước, tiêu biểu như các nghiên cứu của G. Gundersen [22, 23] về tính bội của các giá trị chia sẻ, hay E. Mues [50, 49] mở rộng bài toán sang việc chia sẻ giá trị liên quan đến đạo hàm, ...

Năm 1977, F. Gross [21] đã phát triển vấn đề duy nhất theo hướng mới. Thay vì xét ảnh ngược của các điểm riêng rẽ, ông đề xuất ý tưởng xem xét ảnh ngược của một tập hợp điểm S thuộc $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ông đặt ra hai vấn đề nghiên cứu cho hàm phân hình:

(i) *Tìm các tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình, tức là tìm các tập $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho hai hàm phân hình chia sẻ tập S kể cả bội hoặc không kể bội thì đồng nhất bằng nhau;*

(ii) *Tìm các tập song xác định duy nhất cho các hàm phân hình, tức là tìm các cặp tập hợp $S_1, S_2 \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho hai hàm phân hình chia sẻ tập S_1 và S_2 kể cả bội hoặc không kể bội thì đồng nhất bằng nhau.*

H.-X. Yi (xem [69, 67]) là người đầu tiên đưa ra câu trả lời cho Vấn đề Gross. Từ đó, theo hướng nghiên cứu này, các kết quả đạt được là rất phong phú và sâu sắc (xem [16, 17, 38, 14, 28, 31, 30, 6, 41, 57, 2, 55, 59, 66]).

Có thể chia các công trình nghiên cứu này thành hai chủ đề cơ bản:

1. Tìm các tập xác định duy nhất, song xác định duy nhất cho hàm phân hình hay các lớp hàm đặc biệt của hàm phân hình với số phần tử ít nhất có thể với các điều kiện các hàm hay các đa thức vi phân của các hàm chia sẻ một hay nhiều phần tử, tập hợp;

2. Thiết lập đặc trưng của tập duy nhất, song xác định duy nhất.

Song song với các chủ đề trên, việc mở rộng bài toán sang lớp các L -hàm đang trở thành hướng nghiên cứu chuyên sâu. J. Steuding [60] đã thiết lập nền tảng lý thuyết phân bố giá trị cho lớp Selberg mở rộng, tạo tiền đề cho các định lý xác định duy nhất của B. Q. Li [45, 46]. Việc vận dụng các kỹ thuật về đa thức vi phân, ánh xạ nhiều biến và điều kiện chia sẻ tập hợp – những lĩnh vực mà các nhà toán học Việt Nam đã đóng góp quan trọng nêu trên – vào đối tượng L -hàm đang mang lại nhiều kết quả khả quan. Các kỹ thuật này đóng vai trò là công cụ then chốt, cho phép mở rộng các định lý xác định duy nhất sang điều kiện chia sẻ tập hợp và mục tiêu di động, khẳng định giá trị công cụ của phương pháp giải tích phức trong việc khám phá cấu trúc L -hàm, đồng thời thiết lập cơ sở lý thuyết vững chắc cho các kết quả nghiên cứu trong luận án này.

Trong luận án này chúng tôi sẽ tập trung nghiên cứu theo chủ đề thứ nhất cho các hàm phân hình hay L -hàm. Theo hướng nghiên cứu của chủ đề này, đối với mục tiêu tìm các tập xác định duy nhất, năm 2018, Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi [70] đã chỉ ra một dạng tập xác định duy nhất kể cả bội cho một L -hàm và một hàm phân hình. Các tác giả đã chứng minh:

Định lý 1. Cho f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm và L là một L -hàm khác hằng. Đặt $Y_{n,m}(z) = z^n + az^m + b$, với $a, b \neq 0$, trong đó m, n là các số nguyên dương, $n > 2m + 4$, $\gcd(n, m) = 1$ và $S_Y = \{z : Y_{n,m}(z) = 0\}$. Khi đó nếu $E_f(S_Y) = E_L(S_Y)$ thì $f = L$.

Định lý 1 cho ta một dạng tập xác định duy nhất cho một L -hàm khác hằng và một hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm S gồm 7 phần tử (khi ta chọn $m = 1, n = 7$). Đa thức $Y_{n,m}(z)$ trong Định lý 1 được gọi là đa thức kiểu Yi.

Năm 2023, H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương [34] đã thiết kế một dạng đa thức mới $P_K(z)$ khác với đa thức kiểu $Y_{n,m}(z)$ và đưa ra một lớp các tập xác định duy nhất đối với một L -hàm và một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm gồm 5 phần tử. Cụ thể, các tác giả đã xét $P_K(z) \in \mathbb{C}[z]$ dạng:

$$\begin{aligned} P_K(z) &= (n + m + 1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n + m + 1 - i} z^{n+m+1-i} a^i \right) + 1 \\ &= Q_K(z) + 1, \end{aligned}$$

với điều kiện $a \neq 0$, $Q_K(a) \neq -1$ và $P_K(a) \neq 0$. Ký hiệu

$$S_K = \{z : P_K(z) = 0\}. \quad (1)$$

Các tác giả đã chứng minh kết quả sau:

Định lý 2 ([34]). Cho f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm, L là một L -hàm khác hằng và S_K được xác định trong (1). Khi đó $L = f$ nếu $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ và $n \geq m + 2$.

Định lý 3 ([34]). Cho f là hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng và S_K được xác định trong (1). Khi đó $L = f$ nếu $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ và $n \geq 2$, $m \geq 2$, $n + m \geq 8$.

Định lý 2 cho thấy sự tồn tại của tập xác định duy nhất cho một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm và một L -hàm gồm 5 phần tử (khi chọn $m = 1, n = 3$), giảm xuống từ 7 phần tử so với Định lý 1. Đồng thời, định lý này cũng nói lỏng điều kiện về bậc ($n \geq m + 2$) và loại bỏ hoàn toàn giả thiết $\gcd(n, m) = 1$. Định lý 3 cho thấy sự tồn tại của tập xác định duy nhất cho một hàm phân hình tổng quát và một L -hàm gồm 9 phần tử (khi chọn $n + m = 8$). Đồng thời, định lý này đã loại bỏ hoàn toàn giả thiết "có hữu hạn cực điểm" để áp dụng cho mọi hàm phân hình khác hằng, với sự đánh đổi là các điều kiện về bậc được thắt chặt hơn ($n \geq 2, m \geq 2$ và $n + m \geq 8$).

Năm 2023, dựa trên lớp đa thức $P(z)$ thỏa mãn các điều kiện Fujimoto, A. Banerjee và A. Kundu [8] đã khẳng định sự đồng nhất một L -hàm và một hàm phân hình thông qua việc chia sẻ tập hợp với trọng số 2, một tổng quát kết quả của H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương. Cụ thể các tác giả đã chứng minh định lý:

Định lý 4. Cho $P(z) = a(z - a_1) \cdots (z - a_q)$ có đạo hàm $P'(z) = aq(z - d_1)^{q_1} \cdots (z - d_k)^{q_k}$ thỏa mãn điều kiện $P(d_i) \neq P(d_j)$ với mọi $1 \leq i < j \leq k$ và là đa thức duy nhất mạnh cho hàm phân hình. Ký hiệu $S = \{z : P(z) = 0\}$. Khi đó với một hàm phân hình khác hằng f và một L -hàm khác hằng L , nếu $\min\{q_1, q_2\} \geq 2$ khi $k = 2$, $q \geq 2k + 4$ và $E_f(S, 2) = E_L(S, 2)$ thì ta có $f = L$.

Có thể thấy lớp đa thức trong Định lý 4 tổng quát hơn so với lớp đa thức trong Định lý 3 và điều kiện $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ sẽ kéo theo điều kiện $E_f(S, 2) = E_L(S, 2)$, do vậy Định lý 4 là một cải tiến đáng kể của Định lý 3.

Đối với việc nghiên cứu các tập song xác định duy nhất, đặc biệt

là cặp gồm một tập hữu hạn S và tập cực điểm $\{\infty\}$, thường dẫn đến một hệ thức phụ thuộc tuyến tính $f = cg$. Sự tồn tại của hệ thức này đối với tập S sinh bởi đa thức $Y_{n,m}(z)$ đã được chứng minh bởi P. Li và C.-C. Yang [38] và H.-X. Yi [69]. Tiếp đó, H. Fujimoto [16] đã đưa ra các điều kiện tổng quát đối với đa thức duy nhất mạnh để giải thích sự xuất hiện của hằng số c . Mở rộng bài toán này cho các L -hàm, Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi [70] cũng thu được hệ thức phụ thuộc tuyến tính tương tự và sử dụng giả thiết $\gcd(n, m) = 1$ để suy ra sự đồng nhất $f \equiv g$.

Theo hướng tiếp cận này, năm 2021, H. H. Khoái, V. H. An và L. Q. Ninh [32] đã nghiên cứu bài toán chia sẻ nghịch ảnh của cặp tập hợp S, T sinh bởi đa thức $Y_{n,m}(z)$, chỉ ra sự tồn tại của hệ thức phụ thuộc tuyến tính $f = hL$ hoặc sự đồng nhất tuyệt đối khi $\gcd(n, m) = 1$ thông qua định lý sau:

Định lý 5. *Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $n \geq 2m + 8$, $P(z), Q(z)$ là các đa thức kiểu $Y_{n,m}$ với các hệ số khác nhau. Ký hiệu S và T lần lượt là các tập không điểm của $P(z)$ và $Q(z)$. Giả sử f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm và L là một L -hàm khác hằng thỏa mãn $\overline{E}_L(S) = \overline{E}_f(S)$. Khi đó:*

- (i) *Tồn tại hằng số h khác không sao cho $f = hL$.*
- (ii) *Nếu $\gcd(n, m) = 1$ thì $f = L$.*
- (iii) *Đặc biệt, nếu f là một L -hàm khác hằng thì $f = L$ và $P = Q$.*

Có thể thấy, Định lý 5 cho chúng ta một dạng song xác định duy nhất cho một hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm và một L -hàm khác hằng là một cặp tập hợp các không điểm của đa thức

kiểu $Y_{n,m}(z)$. Ngoài ra, định lý này cũng cho một điều kiện đại số để một L -hàm và một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm biểu thị tuyến tính qua nhau. Định lý này cũng mở ra hướng nghiên cứu về song xác định duy nhất cho các hàm phân hình.

Đối với vấn đề duy nhất liên quan đến điều kiện các đa thức vi phân chia sẻ một hay nhiều tập hợp được xem như khởi nguồn từ giả thuyết của W. K. Hayman [25] (xem thêm [24]) về sự phân bố giá trị của đa thức vi phân. Năm 1997, C.-C. Yang và X. H. Hua [66] đã nghiên cứu đa thức vi phân dạng $f^n f'$ và chứng minh định lý sau:

Định lý 6 ([66]). *Cho $n \geq 11$ là một số nguyên và a là một số phức khác 0. Giả sử hai hàm phân hình khác hằng f và g thỏa mãn các đa thức vi phân $f^n f'$ và $g^n g'$ nhận giá trị a CM. Khi đó, hoặc $f = dg$ với $d^{n+1} = 1$, hoặc $f(z) = c_1 e^{cz}$ và $g(z) = c_2 e^{-cz}$, ở đó c, c_1, c_2 là các hằng số và thỏa mãn $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -a^2$.*

Có thể thấy, Định lý 6 cho chúng ta một tiêu chuẩn giải tích chặt chẽ về tính duy nhất của hàm phân hình thông qua cấu trúc đa thức vi phân. Việc sử dụng lũy thừa bậc cao ($n \geq 11$) đã thu giảm điều kiện từ việc chia sẻ nhiều giá trị xuống chỉ còn một giá trị duy nhất $a \neq 0$ (CM), đồng thời phân loại chính xác hai hàm số thành dạng tỷ lệ hoặc dạng hàm mũ. Kết quả này tạo tiền đề lý thuyết quan trọng để mở rộng bài toán chia sẻ tập hợp cho các đạo hàm cấp cao và các đối tượng phức tạp hơn như L -hàm ở các nghiên cứu sau. Tiêu biểu như J. Ojeda [52] với các ứng dụng của giả thuyết W. K. Hayman trong môi trường p -adic, [53] về các đa thức vi phân chia sẻ tập hợp hữu hạn; M. L. Fang và W. Hong [13] trong việc tối ưu hóa bậc của đa thức hay I. Lahiri [35] với phương pháp chia sẻ có trọng số. Ngoài

ra, các đóng góp của H. Fujimoto [17] và A. Banerjee [6] cũng đóng vai trò quan trọng.

Đối với lớp L -hàm, năm 2017, F. Liu, X.-M. Li và H.-X. Yi [48] đã mở rộng bài toán cho các đạo hàm cấp cao và chứng minh:

Định lý 7 ([48]). *Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương sao cho $n > 3k + 6$. Giả sử rằng $(f^n)^{(k)}$ và $(L^n)^{(k)}$ chia sẻ giá trị 1 CM. Khi đó $f = tL$, trong đó t là hằng số thỏa mãn $t^n = 1$.*

Đến năm 2019, X.-M. Li, F. Liu và H.-X. Yi. [43] tiếp tục mở rộng cho các đa thức vi phân có cấu trúc tổng quát hơn và thu được kết quả:

Định lý 8 ([43]). *Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương, $k \geq 2$ và $n > 3k + 9$. Giả sử rằng các đa thức vi phân $(f^n(f-1))^{(k)}$ và $(L^n(L-1))^{(k)}$ chia sẻ tập $\{1\}$ CM. Khi đó $f = L$.*

Có thể nói, vấn đề nghiên cứu về xác định duy nhất cho các hàm phân hình thông qua điều kiện chia sẻ một hoặc hai tập hợp của hàm phân hình hoặc đa thức vi phân của chúng đã và đang phát triển mạnh mẽ, thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả trong và ngoài nước, thu được nhiều kết quả quan trọng và vẫn còn một số vấn đề mở cần được tiếp tục nghiên cứu.

Sự lựa chọn đề tài *Về đa thức xác định duy nhất và tập xác định duy nhất đối với L -hàm và hàm phân hình* của chúng tôi nhằm làm phong phú thêm các kết quả nghiên cứu theo hướng này.

2. Đối tượng và mục đích nghiên cứu

2.1. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và lớp L -hàm thuộc lớp Selberg $\mathcal{S}$ với các đặc trưng giải tích nghiêm ngặt.

2.2. Mục đích nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi tập trung giải quyết hai vấn đề sau:

Vấn đề thứ nhất: Xây dựng một số dạng đa thức duy nhất cho các hàm phân hình, từ đó chỉ ra một số dạng tập xác định duy nhất hoặc song xác định duy nhất cho một L -hàm và một hàm phân hình.

Vấn đề thứ hai: Xây dựng một số định lý duy nhất mới liên quan điều kiện các đa thức vi phân của L -hàm và một hàm phân hình chia sẻ một tập hữu hạn.

3. Tổng quan về luận án

a) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ nhất:

Cho $P(z)$ là một đa thức một biến, $\mathcal{F}_1$ và $\mathcal{F}_2$ là hai lớp các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Ta nói $P(z)$ là đa thức duy nhất cho $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ nếu điều kiện $P(f) = P(g)$ kéo theo $f = g$ với mọi $f \in \mathcal{F}_1$ và $g \in \mathcal{F}_2$. Ta nói $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ nếu điều kiện $P(f) = cP(g)$, với c là một hằng số khác không, kéo theo $f = g$ với mọi $f \in \mathcal{F}_1$ và $g \in \mathcal{F}_2$. Trong trường hợp $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ thì ta gọi $P(z)$ là đa thức duy nhất hay tương ứng duy nhất mạnh cho họ $\mathcal{F}$.

Trong luận án này, một công cụ quan trọng được chúng tôi vận dụng xuyên suốt là các điều kiện về đa thức duy nhất mạnh của H. Fujimoto.

Cho $P(z)$ là một đa thức của $\mathbb{C}[z]$ có bậc q với đạo hàm của $P(z)$ có k không điểm phân biệt $d_1, d_2, \dots, d_k$ với bội tương ứng $m_1, m_2, \dots, m_k$.

$$P'(z) = aq(z - d_1)^{m_1}(z - d_2)^{m_2} \dots (z - d_k)^{m_k}. \quad (1.3)$$

Khi đó số k được gọi là chỉ số đạo hàm của $P(z)$. Giả sử rằng:

$$P(d_i) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1.4)$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{k-1} \geq m_k \geq 1, \quad k \geq 2. \quad (1.5)$$

Chú ý rằng, điều kiện (1.4) suy ra $P(z)$ chỉ có nghiệm đơn.

Ta nhắc lại một điều kiện đặt ra bởi nhà toán học H. Fujimoto (xem [16], Định lý 1, trang 1176):

$$P(d_i) \neq P(d_j), \quad 1 \leq i < j \leq k, \quad k \geq 2. \quad (F)$$

Chú ý rằng điều kiện (F) là luôn đúng khi $k = 2$. Do đó ta chỉ cần quan tâm đến điều kiện này khi $k \geq 3$.

Ký hiệu $\mathcal{S}$ là lớp các L -hàm Selberg, $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ là họ các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$.

Đối với vấn đề xây dựng một số dạng đa thức duy nhất cho $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ chúng tôi thu được hai kết quả: Định lý 1.2.3 và Định lý 2.2.1 xác định các dạng đa thức duy nhất cho $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Có thể thấy Định lý 1.2.3 là một mở rộng của Bổ đề 9 của H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương trong [34]. Dựa trên các Định lý 1.2.3 và Định

lý 2.2.1, chúng tôi chứng minh được một số kết quả về tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình như sau:

Đối với lớp L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm, chúng tôi đã thiết lập được một điều kiện đủ liên quan đến bậc của đa thức để một L -hàm và một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm là trùng nhau khi chia sẻ một tập hợp hữu hạn (Định lý 1.2.4). Từ đó chỉ ra sự tồn tại của một lớp các tập xác định duy nhất gồm 5 phần tử đối với L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm (Định lý 1.2.4). Ngoài ra, chúng tôi xây dựng mới các điều kiện đủ để một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm và một L -hàm phụ thuộc tuyến tính (Định lý 1.3.1) hoặc trùng nhau (Định lý 1.3.2) khi chúng chia sẻ hai lớp của các tập hợp hữu hạn phân biệt.

Có thể thấy Định lý 1.2.4 đã cải tiến Định lý 2 của H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương trong [34] bằng cách tối ưu hóa số phần tử tập xác định duy nhất (từ 9 xuống 5 phần tử) và mở rộng Định lý 5 của Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi trong [70] bằng cách loại bỏ giả thiết $\gcd(n, m) = 1$. Định lý 1.3.1 là một sự tổng quát hóa cho Định lý 5 của Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi trong [70] và Định lý 2 của Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi trong [34] khi chuyển bài toán từ chia sẻ một tập hợp sang chia sẻ hai tập hợp hữu hạn phân biệt.

Đối với lớp L -hàm và hàm phân hình bất kỳ, chúng tôi đã chỉ ra được một lớp tập xác định duy nhất cho $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ liên quan đến không điểm của đa thức xác định bởi Fujimoto với số phần tử ít nhất là 5 (Định lý 2.2.2) hay liên quan đến không điểm của đa thức kiểu Yi (Định lý 2.2.7), từ đó chỉ ra sự tồn tại của một lớp tập xác định

duy nhất kiểu Yi gồm 10 phần tử (Chú ý 2.2.8). Đồng thời, luận án cũng thiết lập một điều kiện đại số liên quan đến không điểm của hai đa thức kiểu Yi để một hàm phân hình biểu thị tuyến tính qua một L -hàm hoặc hai L -hàm trùng nhau (Định lý 2.2.6). Ngoài ra, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ liên quan đến đại lượng khuyết chung tại 0 và $+\infty$ để hai hàm phân hình trùng nhau (Định lý 2.3.1) khi chúng chia sẻ một tập hợp hữu hạn. Từ đó chỉ ra sự tồn tại của các lớp tập xác định duy nhất với số phần tử được thu gọn đáng kể (xuống còn từ 6 đến 10 phần tử) khi hàm phân hình có các giá trị khuyết phù hợp (Hệ quả 2.3.2 và Hệ quả 2.3.3).

Có thể thấy, Định lý 2.2.1 là một mở rộng đối với Định lý 3.4 của A. Banerjee và A. Kundu trong [8] thông qua việc thay đổi các điều kiện giả thiết, cho phép xác lập lớp đa thức duy nhất mạnh trên không gian $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ đối với các đa thức có cấu trúc nghiệm của đạo hàm chứa nghiệm đơn, vốn là lớp đối tượng nằm ngoài phạm vi áp dụng của Định lý 3.4. Tiếp đó, Định lý 2.2.2 đã cải tiến Định lý 1 của H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương trong [34] thông qua việc nới lỏng điều kiện bậc của đa thức. Định lý 2.2.6 là một mở rộng trực tiếp Định lý 1 của V. H. An và N. D. Phương trong [5]. Đặc biệt, kết quả ở Định lý 2.3.1 đã cụ thể hóa và chứng minh trọn vẹn dự đoán của H. H. Khoái và V. H. An trong [29] đối với quan hệ giữa hàm phân hình và L -hàm, thông qua việc định lượng hóa các điều kiện về giá trị khuyết cho sự đồng nhất của hai lớp hàm.

b) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ hai, chúng tôi đã:

Thiết lập được điều kiện đủ liên quan đến việc chia sẻ một tập hữu hạn của hai đa thức vi phân kiểu $(f^n)^{(m)}$ tương ứng để hai hàm

phân hình biểu thị tuyến tính qua nhau hoặc hai đạo hàm cấp cao của chúng trùng nhau (Định lý 3.2.1, Hệ quả 3.2.3 và Hệ quả 3.2.4). Từ đó xác lập được tập xác định duy nhất cho hàm phân hình gồm 11 phần tử liên quan đến đại lượng khuyết chung tại 0 và $+\infty$ của hai đa thức vi phân kiểu $(f^n)^{(m)}$ (Hệ quả 3.2.2).

Thiết lập một điều kiện đủ liên quan đến các đa thức vi phân dạng $(f^n)^{(m)}$ chia sẻ một tập hữu hạn hay một phần tử để một L -hàm và một hàm phân hình trùng nhau hoặc sai khác một hằng số tỷ lệ là nghiệm của đơn vị (Định lý 3.2.9, Hệ quả 3.2.10).

Xây dựng mới một số định lý duy nhất liên quan đến các đa thức vi phân dạng $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ chia sẻ một tập hữu hạn hay một phần tử để một L -hàm và một hàm phân hình trùng nhau hoặc biểu thị tuyến tính qua nhau (Định lý 3.2.11, Hệ quả 3.2.12 và Định lý 3.2.13).

Có thể thấy Định lý 3.2.9 đã mở rộng Định lý 1.1 của F. Liu, X.-M. Li và H.-X. Yi trong [48] thông qua việc thiết lập phép chia sẻ tập nghiệm của đơn vị bậc d theo CM cho đạo hàm bậc k của đơn thức $(f^n)^{(k)}$. Hơn nữa, Định lý 3.2.11 và Hệ quả 3.2.12 là một sự cải tiến và tổng quát hóa trực tiếp Định lý 1.10 của X.-M. Li, F. Liu và H.-X. Yi trong [43] thông qua việc nói lỏng cấu trúc của đối tượng khảo sát sang đạo hàm của lớp đa thức vi phân sinh bởi nhị thức dạng $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ dưới các ràng buộc đại số cụ thể đối với bậc n . Tiếp nối hướng tiếp cận đó, Định lý 3.2.13 tiếp tục tổng quát hóa các kết quả trên cho đạo hàm của lớp đa thức bậc cao dạng $(f^n Q(f))^{(k)}$ (với $Q(z)$ là đa thức bậc m) thông qua việc thiết lập điều kiện đồng nhất $f = L$ dựa trên giả thiết $z^n Q(z)$ là một đa thức duy nhất hoặc

duy nhất mạnh đối với các hàm phân hình.

4. Phương pháp và công cụ nghiên cứu

Luận án sử dụng các công cụ của giải tích phức, lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna và lý thuyết các L -hàm thuộc lớp Selberg. Về phương pháp, luận án sử dụng kỹ thuật xây dựng hàm phụ để triệt tiêu ảnh hưởng của vô hạn cực điểm trong các chứng minh đối với lớp hàm phân hình tổng quát. Đồng thời, nghiên cứu áp dụng kỹ thuật so sánh và đối chiếu cấu trúc ảnh ngược của các tập hợp hữu hạn thông qua các đa thức duy nhất mạnh dựa trên các điều kiện về bậc.

Về công cụ, luận án vận dụng Định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai của Lý thuyết Nevanlinna làm nền tảng giải tích. Các đặc trưng chuyên biệt của L -hàm thuộc lớp Selberg $\mathcal{S}$ như phương trình hàm, giả thuyết tích Euler và thác triển giải tích được khai thác để thiết lập các đánh giá đặc trưng. Quá trình nghiên cứu thực hiện dựa trên việc kết hợp các bất đẳng thức Nevanlinna với cấu trúc đại số của các đa thức duy nhất để giải quyết bài toán xác định duy nhất. Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

Chương 1

Vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm

1.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Trong chương này, chúng tôi sử dụng các ký hiệu và định nghĩa chuẩn của Lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna. Đối với đối tượng L -hàm, ta nhắc lại định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.1.14 ([60], các trang: 111-112). Một L -hàm luôn được hiểu là một L -hàm trong lớp Selberg $\mathcal{S}$. Một L -hàm trong lớp Selberg $\mathcal{S}$ được định nghĩa là một chuỗi Dirichlet hội tụ tuyệt đối trong miền $\operatorname{Re}(z) > 1$:

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \quad a(1) = 1,$$

và thoả mãn các điều kiện sau:

- (i) Giả thuyết Ramanujan: với mọi số dương ϵ , $a(n) \ll n^\epsilon$;

(ii) Thác triển giải tích: tồn tại một số nguyên không âm m sao cho $(s-1)^m L(s)$ là một hàm nguyên của bậc hữu hạn.

(iii) Phương trình hàm: tồn tại các số thực dương Q, λ_i , và tồn tại một số nguyên dương K , và tồn tại các số phức μ_i, ω với $\operatorname{Re} \mu_i \geq 0$ và $|\omega| = 1$ sao cho

$$\Lambda_L(s) = \omega \overline{\Lambda_L(1 - \bar{s})},$$

trong đó

$$\Lambda_L(s) = L(s) Q^s \prod_{i=1}^K (\lambda_i s + \mu_i).$$

(iv) Giả thuyết tích Euler:

$$L(s) = \prod_p L_p(s),$$

trong đó

$$L_p(s) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}} \right)$$

với hệ số $b(p^k)$ thoả mãn $b(p^k) \ll p^{k\theta}$ đối với $\theta \leq \frac{1}{2}$ nào đó, ở đó tích là lấy trên mọi số nguyên tố p .

1.2 Tập xác định duy nhất của L -hàm chia sẻ tập hữu hạn với hàm phân hình có hữu hạn cực điểm

Định nghĩa 1.2.1. Một đa thức $P(z)$ được gọi là **đa thức duy nhất trên $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$** nếu với bất kỳ hai hàm phân hình khác hằng bất kỳ f, g sao cho $(f, g) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$, điều kiện $P(f) = P(g)$ suy ra $f = g$.

Định nghĩa 1.2.2. Một đa thức $P(z)$ được gọi là **đa thức duy nhất mạnh trên** $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ nếu đối với hai hàm phân hình khác hằng bất kỳ (f, g) sao cho $(f, g) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$, điều kiện $P(f) = cP(g)$, $c \neq 0$, suy ra $f = g$.

Cho $P(z)$ là một đa thức của $\mathbb{C}[z]$ có bậc q có dạng:

$$P(z) = a(z - a_1) \cdots (z - a_q), \quad a \neq 0,$$

với đạo hàm của $P(z)$ có k không điểm phân biệt $d_1, d_2, \dots, d_k$ với bội tương ứng $m_1, m_2, \dots, m_k$ và khi đó:

$$P'(z) = aq(z - d_1)^{m_1}(z - d_2)^{m_2} \cdots (z - d_k)^{m_k}. \quad (1.3)$$

Số k được gọi là chỉ số đạo hàm của $P(z)$.

Giả sử rằng:

$$P'(d_i) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1.4)$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{k-1} \geq m_k \geq 1, \quad k \geq 2. \quad (1.5)$$

Chú ý rằng, điều kiện (1.4) suy ra $P(z)$ chỉ có nghiệm đơn. Chúng ta nhớ lại điều kiện sau được xây dựng bởi Fujimoto (xem [16], Định lý 1, trang 1176):

$$P(d_i) \neq P(d_j), \quad 1 \leq i < j \leq k, \quad k \geq 2. \quad (F)$$

Định lý 1.2.3. Cho $P(z)$ được xác định như trong (1.3) với các điều kiện (1.4), (1.5), (F). Giả sử rằng một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

- 1) Nếu $k \geq 2$, $q \geq 4$ và $m_2 = 1$ hoặc $q \geq 6$ và $m_2 \geq 2$.
- 2) Nếu $k = 3$, $m_1 \geq 2$.

3) Nếu $k \geq 4$.

Khi đó $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Định lý 1.2.4. Cho f là hàm phân hình khác hằng, có hữu hạn cực điểm, L là một L -hàm, $P(z)$ được xác định như trong (1.3) với các điều kiện (1.4), (1.5), (F) và cho $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $S = \{z : P(z) = 0\}$. Giả sử $q \geq 2(m_2 + \dots + m_k) + 3$. Khi đó nếu $E_L(S) = E_f(S)$ thì $L = f$.

Từ Định lý 1.2.3 và Định lý 1.2.4 ta nhận được hệ quả sau. $n, m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Xét đa thức $P_K(z) \in \mathbb{C}[z]$ có dạng sau:

$$\begin{aligned} P_K(z) &= (n+m+1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n+m+1-i} z^{n+m+1-i} a^i \right) + 1 \\ &= Q_K(z) + 1 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Trong đó:

$$Q_K(z) = (n+m+1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n+m+1-i} z^{n+m+1-i} a^i \right)$$

Giả sử rằng:

$$\begin{aligned} Q_K(a) &= (n+m+1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n+m+1-i} \right) a^{n+m+1} \neq -1, \\ \text{nghĩa là } P_K(a) &\neq 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

và giả sử:

$$a \neq 0, \quad Q_K(a) \neq -1. \quad (1.15)$$

Khi đó $P'_K(z) = (n+m+1)z^n(z-a)^m$ và P'_K có một không điểm tại 0 bậc n và một không điểm tại a bậc m . Chú ý rằng $P_K(z)$ có không điểm đơn khi và chỉ khi điều kiện (1.15) xảy ra.

Hệ quả 1.2.5. Cho f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm, L là một L -hàm, và $P_K(z)$ được định nghĩa như trong (1.13) với các điều kiện (1.14) và (1.15), $S_K = \{z : P_K(z) = 0\}$. Khi đó:

- i) Nếu $n \geq 3, m = 1$ thì $P_K(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.
- ii) Nếu $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ và $n \geq m + 2$ thì $L = f$.

Chú ý 1.2.6. i) Hệ quả 1.2.5, phần ii) chính là Định lý 2 của H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương [34]. Vậy Định lý 1.2.4 là một mở rộng của Định lý 2 [34].

ii) Định lý 5 của Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi [70] đưa ra một lớp các tập duy nhất của L -hàm chia sẻ tập hợp với 7 phần tử với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm. Hệ quả 1.2.5, phần ii) đưa ra một lớp các tập duy nhất của L -hàm chia sẻ tập hợp với 5 phần tử với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm.. Vậy Định lý 1.2.4 là một cải tiến của Định lý 5 [70].

1.3 Sự phụ thuộc tuyến tính đôi với L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm chia sẻ các tập hữu hạn

Xét các đa thức $P(z)$, và $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ bậc n có dạng sau:

$$P(z) = az^n + bz^{n-m} + c, \quad \text{với } a, b, c \neq 0, \quad (1.16)$$

$$Q(z) = uz^n + vz^{n-m} + t, \quad \text{với } u, v, t \neq 0. \quad (1.17)$$

Giả sử:

$$\frac{a^{n-m}c^m}{b^n} \neq \frac{(-1)^n(n-m)^{n-m}m^m}{n^n}, \quad (1.18)$$

$$\frac{u^{n-m}t^m}{v^n} \neq \frac{(-1)^n(n-m)^{n-m}m^m}{n^n}. \quad (1.19)$$

Chú ý rằng, đa thức $P(z)$ (tương ứng $Q(z)$) có n không điểm đơn phân biệt nếu và chỉ nếu điều kiện (1.18) (tương ứng (1.19)) được thoả mãn (xem [39], Bổ đề 2.7, trang 151).

Định lý 1.3.1. *Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $n \geq 2m+3$, $P(z), Q(z)$ là các đa thức dạng (1.16) và (1.17) với điều kiện (1.18) và (1.19) và cho S, T lần lượt là các tập không điểm của $P(z), Q(z)$. Giả sử f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và L là một L -hàm. Khi đó ta có:*

1) $E_L(S) = E_f(T)$ nếu và chỉ nếu $f = hL$ và $hS = T$, với h là hằng số khác không thoả mãn $h^n = \frac{at}{cu}$ và $h^m = \frac{av}{ub}$.

2) $E_{L_1}(S) = E_{L_2}(T)$ nếu và chỉ nếu $L_1 = L_2$, $\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{t}$ và $S = T$, trong đó L_1, L_2 là các L -hàm.

Định lý 1.3.2. *Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $\gcd(n, m) = 1$ và $n \geq 2m+3$, cho $P(z)$ là đa thức của dạng (1.16) với điều kiện (1.18), và cho S là tập hợp các không điểm của $P(z)$. Giả sử L là một L -hàm và f là một hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm thoả mãn $E_L(S) = E_f(S)$. Khi đó $f = L$.*

Chương 2

Vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình

2.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Định nghĩa 2.1.1. Cho f là một hàm phân hình khác hằng và k, d là các số nguyên dương. Ta ký hiệu $\overline{N}_{(k)}(r, f)$, $\overline{N}_k(r, f)$ lần lượt là hàm đếm các cực điểm có bội $\geq k$ và bội $\leq k$ của f , ở đó mỗi cực điểm được tính chỉ một lần. Ta ký hiệu $\overline{N}_{(k)}\left(r, \frac{1}{f}\right)$, $\overline{N}_k\left(r, \frac{1}{f}\right)$ lần lượt là hàm đếm các không điểm có bội $\geq k$ và bội $\leq k$ của f , ở đó mỗi không điểm được tính chỉ một lần.

Bổ đề 2.1.4. Cho f hàm phân hình khác hằng. Khi đó

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{2}\overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

2.2 Phân bố giá trị và tập xác định duy nhất đối với L -hàm chia sẻ tập hữu hạn với hàm phân hình

Định lý 2.2.1. Cho $P(z)$ là một đa thức có bậc $q \geq 4$, được xác định như trong (1.3) với các điều kiện (1.4), (1.5), (1.6) ở Chương 1. Giả sử $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ và một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

- 1) $P(d_i)P(d_j) \neq P(d_1)^2$ với mọi $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ và $m_1 \geq 2$.
- 2) $m_1 \geq m_2 + 2$.

Khi đó $P(z)$ là một đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Như một áp dụng của Định lý 2.2.1 ta nhận được Định lý 2.2.2 sau đây.

Định lý 2.2.2. Cho $P(z)$ là đa thức có bậc $q \geq 5$, được xác định như trong (1.3) với các điều kiện (1.4), (1.5) và (1.6) được thiết lập ở Chương 1. Cho $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$, và $S = \{z : P(z) = 0\}$. Khi đó S là tập xác định duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ nếu điều kiện sau được thoả mãn: $q \geq 2k + 4$ và $m_2 \geq 2$.

Hệ quả 2.2.3. Cho f là hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm, và $P_K(z)$ được định nghĩa như trong (1.13) với các điều kiện (1.14) và (1.15) ở Chương 1, $S_K = \{z : P_K(z) = 0\}$. Khi đó:

- i) $P_K(z)$ là đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ nếu

$$P_K(0) + P_K(a) \neq 0 \quad \text{và} \quad n \geq 3, m = 1, \quad \text{hoặc} \quad n \geq m + 2 \quad \text{và} \quad m \geq 2.$$

- ii) $L = f$ nếu $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ và $n + m \geq 7$, $n \geq m \geq 2$.

Chú ý 2.2.4. i) Hệ quả 2.2.3, phần i) đưa ra một lớp các đa thức duy nhất mạnh trên không gian $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ với 5 phần tử. Trong khi đó, Hệ quả 1.1 (trang 126, [31]) đưa ra một lớp các đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ (áp dụng cho các hàm phân hình) với 6 phần tử ($6 > 5$). Trong Định lý 3.4 (trang 502, [8]), A. Banerjee và A. Kundu đã giả thiết $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình, tức là họ vẫn phụ thuộc vào chuẩn đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Do đó, Định lý 2.2.1 (nền tảng của Hệ quả 2.2.3 i)) thực sự là một cải tiến và mở rộng quan trọng về mặt cấu trúc đại số so với Định lý 3.4 trong [8].

ii) Hệ quả 2.2.3, phần ii) với điều kiện ngưỡng bậc $n + m \geq 7$ là một kết quả cải tiến trực tiếp đối với Định lý 1 trong [34] của nhóm tác giả H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương (2023). Từ đó khẳng định, Định lý 2.2.2 là một sự cải tiến và mở rộng toàn diện của Định lý 1 [34].

Định lý 2.2.6. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $n \geq 2m + 6$ và $m \geq 2$, $P(z), Q(z)$ là các đa thức dạng (1.16) và (1.17) với điều kiện (1.18) và (1.19) đã đưa ra ở Chương 1 và cho S, T lần lượt là hai tập hợp các không điểm của $P(z), Q(z)$. Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trong mặt phẳng phức và L là một L -hàm. Khi đó ta có:

1) $E_L(S) = E_f(T)$ nếu và chỉ nếu $f = hL$ và $hS = T$, với h là hằng số khác không thỏa mãn $h^n = \frac{at}{cu}$ và $h^m = \frac{av}{ub}$.

2) $E_{L_1}(S) = E_{L_2}(T)$ nếu và chỉ nếu $L_1 = L_2$, $\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{t}$ và $S = T$, trong đó L_1, L_2 là các L -hàm.

Định lý 2.2.7. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $\gcd(n, m) = 1$ và $n \geq 2m + 3, m \geq 2$, cho $P(z)$ là đa thức của dạng (1.16) với điều kiện (1.18) ở Chương 1 và cho S là tập hợp các không điểm của $P(z)$. Giả sử rằng $E_L(S) = E_f(S)$ cho một L -hàm L và một hàm phân hình khác hằng f . Khi đó ta có $f = L$.

Chú ý 2.2.8. Định lý 2.2.7 cho ta một tập xác định duy nhất với 10 phần tử đối với L -hàm và hàm phân hình khác hằng khi chúng chia sẻ một tập hợp kiểu Yi. Tập xác định duy nhất như vậy khác với Tập xác định duy nhất trong Định lý 1 [34].

2.3 Phân bố giá trị và tập xác định duy nhất đối với hàm phân hình chia sẻ tập hữu hạn

Ta định nghĩa các giá trị khuyết Nevanlinna như sau:

$$\Theta(\infty, (f_1, \dots, f_N)) = 1 - \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^N \overline{N}(r, f_i)}{\sum_{i=1}^N T(r, f_i)},$$

$$\Theta(a, (f_1, \dots, f_N)) = 1 - \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^N \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_i - a}\right)}{\sum_{i=1}^N T(r, f_i)}.$$

Chú ý rằng, $0 \leq \Theta(\infty, (f_1, \dots, f_N)) + \Theta(a, (f_1, \dots, f_N)) \leq 2$.

Định lý 2.3.1. Cho $S = \{a_1, a_2, \dots, a_q\} \subset \mathbb{C}$, đa thức $P(z)$ được xác định như trong phương trình (1.3) với các điều kiện (1.4) và (1.6) ở Chương 1. Giả sử $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình. Nếu $k \geq 3$, hoặc $k = 2$ và $\min\{m_1, m_2\} \geq 2$ thì đối với hai hàm phân hình khác hằng f, g , điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$, $q > 2k + 6 - 4(\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)))$ suy ra $f = g$.

Hệ quả 2.3.2. Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng và P_K là đa thức được xác định trong Hệ quả 2.2.3 với S_K là tập các không điểm của P_K . Giả sử $E_f(S_K) = E_g(S_K)$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

- i) $q \geq 6$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > 1$, hoặc
- ii) $q \geq 7$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > \frac{3}{4}$, hoặc
- iii) $q \geq 8$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > \frac{1}{2}$, hoặc
- iv) $q \geq 9$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > \frac{1}{4}$, hoặc
- v) $q \geq 10$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > 0$.

Khi đó $f = g$.

Hệ quả 2.3.3. Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng với bội của cực điểm và bội của không điểm lần lượt ít nhất là s, l , và P_K là đa thức được xác định trong Hệ quả 2.2.3 với S_K là tập các không điểm của P_K . Giả sử $E_f(S_K) = E_g(S_K)$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

- i) $q \geq 6$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{l} < 1$, hoặc
- ii) $q \geq 7$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{l} < \frac{5}{4}$, hoặc
- iii) $q \geq 8$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{l} < \frac{3}{2}$, hoặc
- iv) $q \geq 9$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{l} < \frac{7}{4}$, hoặc
- v) $q \geq 10$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{l} < 2$.

Khi đó $f = g$.

Chương 3

Vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình với điều kiện đa thức vi phân

3.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Bổ đề 3.1.5. Cho f là một hàm phân hình khác hằng và n, m là hai số nguyên dương, $n > m$ và a là cực điểm của f . Khi đó

$$(f^n)^{(m)} = \frac{\varphi_m}{(z-a)^{np+m}}, \quad \text{trong đó } p = \nu_f^\infty(a), \quad \varphi_m(a) \neq 0.$$

Bổ đề 3.1.6. Cho f là một hàm phân hình khác hằng và n, m là hai số nguyên dương, $n > m$ và a, b lần lượt là cực điểm và không điểm của f . Khi đó i) $\frac{(f^n)^{(m)}}{f^n} = \frac{h_m}{(z-a)^m}$, ở đó $p = \nu_f^\infty(a)$, $h_m(a) \neq 0$;
ii) $\frac{(f^n)^{(m)}}{f^n} = \frac{S_m}{(z-b)^m}$, ở đó $l = \nu_f^0(b)$, $S_m(b) \neq 0$.

Bổ đề 3.1.7. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, n, m, k là các số nguyên, $m \geq 0$, $n > k + 1$, và $P(z)$ là một đa thức bậc m . Khi đó

$$(n - k - 1)T(r, f) \leq T\left(r, (f^n P(f))^{(k)}\right) + S(r, f) \\ \leq (n + m)(k + 1)T(r, f) + S(r, f).$$

Nói riêng, $(f^n P(f))^{(k)}$ là khác hằng và $S\left(r, (f^n P(f))^{(k)}\right) = S(r, f)$.

Bổ đề 3.1.8. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, n, m, k, d là các số nguyên, $m \geq 0$, $k > 0$, $n > k + 1 + \frac{2k+m+2}{d}$ và $P(z)$ là một đa thức bậc m , $S = \{a \in \mathbb{C} : a^d = 1\}$. Khi đó

$$(d(n-k-1)-2k-m-2)T(r, f) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{((f^n P(f))^{(k)})^d - 1}\right) + S(r, f).$$

Nói riêng, $\left((f^n P(f))^{(k)}\right)^{-1}(S) \neq \emptyset$.

3.2 Phân bố giá trị và tập xác định duy nhất đối với đa thức vi phân của L -hàm và hàm phân hình chia sẻ tập hợp các nghiệm của đơn vị

Định lý 3.2.1. Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng và n, m là các số nguyên dương, $P(z)$ là một đa thức có đạo hàm với chỉ số k thỏa mãn các điều kiện Fujimoto (F). Giả sử $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình. Nếu $k \geq 3$, hoặc $k = 2$ và $\min\{m_1, m_2\} \geq 2$ thì ta có:

1) Nếu $E_{(f^n)_{(m)}}(S) = E_{(g^n)_{(m)}}(S)$, $n \geq m+2$, và $q > 2k+6 - \frac{8(n-1)}{n+m}$ thì $f = cg$ với $c^n = 1$.

2) Nếu $E_{f^{(m)}}(S) = E_{g^{(m)}}(S)$, và $q > 2k+6 - \frac{4m}{m+1}$ thì $f^{(m)} = g^{(m)}$.

Hệ quả 3.2.2. Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng và $P_K(z)$ là đa thức được xác định như trên với S_K lần lượt là tập các không điểm của P_K . Nếu

$$k = 2, \quad \Theta(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) = 0, \quad \Theta(0, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) = 0,$$

thì S_K là tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình với 11 là số phần tử ít nhất của chúng.

Hệ quả 3.2.3. Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, n, m là các số nguyên dương, và $P_K(z)$ là đa thức như trên với S_K là tập các không điểm của P_K . Giả sử $E_{(f^n)^{(m)}}(S_K) = E_{(g^n)^{(m)}}(S_K)$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $q \geq 6$ và $n \geq m + 3$, hoặc

ii) $q \geq 7$ và $n \geq m + 2$.

Khi đó $f = cg$ với $c^n = 1$.

Hệ quả 3.2.4. Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, n, m là các số nguyên dương, và $P_K(z)$ là đa thức được xác định như trên với S_K là tập các không điểm của P_K . Giả sử $E_{f^{(m)}}(S_K) = E_{g^{(m)}}(S_K)$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $q \geq 7$ và $m > 3$.

ii) $q \geq 8$ và $m > 1$.

iii) $q \geq 9$.

Khi đó $f^{(m)} = g^{(m)}$.

Bổ đề 3.2.5. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm, n, m, k là các số nguyên, $m \geq 0$, $k > 0$, và P, Q là các đa thức của bậc m . Giả sử $(f^n P(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$ chia sẻ 1 CM, và $n > 3k + m + 3$. Khi đó, ta có một trong các trường hợp sau:

$$(1) \quad (i) \quad (n-k-2)T(r, L) + S(r, L) \leq (m+2k+4)T(r, f) + S(r, f),$$

$$(ii) \quad (n-k-4)T(r, f) + S(r, f) \leq (m+k+2)T(r, L) + S(r, L),$$

$$(iii) \quad S(r, f) = o(T(r, L)), \quad S(r, L) = o(T(r, f)).$$

$$(2) \quad (L^n Q(L))^{(k)} (f^n P(f))^{(k)} = 1.$$

$$(3) \quad (L^n Q(L))^{(k)} = (f^n P(f))^{(k)}.$$

Bổ đề 3.2.6. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm, n, m, k, d là các số nguyên, $m \geq 0, k > 0$, $P(z)$ và $Q(z)$ là đa thức của bậc m , và cho $S = \{a \in \mathbb{C} : a^d = 1\}, d \geq 2$. Giả sử $(f^n P(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$ chia sẻ S CM và

$$n > k + 1 + \frac{2k + m + 2}{d}.$$

Khi đó, ta có một trong ba trường hợp sau:

$$(1) \quad (i) \quad d(n-k-1)T(r, L) + S(r, L) \leq 2(m+2k+2)T(r, f) + S(r, f),$$

$$(ii) \quad (d(n-k-1)-2)T(r, f) + S(r, f) \leq 2(m+k+1)T(r, L) + S(r, L),$$

$$(iii) \quad S(r, f) = o(T(r, L)), \quad S(r, L) = o(T(r, f)).$$

$$(2) \quad (L^n Q(L))^{(k)} (f^n P(f))^{(k)} = h, h^d = 1.$$

$$(3) \quad (L^n Q(L))^{(k)} = h(f^n P(f))^{(k)}, h^d = 1.$$

Bổ đề 3.2.7. Cho n, m, k là các số nguyên, $m \geq 0, n > m+2, k > 0$, $P(z)$ và $Q(z)$ là các đa thức bậc m . Nếu đối với một hàm phân hình khác hằng f và một L -hàm L , $(L^n Q(L))^{(k)} = h(f^n P(f))^{(k)}$, ở đó $h^d = 1$, thì $L^n Q(L) = h f^n P(f)$.

Bổ đề 3.2.8. Cho a, b, c, u là các hằng số phức khác không, n và m là các số nguyên dương, $n \geq m + 3$. Đặt

$$R(z) = az^n + bz^{n-m}, \quad T(z) = uz^n + vz^{n-m}.$$

i) Nếu $R(L) = T(f)$ đối với $L \in S$ và $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ thì $f = hL$, ở đó h là hằng, thỏa mãn $h^n = \frac{a}{u}, h^{n-m} = \frac{b}{v}$.

ii) Nếu $\gcd(n, m) = 1, c = a, u = b$, và $R(L) = T(f)$ đối với $L \in S$ và $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ thì $f = L$.

iii) Nếu $R(L_1) = T(L_2)$ đối với $L_j \in S (j = 1, 2)$ thì $L_1 = L_2$ và $a = u, b = v$.

Định lý 3.2.9. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương, và cho S là tập các nghiệm của đơn vị của bậc d . Giả sử rằng $(f^n)^{(k)}$ và $(L^n)^{(k)}$ chia sẻ S CM. Khi đó $f = tL$, ở đó $t^{nd} = 1$, nếu một trong hai điều kiện sau thỏa mãn:

1) $d = 1$ và $n > 3k + 6$;

2) $d \geq 2$, và $n > k + 1 + \frac{4k+4}{d}$.

Hệ quả 3.2.10. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương. Giả sử rằng $(f^n)^{(k)}$ và $(L^n)^{(k)}$ chia sẻ 1 CM. Khi đó $f = tL$, ở đó $t^n = 1$, nếu $d = 1$ và $n > 3k + 6$.

Định lý 3.2.11. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, m, k là các số nguyên dương, $k \geq 2, a, b, c, u \in \mathbb{C}, a, b, c, u \neq 0$, và S là tập các nghiệm bậc d của đơn vị. Từ giả thiết

hai hàm $(L^n(cL^m + u))^{(k)}$ và $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ chia sẻ tập S CM, ta nhận được $f = tL$ đối với một hằng t sao cho $t^{(n+m)d} = \frac{c^d}{a^d}$ và $t^{nd} = \frac{u^d}{b^d}$, nếu một trong hai điều kiện sau thỏa mãn:

$$1) \ d = 1, n > 3k + m + 6;$$

$$2) \ d \geq 2, n > \max \left\{ k + 1 + \frac{4k + 2m + 4}{d}, m + 2 \right\}.$$

Trong trường hợp riêng, nếu $a = c$, $b = u$, $\gcd(n, m) = 1$ và $d = 1$ thì $f = L$.

Hệ quả 3.2.12. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương, $n > 3k + 9, k \geq 2$. Nếu $(f^n(f - 1))^{(k)}$ và $(L^n(L - 1))^{(k)}$ chia sẻ 1 CM thì $f = L$.

Định lý 3.2.13. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, m, k là các số nguyên dương, $k \geq 2, S$ là tập nghiệm bậc d của đơn vị, và cho $Q(z)$ là một đa thức của bậc m . Giả sử rằng $(f^n Q(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$ chia sẻ S CM. Khi đó $f = L$ nếu một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:

$$1) \ d = 1, n > 3k + m + 6 \text{ và } z^n Q(z) \text{ là một đa thức duy nhất cho các hàm phân hình};$$

$$2) \ d \geq 2, n > \max \left\{ k + 1 + \frac{4k + 2m + 4}{d}, m + 2 \right\}, \text{ và } z^n Q(z) \text{ là một đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình}.$$

Kết luận chung

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu bài toán xác định duy nhất cho các L -hàm thuộc lớp Selberg $\mathcal{S}$ và các hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ thông qua việc chia sẻ các tập hợp hữu hạn và đa thức vi phân. **Các kết quả chính của luận án bao gồm:**

1. Nghiên cứu vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm thông qua việc thiết lập điều kiện đủ để một đa thức là đa thức duy nhất (**Định lý 1.2.3**). Từ đó, xây dựng thành công lớp các tập xác định duy nhất hữu hạn S chỉ với 5 phần tử cho cặp hàm (L, f) (**Định lý 1.2.4, Hệ quả 1.2.5 và Định lý 1.3.2**).

2. Mở rộng bài toán duy nhất cho trường hợp tổng quát và tối ưu hóa lực lượng tập duy nhất dựa trên các đặc tính giải tích. Cụ thể, đã thiết lập các định lý duy nhất khi chia sẻ một hoặc hai tập hữu hạn (**Định lý 2.2.1 và Định lý 2.2.6**) và chứng minh rằng lực lượng của tập xác định duy nhất hữu hạn S có thể được thu gọn đáng kể khi hàm phân hình có các giá trị khuyết Nevanlinna (**Định lý 2.3.1, Hệ quả 2.3.2 và Hệ quả 2.3.3**).

3. Giải quyết bài toán duy nhất đối với các toán tử vi phân bậc

cao. Luận án đã xác lập tính duy nhất cho đạo hàm cấp cao (**Định lý 3.2.1** và **Định lý 3.2.9**) cùng các cấu trúc đa thức vi phân phức tạp dạng $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ và $(f^nQ(f))^{(k)}$ (**Định lý 3.2.11** và **Định lý 3.2.13**) khi chúng chia sẻ tập các nghiệm của đơn vị với L -hàm. **Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo:**

1. Nghiên cứu một số dạng định lý duy nhất mới cho L -hàm và hàm phân hình.
2. Tiếp tục nghiên cứu vấn đề duy nhất cho L -hàm và đường cong chỉnh hình.

Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án

1. [3] An V. H., Lai N. X., Phuong N. D. (2021), Uniqueness of Meromorphic Functions with Deficient values and unique range sets of small cardinalities, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, 52, pp. 13–28.
2. [34] Khoai H. H., An V. H., Phuong N. D. (2023), On value distribution of L -functions sharing finite sets with meromorphic functions, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, Vol. 66(114), No. 3, pp. 265–280.
3. [4] An V. H., Khoai H. H., Phuong N. D. (2024), On value sharing of certain differential polynomials of meromorphic functions and L -functions, *The Journal of Analysis*, Vol. 32, pp. 2485–2502.
4. [5] An V. H., Phuong N. D. (2025), The linear dependency of L -functions and meromorphic functions sharing finite sets, *J. Math. Math. Sci.*, pp. 57–72.