

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN DUY PHƯƠNG

VỀ ĐA THỨC XÁC ĐỊNH DUY NHẤT VÀ TẬP XÁC ĐỊNH
DUY NHẤT ĐỐI VỚI L -HÀM VÀ HÀM PHÂN HÌNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2026

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN DUY PHƯƠNG

VỀ ĐA THỨC XÁC ĐỊNH DUY NHẤT VÀ TẬP XÁC ĐỊNH
DUY NHẤT ĐỐI VỚI L -HÀM VÀ HÀM PHÂN HÌNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9.46.01.02

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

1. TS. VŨ HOÀI AN

2. TS. LÊ QUANG NINH

THÁI NGUYÊN – 2026

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của TS. Vũ Hoài An và TS. Lê Quang Ninh. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học của ai khác.

Thái Nguyên, tháng ... năm 2026

Tác giả

Nguyễn Duy Phương

Lời cảm ơn

Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học tận tình của TS. Vũ Hoài An và TS. Lê Quang Ninh. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến hai thầy, những người đã luôn dành thời gian chỉ bảo, định hướng chuyên môn và động viên tác giả trong suốt quá trình nghiên cứu.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám đốc, Ban Đào tạo và Quản lý người học Đại học Thái Nguyên; Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Ban Lãnh đạo Khoa Toán cùng toàn thể các thầy cô giáo, đặc biệt là các thầy cô trong Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tác giả trong suốt khóa học.

Xin chân thành cảm ơn các thầy cô và các bạn đồng nghiệp trong nhóm Seminar của Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng đã luôn tham gia trao đổi, đóng góp ý kiến và giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu hoàn thành luận án.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám đốc Trung tâm Giáo dục quốc phòng và an ninh Đại học Thái Nguyên cùng các đồng nghiệp đã luôn quan tâm, chia sẻ và tạo điều kiện tốt nhất về công việc để tác giả yên tâm học tập.

Xin trân trọng cảm ơn các nhà khoa học trong Hội đồng bảo vệ luận án cấp cơ sở đã dành thời gian đọc, nhận xét và đưa ra những ý kiến đóng góp quý báu giúp luận án được hoàn thiện và chín chu hơn.

Cuối cùng, tác giả xin gửi lời tri ân tới gia đình, người thân và bạn bè - những người đã luôn đồng hành, chia sẻ khó khăn và là chỗ dựa tinh thần vững chắc để tác giả có thể đạt được kết quả ngày hôm nay.

Thái Nguyên, tháng ... năm 2026

Tác giả

Nguyễn Duy Phương

Mục lục

Danh mục các quy ước và kí hiệu	1
Mở đầu	3
1 Vấn đề duy nhất cho L-hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm	17
1.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ	17
1.2 Tập xác định duy nhất của L -hàm chia sẻ tập hữu hạn với hàm phân hình có hữu hạn cực điểm	28
1.3 Sự phụ thuộc tuyến tính đối với L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm chia sẻ các tập hữu hạn	39
Kết luận Chương 1	50
2 Vấn đề duy nhất cho L-hàm và hàm phân hình	51
2.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ	51
2.2 Phân bố giá trị và tập xác định duy nhất đối với L -hàm chia sẻ tập hữu hạn với hàm phân hình	53
2.3 Phân bố giá trị và tập xác định duy nhất đối với hàm phân hình chia sẻ tập hữu hạn	70
Kết luận Chương 2	77
3 Vấn đề duy nhất cho L-hàm và hàm phân hình với điều kiện đa thức vi phân	78
3.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ	78
3.2 Phân bố giá trị và tập xác định duy nhất đối với đa thức vi phân của L -hàm và hàm phân hình chia sẻ tập hợp các nghiệm của đơn vị	83

Kết luận Chương 3	107
Kết luận chung	108
Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án	109
Tài liệu tham khảo	110

DANH MỤC CÁC QUY ƯỚC VÀ KÍ HIỆU

Trong toàn bộ luận án, chúng tôi thống nhất sử dụng các kí hiệu sau:

- $\mathbb{C}$: mặt phẳng phức (1-chiều).
- $\mathcal{M}(\mathbb{C})$: không gian các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{S}$: lớp Selberg (lớp các L -hàm).
- $T(r, f)$: hàm đặc trưng Nevanlinna của hàm f .
- $m(r, f)$: hàm xấp xỉ của hàm f .
- $N(r, f)$: hàm đếm (có tính bội) các cực điểm của hàm f .
- $\overline{N}(r, f)$: hàm đếm rút gọn (không tính bội) các cực điểm của hàm f .
- $S(r, f)$: đại lượng sai số trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna.
- $\Theta(a, f)$: chỉ số rẽ nhánh (độ khiếm khuyết rút gọn) của giá trị a đối với hàm f .
- $E_f(S)$: tập các nghiệm của phương trình $f(z) \in S$ (có tính bội).
- $\overline{E}_f(S)$: tập các nghiệm của phương trình $f(z) \in S$ (không tính bội).
- CM (Counting Multiplicities): kể cả bội (có tính bội).
- IM (Ignoring Multiplicities): không tính bội (bỏ qua bội).

- Chia sẻ 1 CM (hoặc IM): hai hàm chia sẻ giá trị 1 kể cả bội (hoặc không tính bội).
- Chia sẻ S CM (hoặc IM): hai hàm chia sẻ tập S kể cả bội (hoặc không tính bội).
- $O(1)$: đại lượng bị chặn khi $r \rightarrow +\infty$.
- $O(r)$: đại lượng vô cùng lớn cùng bậc với r khi $r \rightarrow +\infty$.

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Vào những năm 20 của thế kỷ XX, kế thừa tư tưởng về sự tồn tại nghiệm của Định lý cơ bản của Đại số đối với các đa thức trên trường số phức, nhà toán học Phần Lan R. Nevanlinna đã xây dựng nên một trong những lý thuyết sâu sắc và có ảnh hưởng rộng lớn của Giải tích phức, đó là Lý thuyết phân bố giá trị của các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, ngày nay được biết đến rộng rãi với tên gọi Lý thuyết Nevanlinna. Lý thuyết phân bố giá trị đánh dấu một bước phát triển mang tính đột phá trong giải tích phức khi chuyển hướng từ việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của đa thức sang khảo sát sự phân bố giá trị của các hàm phân hình. Hạt nhân của lý thuyết này nằm ở hai định lý cơ bản. Cụ thể, Định lý cơ bản thứ nhất đóng vai trò kế thừa và mở rộng sâu sắc Định lý cơ bản của Đại số nhằm mô tả sự phân bố đều giá trị của hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Tiếp nối nền tảng đó, Định lý cơ bản thứ hai mô tả ảnh hưởng của đạo hàm đối với quá trình phân bố giá trị này. Trong quá trình phát triển, Lý thuyết Nevanlinna đã thu hút sự quan tâm và đóng góp của nhiều nhà toán học như H. Cartan [10] đã mở rộng lý thuyết cho tổ hợp tuyến tính và các đường cong chỉnh hình trên không gian xạ ảnh, tạo nền tảng hình học cho các nghiên cứu của H. Weyl [62], L. Ahlfors [1] và P. Griffiths [9, 19], ... và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của Toán học. Đóng góp đầu tiên của toán học Việt Nam cho lĩnh vực này phải kể đến công trình của L. V. Thiêm [37] về bài toán ngược của lý thuyết phân bố giá trị, ông đã chứng minh sự tồn tại của hàm phân hình với các chỉ số rẽ nhánh cho

trước thông qua lý thuyết mặt Riemann.

Một trong những ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna là bài toán xác định duy nhất đối với hàm phân hình, nhằm tìm kiếm các điều kiện để hai hàm phân hình đồng nhất hoặc có liên hệ tuyến tính. Kết quả khởi đầu cho lý thuyết này là Định lý 5 điểm của R. Nevanlinna (1926), khẳng định một hàm phân hình được xác định duy nhất thông qua ảnh ngược của năm giá trị phân biệt.

Để thiết lập công cụ khảo sát bài toán xác định duy nhất, các nhà toán học đã xây dựng một bộ khung ký hiệu chuẩn hóa nhằm mô tả sự trùng khớp ảnh ngược của hai hàm phân hình. Cụ thể, các công cụ này được thiết lập như sau:

Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ký hiệu $E_f(a)$ (tương ứng $\overline{E}_f(a)$) là tập các a -điểm của f trong đó mỗi a -điểm được tính với bội của nó (tương ứng là tập các a -điểm phân biệt của f). Ta ký hiệu

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} E_f(a); \quad \overline{E}_f(S) = \bigcup_{a \in S} \overline{E}_f(a).$$

Hai hàm phân hình f, g được gọi là chia sẻ giá trị a kể cả bội (không kể bội) nếu $E_f(a) = E_g(a)$ (tương ứng $\overline{E}_f(a) = \overline{E}_g(a)$). Hai hàm phân hình f, g được gọi là chia sẻ tập S kể cả bội (không kể bội) nếu $E_f(S) = E_g(S)$ (tương ứng $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$).

Từ kết quả của Nevanlinna, bài toán được phát triển theo hướng chia sẻ tập hợp. F. Gross [20] nghiên cứu cấu trúc ảnh ngược của các tập hợp và đề xuất khái niệm tập xác định duy nhất. Các kết quả theo hướng nghiên cứu này được C.-C. Yang và H.-X. Yi [67] hệ thống hóa thành các tiêu chuẩn đồng nhất cơ bản cho hàm phân hình thông qua bài toán xác định duy nhất đối với tập xác định duy nhất và tập song xác định duy nhất. Nhằm giảm thiểu số lượng phần tử của các tập chia sẻ, I. Lahiri [35] đưa ra phương pháp chia sẻ trọng số, sau đó được A. Banerjee [6] và nhiều tác giả tiếp tục phát triển.

Đồng thời, bài toán xác định duy nhất cũng được mở rộng cho các không gian và đối tượng cấu trúc khác. Trên trường số p -adic, nền tảng

của lý thuyết Nevanlinna được thiết lập bởi H. H. Khoái [27], từ đó bài toán chia sẻ giá trị được ông và A. Escassut [12] phát triển. Đối với không gian nhiều biến, lý thuyết được H. Fujimoto [16] và M. Ru [56] mở rộng cho các đường cong chỉnh hình và ánh xạ phân hình.

Đóng góp vào sự phát triển chung của bài toán xác định duy nhất, các nhà toán học Việt Nam đã đạt được nhiều kết quả đối với các lớp đối tượng khác nhau. Tiêu biểu có thể kể đến các nghiên cứu của Đ. Đ. Thái - S. Đ. Quang [61] đối với ánh xạ phân hình nhiều biến với điều kiện bội bị chặn, T. T. Tấn [11] về bài toán chia sẻ mục tiêu di động, T. T. H. An [2] về sự xác định duy nhất của các đa thức vi phân chia sẻ hàm nhỏ, H. T. Phương [54] đối với lý thuyết Nevanlinna và bài toán xác định duy nhất cho các đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên chia sẻ các siêu mặt. Những nghiên cứu này cùng với các công trình của các tác giả khác đã đóng góp vào sự phát triển của lý thuyết trong nước.

Năm 1926, R. Nevanlinna (xem [51]) đã chứng minh nếu hai hàm phân hình chia sẻ năm giá trị phân biệt không kể bội thì đồng nhất bằng nhau. Kết quả này cho thấy hai hàm phân hình được xác định duy nhất thông qua ảnh ngược không kể bội của năm điểm phân biệt. Kể từ đó, hướng nghiên cứu này đã thu hút được nhiều tác giả trong và ngoài nước, tiêu biểu như các nghiên cứu của G. Gundersen [22, 23] về tính bội của các giá trị chia sẻ, hay E. Mues [50, 49] mở rộng bài toán sang việc chia sẻ giá trị liên quan đến đạo hàm, ...

Năm 1977, F. Gross [21] đã phát triển vấn đề duy nhất theo hướng mới. Thay vì xét ảnh ngược của các điểm riêng rẽ, ông đề xuất ý tưởng xem xét ảnh ngược của một tập hợp điểm S thuộc $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ông đặt ra hai vấn đề nghiên cứu cho hàm phân hình:

(i) *Tìm các tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình, tức là tìm các tập $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho hai hàm phân hình chia sẻ tập S kể cả bội hoặc không kể bội thì đồng nhất bằng nhau;*

(ii) *Tìm các tập song xác định duy nhất cho các hàm phân hình, tức là tìm các cặp tập hợp $S_1, S_2 \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho hai hàm phân hình chia sẻ tập S_1 và S_2 kể cả bội hoặc không kể bội thì đồng nhất bằng nhau.*

H.-X. Yi (xem [69, 67]) là người đầu tiên đưa ra câu trả lời cho Vấn đề Gross. Từ đó, theo hướng nghiên cứu này, các kết quả đạt được là rất phong phú và sâu sắc (xem [16, 17, 38, 14, 28, 31, 30, 6, 41, 57, 2, 55, 59, 66]).

Có thể chia các công trình nghiên cứu này thành hai chủ đề cơ bản:

1. Tìm các tập xác định duy nhất, song xác định duy nhất cho hàm phân hình hay các lớp hàm đặc biệt của hàm phân hình với số phần tử ít nhất có thể với các điều kiện các hàm hay các đa thức vi phân của các hàm chia sẻ một hay nhiều phần tử, tập hợp;

2. Thiết lập đặc trưng của tập duy nhất, song xác định duy nhất.

Song song với các chủ đề trên, việc mở rộng bài toán sang lớp các L -hàm đang trở thành hướng nghiên cứu chuyên sâu. J. Steuding [60] đã thiết lập nền tảng lý thuyết phân bố giá trị cho lớp Selberg mở rộng, tạo tiền đề cho các định lý xác định duy nhất của B. Q. Li [45, 46]. Việc vận dụng các kỹ thuật về đa thức vi phân, ánh xạ nhiều biến và điều kiện chia sẻ tập hợp – những lĩnh vực mà các nhà toán học Việt Nam đã đóng góp quan trọng nêu trên – vào đối tượng L -hàm đang mang lại nhiều kết quả khả quan. Các kỹ thuật này đóng vai trò là công cụ then chốt, cho phép mở rộng các định lý xác định duy nhất sang điều kiện chia sẻ tập hợp và mục tiêu di động, khẳng định giá trị công cụ của phương pháp giải tích phức trong việc khám phá cấu trúc L -hàm, đồng thời thiết lập cơ sở lý thuyết vững chắc cho các kết quả nghiên cứu trong luận án này.

Trong luận án này chúng tôi sẽ tập trung nghiên cứu theo chủ đề thứ nhất cho các hàm phân hình hay L -hàm. Theo hướng nghiên cứu của chủ đề này, đối với mục tiêu tìm các tập xác định duy nhất, năm 2018, Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi [70] đã chỉ ra một dạng tập xác định duy nhất kể cả bội cho một L -hàm và một hàm phân hình. Các tác giả đã chứng minh:

Định lý 1. *Cho f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm và L là một L -hàm khác hằng. Đặt $Y_{n,m}(z) = z^n + az^m + b$, với $a, b \neq 0$, trong đó m, n là các số nguyên dương, $n > 2m + 4$, $\gcd(n, m) = 1$ và $S_Y = \{z : Y_{n,m}(z) = 0\}$. Khi đó nếu $E_f(S_Y) = E_L(S_Y)$ thì $f = L$.*

Định lý 1 cho ta một dạng tập xác định duy nhất cho một L -hàm khác hằng và một hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm S gồm 7 phần tử (khi ta chọn $m = 1, n = 7$). Đa thức $Y_{n,m}(z)$ trong Định lý 1 được gọi là đa thức kiểu Yi.

Năm 2023, H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương [34] đã thiết kế một dạng đa thức mới $P_K(z)$ khác với đa thức kiểu $Y_{n,m}(z)$ và đưa ra một lớp các tập xác định duy nhất đối với một L -hàm và một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm gồm 5 phần tử. Cụ thể, các tác giả đã xét $P_K(z) \in \mathbb{C}[z]$ dạng:

$$\begin{aligned} P_K(z) &= (n + m + 1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n + m + 1 - i} z^{n+m+1-i} a^i \right) + 1 \\ &= Q_K(z) + 1, \end{aligned}$$

với điều kiện $a \neq 0$, $Q_K(a) \neq -1$ và $P_K(a) \neq 0$. Ký hiệu

$$S_K = \{z : P_K(z) = 0\}. \quad (1)$$

Các tác giả đã chứng minh kết quả sau:

Định lý 2 ([34]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm, L là một L -hàm khác hằng và S_K được xác định trong (1). Khi đó $L = f$ nếu $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ và $n \geq m + 2$.*

Định lý 3 ([34]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng và S_K được xác định trong (1). Khi đó $L = f$ nếu $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ và $n \geq 2$, $m \geq 2$, $n + m \geq 8$.*

Định lý 2 cho thấy sự tồn tại của tập xác định duy nhất cho một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm và một L -hàm gồm 5 phần tử (khi chọn $m = 1, n = 3$), giảm xuống từ 7 phần tử so với Định lý 1. Đồng thời, định lý này cũng nói lỏng điều kiện về bậc ($n \geq m + 2$) và loại bỏ hoàn toàn giả thiết $\gcd(n, m) = 1$. Định lý 3 cho thấy sự tồn tại của tập xác định duy nhất cho một hàm phân hình tổng quát và một L -hàm gồm 9 phần tử (khi chọn $n + m = 8$). Đồng thời, định lý này đã loại

bỏ hoàn toàn giả thiết "có hữu hạn cực điểm" để áp dụng cho mọi hàm phân hình khác hằng, với sự đánh đổi là các điều kiện về bậc được thắt chặt hơn ($n \geq 2$, $m \geq 2$ và $n + m \geq 8$).

Năm 2023, dựa trên lớp đa thức $P(z)$ thỏa mãn các điều kiện Fujimoto, A. Banerjee và A. Kundu [8] đã khẳng định sự đồng nhất một L -hàm và một hàm phân hình thông qua việc chia sẻ tập hợp với trọng số 2, một tổng quát kết quả của H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương. Cụ thể các tác giả đã chứng minh định lý:

Định lý 4. *Cho $P(z) = a(z - a_1) \cdots (z - a_q)$ có đạo hàm $P'(z) = aq(z - d_1)^{q_1} \cdots (z - d_k)^{q_k}$ thỏa mãn điều kiện $P(d_i) \neq P(d_j)$ với mọi $1 \leq i < j \leq k$ và là đa thức duy nhất mạnh cho hàm phân hình. Ký hiệu $S = \{z : P(z) = 0\}$. Khi đó với một hàm phân hình khác hằng f và một L -hàm khác hằng L , nếu $\min\{q_1, q_2\} \geq 2$ khi $k = 2$, $q \geq 2k + 4$ và $E_f(S, 2) = E_L(S, 2)$ thì ta có $f = L$.*

Có thể thấy lớp đa thức trong Định lý 4 tổng quát hơn so với lớp đa thức trong Định lý 3 và điều kiện $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ sẽ kéo theo điều kiện $E_f(S, 2) = E_L(S, 2)$, do vậy Định lý 4 là một cải tiến đáng kể của Định lý 3.

Đối với việc nghiên cứu các tập song xác định duy nhất, đặc biệt là cặp gồm một tập hữu hạn S và tập cực điểm $\{\infty\}$, thường dẫn đến một hệ thức phụ thuộc tuyến tính $f = cg$. Sự tồn tại của hệ thức này đối với tập S sinh bởi đa thức $Y_{n,m}(z)$ đã được chứng minh bởi P. Li và C.-C. Yang [38] và H.-X. Yi [69]. Tiếp đó, H. Fujimoto [16] đã đưa ra các điều kiện tổng quát đối với đa thức duy nhất mạnh để giải thích sự xuất hiện của hằng số c . Mở rộng bài toán này cho các L -hàm, Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi [70] cũng thu được hệ thức phụ thuộc tuyến tính tương tự và sử dụng giả thiết $\gcd(n, m) = 1$ để suy ra sự đồng nhất $f \equiv g$.

Theo hướng tiếp cận này, năm 2021, H. H. Khoái, V. H. An và L. Q. Ninh [32] đã nghiên cứu bài toán chia sẻ nghịch ảnh của cặp tập hợp S, T sinh bởi đa thức $Y_{n,m}(z)$, chỉ ra sự tồn tại của hệ thức phụ thuộc tuyến tính $f = hL$ hoặc sự đồng nhất tuyệt đối khi $\gcd(n, m) = 1$ thông qua định lý sau:

Định lý 5. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $n \geq 2m + 8$, $P(z), Q(z)$ là các đa thức kiểu $Y_{n,m}$ với các hệ số khác nhau. Ký hiệu S và T lần lượt là các tập không điểm của $P(z)$ và $Q(z)$. Giả sử f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm và L là một L -hàm khác hằng thỏa mãn $\overline{E}_L(S) = \overline{E}_f(S)$. Khi đó:

- (i) Tồn tại hằng số h khác không sao cho $f = hL$.
- (ii) Nếu $\gcd(n, m) = 1$ thì $f = L$.
- (iii) Đặc biệt, nếu f là một L -hàm khác hằng thì $f = L$ và $P = Q$.

Có thể thấy, Định lý 5 cho chúng ta một dạng song xác định duy nhất cho một hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm và một L -hàm khác hằng là một cặp tập hợp các không điểm của đa thức kiểu $Y_{n,m}(z)$. Ngoài ra, định lý này cũng cho một điều kiện đại số để một L -hàm và một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm biểu thị tuyến tính qua nhau. Định lý này cũng mở ra hướng nghiên cứu về song xác định duy nhất cho các hàm phân hình.

Đối với vấn đề duy nhất liên quan đến điều kiện các đa thức vi phân chia sẻ một hay nhiều tập hợp được xem như khởi nguồn từ giả thuyết của W. K. Hayman [25] (xem thêm [24]) về sự phân bố giá trị của đa thức vi phân. Năm 1997, C.-C. Yang và X. H. Hua [66] đã nghiên cứu đa thức vi phân dạng $f^n f'$ và chứng minh định lý sau:

Định lý 6 ([66]). Cho $n \geq 11$ là một số nguyên và a là một số phức khác 0. Giả sử hai hàm phân hình khác hằng f và g thỏa mãn các đa thức vi phân $f^n f'$ và $g^n g'$ nhận giá trị a CM. Khi đó, hoặc $f = dg$ với $d^{n+1} = 1$, hoặc $f(z) = c_1 e^{cz}$ và $g(z) = c_2 e^{-cz}$, ở đó c, c_1, c_2 là các hằng số và thỏa mãn $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -a^2$.

Có thể thấy, Định lý 6 cho chúng ta một tiêu chuẩn giải tích chặt chẽ về tính duy nhất của hàm phân hình thông qua cấu trúc đa thức vi phân. Việc sử dụng lũy thừa bậc cao ($n \geq 11$) đã thu giảm điều kiện từ việc chia sẻ nhiều giá trị xuống chỉ còn một giá trị duy nhất $a \neq 0$ (CM), đồng thời phân loại chính xác hai hàm số thành dạng tỷ lệ hoặc dạng

hàm mũ. Kết quả này tạo tiền đề lý thuyết quan trọng để mở rộng bài toán chia sẻ tập hợp cho các đạo hàm cấp cao và các đối tượng phức tạp hơn như L -hàm ở các nghiên cứu sau. Tiêu biểu như J. Ojeda [52] với các ứng dụng của giả thuyết W. K. Hayman trong môi trường p -adic, [53] về các đa thức vi phân chia sẻ tập hợp hữu hạn; M. L. Fang và W. Hong [13] trong việc tối ưu hóa bậc của đa thức hay I. Lahiri [35] với phương pháp chia sẻ có trọng số. Ngoài ra, các đóng góp của H. Fujimoto [17] và A. Banerjee [6] cũng đóng vai trò quan trọng.

Đối với lớp L -hàm, năm 2017, F. Liu, X.-M. Li và H.-X. Yi [48] đã mở rộng bài toán cho các đạo hàm cấp cao và chứng minh:

Định lý 7 ([48]). *Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương sao cho $n > 3k + 6$. Giả sử rằng $(f^n)^{(k)}$ và $(L^n)^{(k)}$ chia sẻ giá trị 1 CM. Khi đó $f = tL$, trong đó t là hằng số thỏa mãn $t^n = 1$.*

Đến năm 2019, X.-M. Li, F. Liu và H.-X. Yi. [43] tiếp tục mở rộng cho các đa thức vi phân có cấu trúc tổng quát hơn và thu được kết quả:

Định lý 8 ([43]). *Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương, $k \geq 2$ và $n > 3k + 9$. Giả sử rằng các đa thức vi phân $(f^n(f-1))^{(k)}$ và $(L^n(L-1))^{(k)}$ chia sẻ tập $\{1\}$ CM. Khi đó $f = L$.*

Có thể nói, vấn đề nghiên cứu về xác định duy nhất cho các hàm phân hình thông qua điều kiện chia sẻ một hoặc hai tập hợp của hàm phân hình hoặc đa thức vi phân của chúng đã và đang phát triển mạnh mẽ, thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả trong và ngoài nước, thu được nhiều kết quả quan trọng và vẫn còn một số vấn đề mở cần được tiếp tục nghiên cứu.

Sự lựa chọn đề tài *Về đa thức xác định duy nhất và tập xác định duy nhất đối với L -hàm và hàm phân hình* của chúng tôi nhằm làm phong phú thêm các kết quả nghiên cứu theo hướng này.

2. Đối tượng và mục đích nghiên cứu

2.1. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và lớp L -hàm thuộc lớp Selberg $\mathcal{S}$ với các đặc trưng giải tích nghiêm ngặt.

2.2. Mục đích nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi tập trung giải quyết hai vấn đề sau:

Vấn đề thứ nhất: Xây dựng một số dạng đa thức duy nhất cho các hàm phân hình, từ đó chỉ ra một số dạng tập xác định duy nhất hoặc song xác định duy nhất cho một L -hàm và một hàm phân hình.

Vấn đề thứ hai: Xây dựng một số định lý duy nhất mới liên quan điều kiện các đa thức vi phân của L -hàm và một hàm phân hình chia sẻ một tập hữu hạn.

3. Tổng quan về luận án

a) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ nhất:

Cho $P(z)$ là một đa thức một biến, $\mathcal{F}_1$ và $\mathcal{F}_2$ là hai lớp các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Ta nói $P(z)$ là đa thức duy nhất cho $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ nếu điều kiện $P(f) = P(g)$ kéo theo $f = g$ với mọi $f \in \mathcal{F}_1$ và $g \in \mathcal{F}_2$. Ta nói $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ nếu điều kiện $P(f) = cP(g)$, với c là một hằng số khác không, kéo theo $f = g$ với mọi $f \in \mathcal{F}_1$ và $g \in \mathcal{F}_2$. Trong trường hợp $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ thì ta gọi $P(z)$ là đa thức duy nhất hay tương ứng duy nhất mạnh cho họ $\mathcal{F}$.

Trong luận án này, một công cụ quan trọng được chúng tôi vận dụng xuyên suốt là các điều kiện về đa thức duy nhất mạnh của H. Fujimoto.

Cho $P(z)$ là một đa thức của $\mathbb{C}[z]$ có bậc q với đạo hàm của $P(z)$ có

k không điểm phân biệt $d_1, d_2, \dots, d_k$ với bội tương ứng $m_1, m_2, \dots, m_k$.

$$P'(z) = aq(z - d_1)^{m_1}(z - d_2)^{m_2} \cdots (z - d_k)^{m_k}. \quad (1.3)$$

Khi đó số k được gọi là chỉ số đạo hàm của $P(z)$. Giả sử rằng:

$$P(d_i) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1.4)$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{k-1} \geq m_k \geq 1, \quad k \geq 2. \quad (1.5)$$

Chú ý rằng, điều kiện (1.4) suy ra $P(z)$ chỉ có nghiệm đơn.

Ta nhắc lại một điều kiện đặt ra bởi nhà toán học H. Fujimoto (xem [16], Định lý 1, trang 1176):

$$P(d_i) \neq P(d_j), \quad 1 \leq i < j \leq k, \quad k \geq 2. \quad (F)$$

Chú ý rằng điều kiện (F) là luôn đúng khi $k = 2$. Do đó ta chỉ cần quan tâm đến điều kiện này khi $k \geq 3$.

Ký hiệu $\mathcal{S}$ là lớp các L -hàm Selberg, $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ là họ các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$.

Đối với vấn đề xây dựng một số dạng đa thức duy nhất cho $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ chúng tôi thu được hai kết quả: Định lý 1.2.3 và Định lý 2.2.1 xác định các dạng đa thức duy nhất cho $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Có thể thấy Định lý 1.2.3 là một mở rộng của Bổ đề 9 của H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương trong [34]. Dựa trên các Định lý 1.2.3 và Định lý 2.2.1, chúng tôi chứng minh được một số kết quả về tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình như sau:

Đối với lớp L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm, chúng tôi đã thiết lập được một điều kiện đủ liên quan đến bậc của đa thức để một L -hàm và một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm là trùng nhau khi chia sẻ một tập hợp hữu hạn (Định lý 1.2.4). Từ đó chỉ ra sự tồn tại của một lớp các tập xác định duy nhất gồm 5 phần tử đối với L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm (Định lý 1.2.4). Ngoài ra, chúng

tôi xây dựng mới các điều kiện đủ để một hàm phân hình có hữu hạn cực điểm và một L -hàm phụ thuộc tuyến tính (Định lý 1.3.1) hoặc trùng nhau (Định lý 1.3.2) khi chúng chia sẻ hai lớp của các tập hợp hữu hạn phân biệt.

Có thể thấy Định lý 1.2.4 đã cải tiến Định lý 2 của H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương trong [34] bằng cách tối ưu hóa số phần tử tập xác định duy nhất (từ 9 xuống 5 phần tử) và mở rộng Định lý 5 của Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi trong [70] bằng cách loại bỏ giả thiết $\gcd(n, m) = 1$. Định lý 1.3.1 là một sự tổng quát hóa cho Định lý 5 của Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi trong [70] và Định lý 2 của Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi trong [34] khi chuyển bài toán từ chia sẻ một tập hợp sang chia sẻ hai tập hợp hữu hạn phân biệt.

Đối với lớp L -hàm và hàm phân hình bất kỳ, chúng tôi đã chỉ ra được một lớp tập xác định duy nhất cho $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ liên quan đến không điểm của đa thức xác định bởi Fujimoto với số phần tử ít nhất là 5 (Định lý 2.2.2) hay liên quan đến không điểm của đa thức kiểu Yi (Định lý 2.2.7), từ đó chỉ ra sự tồn tại của một lớp tập xác định duy nhất kiểu Yi gồm 10 phần tử (Chú ý 2.2.8). Đồng thời, luận án cũng thiết lập một điều kiện đại số liên quan đến không điểm của hai đa thức kiểu Yi để một hàm phân hình biểu thị tuyến tính qua một L -hàm hoặc hai L -hàm trùng nhau (Định lý 2.2.6). Ngoài ra, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ liên quan đến đại lượng khuyết chung tại 0 và $+\infty$ để hai hàm phân hình trùng nhau (Định lý 2.3.1) khi chúng chia sẻ một tập hợp hữu hạn. Từ đó chỉ ra sự tồn tại của các lớp tập xác định duy nhất với số phần tử được thu gọn đáng kể (xuống còn từ 6 đến 10 phần tử) khi hàm phân hình có các giá trị khuyết phù hợp (Hệ quả 2.3.2 và Hệ quả 2.3.3).

Có thể thấy, Định lý 2.2.1 là một mở rộng đối với Định lý 3.4 của A. Banerjee và A. Kundu trong [8] thông qua việc thay đổi các điều kiện giả thiết, cho phép xác lập lớp đa thức duy nhất mạnh trên không gian $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ đối với các đa thức có cấu trúc nghiệm của đạo hàm chứa nghiệm đơn, vốn là lớp đối tượng nằm ngoài phạm vi áp dụng của Định lý 3.4. Tiếp đó, Định lý 2.2.2 đã cải tiến Định lý 1 của H. H. Khoái, V.

H. An và N. D. Phương trong [34] thông qua việc nối lỏng điều kiện bậc của đa thức. Định lý 2.2.6 là một mở rộng trực tiếp Định lý 1 của V. H. An và N. D. Phương trong [5]. Đặc biệt, kết quả ở Định lý 2.3.1 đã cụ thể hóa và chứng minh trọn vẹn dự đoán của H. H. Khoái và V. H. An trong [29] đối với quan hệ giữa hàm phân hình và L -hàm, thông qua việc định lượng hóa các điều kiện về giá trị khuyết cho sự đồng nhất của hai lớp hàm.

b) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ hai, chúng tôi đã:

Thiết lập được điều kiện đủ liên quan đến việc chia sẻ một tập hữu hạn của hai đa thức vi phân kiểu $(f^n)^{(m)}$ tương ứng để hai hàm phân hình biểu thị tuyến tính qua nhau hoặc hai đạo hàm cấp cao của chúng trùng nhau (Định lý 3.2.1, Hệ quả 3.2.3 và Hệ quả 3.2.4). Từ đó xác lập được tập xác định duy nhất cho hàm phân hình gồm 11 phần tử liên quan đến đại lượng khuyết chung tại 0 và $+\infty$ của hai đa thức vi phân kiểu $(f^n)^{(m)}$ (Hệ quả 3.2.2).

Thiết lập một điều kiện đủ liên quan đến các đa thức vi phân dạng $(f^n)^{(m)}$ chia sẻ một tập hữu hạn hay một phần tử để một L -hàm và một hàm phân hình trùng nhau hoặc sai khác một hằng số tỷ lệ là nghiệm của đơn vị (Định lý 3.2.9, Hệ quả 3.2.10).

Xây dựng mới một số định lý duy nhất liên quan đến các đa thức vi phân dạng $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ chia sẻ một tập hữu hạn hay một phần tử để một L -hàm và một hàm phân hình trùng nhau hoặc biểu thị tuyến tính qua nhau (Định lý 3.2.11, Hệ quả 3.2.12 và Định lý 3.2.13).

Có thể thấy Định lý 3.2.9 đã mở rộng Định lý 1.1 của F. Liu, X.-M. Li và H.-X. Yi trong [48] thông qua việc thiết lập phép chia sẻ tập nghiệm của đơn vị bậc d theo CM cho đạo hàm bậc k của đơn thức $(f^n)^{(k)}$. Hơn nữa, Định lý 3.2.11 và Hệ quả 3.2.12 là một sự cải tiến và tổng quát hóa trực tiếp Định lý 1.10 của X.-M. Li, F. Liu và H.-X. Yi trong [43] thông qua việc nối lỏng cấu trúc của đối tượng khảo sát sang đạo hàm của lớp đa thức vi phân sinh bởi nhị thức dạng $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ dưới các ràng buộc đại số cụ thể đối với bậc n . Tiếp nối hướng tiếp cận đó, Định lý 3.2.13 tiếp tục tổng quát hóa các kết quả trên cho đạo hàm của lớp đa

thức bậc cao dạng $(f^n Q(f))^{(k)}$ (với $Q(z)$ là đa thức bậc m) thông qua việc thiết lập điều kiện đồng nhất $f = L$ dựa trên giả thiết $z^n Q(z)$ là một đa thức duy nhất hoặc duy nhất mạnh đối với các hàm phân hình.

4. Phương pháp và công cụ nghiên cứu

Luận án sử dụng các công cụ của giải tích phức, lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna và lý thuyết các L -hàm thuộc lớp Selberg. Về phương pháp, luận án sử dụng kỹ thuật xây dựng hàm phụ để triệt tiêu ảnh hưởng của vô hạn cực điểm trong các chứng minh đối với lớp hàm phân hình tổng quát. Đồng thời, nghiên cứu áp dụng kỹ thuật so sánh và đối chiếu cấu trúc ảnh ngược của các tập hợp hữu hạn thông qua các đa thức duy nhất mạnh dựa trên các điều kiện về bậc.

Về công cụ, luận án vận dụng Định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai của Lý thuyết Nevanlinna làm nền tảng giải tích. Các đặc trưng chuyên biệt của L -hàm thuộc lớp Selberg $\mathcal{S}$ như phương trình hàm, giả thuyết tích Euler và thác triển giải tích được khai thác để thiết lập các đánh giá đặc trưng. Quá trình nghiên cứu thực hiện dựa trên việc kết hợp các bất đẳng thức Nevanlinna với cấu trúc đại số của các đa thức duy nhất để giải quyết bài toán xác định duy nhất.

5. Cấu trúc luận án

Luận án, ngoài phần mở đầu, kết luận chung và danh mục tài liệu tham khảo, được cấu trúc thành ba chương nội dung chính:

Chương 1: *Vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm*. Chương này khảo sát tính duy nhất khi hàm phân hình có số lượng cực điểm hữu hạn. Nội dung chính là thiết lập các điều kiện đa thức để xác định hệ thức phụ thuộc tuyến tính $f = hL$ và sự đồng nhất giữa f và L . Bằng việc cải tiến kỹ thuật đánh giá từ H. H. Khoái và V. H. An [29], chương này chứng minh sự tồn tại của tập xác định duy

nhất gồm 5 phần tử. Các kết quả của chương này được công bố tại các bài báo [2] và [4] trong Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Chương 2: *Vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình*. Chương này mở rộng nghiên cứu cho lớp hàm phân hình có vô hạn cực điểm trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Luận án vận dụng phương pháp hàm phụ và kỹ thuật xử lý hàm không điểm để thiết lập các định lý về sự phụ thuộc tuyến tính $f = hL$ thông qua việc chia sẻ các cặp tập hữu hạn S, T . Kết quả nghiên cứu khẳng định mối quan hệ tuyến tính là tính chất nội tại không phụ thuộc vào số lượng cực điểm, góp phần giải quyết giả thuyết của H. H. Khoái [28]. Các kết quả trong chương này được công bố trên bài báo số [1] và [2] trong Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Chương 3: *Vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình với điều kiện đa thức vi phân*. Chương này nghiên cứu sự tương tác giữa cấu trúc vi phân và tính duy nhất của hàm L . Đối tượng nghiên cứu là tính duy nhất mạnh của các đạo hàm cấp cao và đa thức vi phân khi chia sẻ tập các nghiệm của đơn vị. Luận án chứng minh các toán tử vi phân bảo toàn mối quan hệ giữa hàm phân hình và hàm L , dẫn đến các định lý về sự đồng nhất tuyệt đối. Kết quả này tổng quát hóa các định lý của F. Liu, X.-M. Li và H.-X. Yi [48] và X.-M. Li, F. Liu và H.-X. Yi [43]. Các kết quả trong chương này được công bố trên bài báo số [3] trong Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

Chương 1

Vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm

1.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Bây giờ, ta nhắc lại một số khái niệm cơ sở và kết quả đã biết của lý thuyết phân bố giá trị của các hàm phân hình (xem [24, 18]).

Ký hiệu $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ ($\mathcal{A}(\mathbb{C})$) là tập các hàm phân hình (hàm nguyên) trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Trong luận án này, một hàm phân hình (tương ứng, hàm nguyên) được hiểu là một hàm thuộc $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ (tương ứng, $\mathcal{A}(\mathbb{C})$) không đồng nhất 0 và không đồng nhất ∞ .

Cho $a \in \mathbb{C}$, hàm đếm bội $\nu_f^a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{N}$ của hàm phân hình f được xác định bởi:

$$\nu_f^a(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(z) \neq a, \\ d & \text{nếu } f(z) = a \text{ có bội là } d. \end{cases}$$

Đối với cực điểm của f , ta quy ước $\nu_f^\infty = \nu_{\frac{1}{f}}^0$.

Đồng thời, hàm đếm không tính bội $\bar{\nu}_f^a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{N}$ được định nghĩa bởi $\bar{\nu}_f^a(z) = \min \{ \nu_f^a(z), 1 \}$, với quy ước tương ứng cho cực điểm là $\bar{\nu}_f^\infty = \bar{\nu}_{\frac{1}{f}}^0$.

Cho $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ và $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $S \neq \emptyset$, ta định nghĩa ảnh ngược

của S tính bội bởi:

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} \{ (z, \nu_f^a(z)) : z \in \mathbb{C} \},$$

và ảnh ngược của S không tính bội bởi:

$$\overline{E}_f(S) = \bigcup_{a \in S} \{ (z, \bar{\nu}_f^a(z)) : z \in \mathbb{C} \}.$$

Cho $\mathcal{F}$ là tập hợp con các hàm phân hình khác hằng của $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Hai hàm phân hình khác hằng $f, g \in \mathcal{F}$ được gọi là *chia sẻ tập S tính bội* (chia sẻ S CM) nếu $E_f(S) = E_g(S)$, và được gọi là *chia sẻ tập S không tính bội* (chia sẻ S IM) nếu $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$.

Nếu điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ (tương ứng $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$) suy ra $f = g$ đối với hai hàm phân hình khác hằng bất kỳ f, g của $\mathcal{F}$, thì S được gọi là tập duy nhất đối với các hàm phân hình $\mathcal{F}$ tính bội (tương ứng không tính bội).

Cho $f(z)$ là một hàm phân hình, số các cực điểm của $f(z)$ trong đĩa $|z| \leq r$ được ký hiệu là $n(r, f)$ và một cực điểm bội m được tính m lần trong $n(r, f)$.

Hàm đếm $N(r, f)$ được định nghĩa như sau:

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r.$$

Hàm đếm $N(r, f)$ thường được gọi là hàm đếm tại các cực điểm.

Hàm đếm $\overline{N}(r, f)$ được định nghĩa như sau:

$$\overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, f) - \bar{n}(0, f)}{t} dt + \bar{n}(0, f) \log r.$$

Hàm đếm $\overline{N}(r, f)$ thường được gọi là hàm đếm tại các cực điểm không tính bội.

Chú ý rằng, các không điểm của f là các cực điểm của $\frac{1}{f}$. Vì vậy,

hàm đếm $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ và $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ được định nghĩa lần lượt như sau:

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

trong đó $n\left(r, \frac{1}{f}\right)$ và $\overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ lần lượt là số các không điểm tính bội và số các không điểm không tính bội trong đĩa $|z| \leq r$.

Với mọi số phức $a \in \mathbb{C}$, các nghiệm của phương trình $f(z) = a$ (a -điểm của f) chính là các cực điểm của hàm $\frac{1}{f-a}$. Do đó, hàm đếm $N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ và hàm đếm không tính bội $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ được định nghĩa tương tự như sau:

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f-a}\right) - n\left(0, \frac{1}{f-a}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f-a}\right) \log r,$$

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f-a}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f-a}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f-a}\right) \log r,$$

trong đó $n\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ và $\overline{n}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ lần lượt là số a -điểm tính bội và không tính bội của hàm f trong đĩa $|z| \leq r$.

Hàm xấp xỉ được định nghĩa như sau:

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

trong đó $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$.

Từ đó, với bất kỳ giá trị $a \in \mathbb{C}$, ta có

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - a} \right| d\theta.$$

Có thể thấy rằng, hàm $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ "đo" những giá trị của f gần a .

Hàm đặc trưng $T(r, f)$ được định nghĩa như sau:

$$T(r, f) = N(r, f) + m(r, f).$$

Từ đó, với bất kỳ giá trị $a \in \mathbb{C}$, ta có

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

Ta nhắc lại hai định lý cơ bản của lý thuyết phân bố giá trị.

Định lý 1.1.1 (Định lý cơ bản thứ nhất, xem [67], Định lý 1.2, trang 8). *Cho f là một hàm phân hình khác hằng và cho $a \in \mathbb{C}$. Khi đó*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ là một đại lượng bị chặn.

Định lý 1.1.2 (Định lý cơ bản thứ hai, xem [67], Định lý 1.6, trang 22). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và cho $a_1, \dots, a_q$ là các điểm phân biệt của $\mathbb{C}$. Khi đó*

$$(q-1)T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f),$$

ở đó $N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ là hàm đếm tại các không điểm của f' mà không phải là không điểm của hàm $(f-a_1) \cdots (f-a_q)$ và $S(r, f) = o(T(r, f))$ cho mọi r trừ ra một tập hợp có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Cho f là một hàm phân hình khác hằng. Hàm phân hình a được gọi là một hàm nhỏ đối với f nếu $T(r, a) = S(r, f)$.

Định lý 1.1.3 (Định lý cơ bản thứ hai cho mục tiêu di động, xem [64], Hệ quả 1, trang 227). *Cho f là một hàm phân hình khác hằng và $a_1, a_2, \dots, a_q$ là các hàm phân hình phân biệt trên $\mathbb{C}$. Giả sử rằng a_i là các hàm nhỏ đối với f cho mọi $i = 1, 2, \dots, q$. Khi đó, bất đẳng thức*

$$(q-2)T(r, f) \leq \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(r, f)$$

đúng cho mọi r , trừ ra một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Bổ đề 1.1.4 ([65], Bổ đề 2, trang 108 và [18] Định lý 6.1, trang 31). *Cho f là một hàm phân hình khác hằng và $P(f)$ là đa thức của f có dạng*

$$P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + a_{n-2} f^{n-2} + \dots + a_1 f + a_0,$$

trong đó $a_n \neq 0$, a_i là các hàm nhỏ đối với f với mọi $i = 0, 1, \dots, n$. Khi đó

$$T(r, P(f)) = nT(r, f) + S(r, f).$$

Định nghĩa 1.1.5. Đa thức $P(z)$ được gọi là đa thức duy nhất cho các hàm phân hình (hàm nguyên) nếu đối với hai hàm phân hình (hàm nguyên) bất kỳ f, g từ điều kiện $P(f) = P(g)$ suy ra $f = g$.

Định nghĩa 1.1.6. Đa thức $P(z)$ được gọi là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình (hàm nguyên) nếu đối với hai hàm phân hình (hàm nguyên) bất kỳ f, g từ điều kiện $P(f) = cP(g)$, với $c \neq 0, c \in \mathbb{C}$ suy ra $f = g$.

Cho $R(z)$ là đa thức với đạo hàm có dạng sau:

$$R'(z) = (z-d_1)^{q_1}(z-d_2)^{q_2} \dots (z-d_k)^{q_k}. \quad (1.1)$$

Ta nhắc lại điều kiện sau được đưa ra bởi H. Fujimoto (xem [16], Định lý 1, trang 1176):

$$R(d_i) \neq R(d_j), \quad 1 \leq i < j \leq k. \quad (1.2)$$

Bổ đề 1.1.7 ([17], Định lý 1.4, trang 35). Cho $R(z)$ là một đa thức dạng (1.1) thỏa mãn điều kiện (1.2). Khi đó $R(z)$ là đa thức duy nhất nếu và chỉ nếu

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} q_i q_j \geq \sum_{l=1}^k q_l,$$

trong đó k là chỉ số đạo hàm.

Nói riêng, bất đẳng thức trên luôn thỏa mãn khi $k \geq 4$. Bất đẳng thức này cũng được thỏa mãn khi $k = 3$ và $\max\{q_1, q_2, q_3\} \geq 2$ hoặc khi $k = 2$, $\min\{q_1, q_2\} \geq 2$ và $q_1 + q_2 \geq 5$.

Định nghĩa 1.1.8. Cho f là hàm phân hình khác hằng. Khi đó

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

được gọi là bậc của f .

Bổ đề 1.1.9 ([18], Định lý 4.1, trang 57). Cho $f(z)$ là một hàm nguyên có bậc hữu hạn $\rho(f)$. Nếu f không có không điểm thì $f(z) = e^{h(z)}$, trong đó $h(z)$ là một đa thức có bậc $\leq \rho(f)$.

Ví dụ 1.1.10. i) Cho f là hàm hữu tỷ khác hằng. Khi đó $\rho(f) = 0$.

ii) Cho $f(z) = e^z$. Khi đó $\rho(f) = 1$.

Chứng minh. i) Viết $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, với $P(z), Q(z)$ không có nhân tử chung và $d = \max\{\deg P, \deg Q\} \geq 1$. Ta có $T(r, f) = d \log r + O(1)$. Do đó $\log T(r, f) = \log d + \log \log r + O(1)$.

Từ đây và $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log d + \log \log r + O(1)}{\log r} = 0$ ta có $\rho(f) = 0$.

ii) Từ $T(r, e^z) = \frac{r}{\pi}$ ta nhận được $\log T(r, e^z) = \log r - \log \pi$. Do đó

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, e^z)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{\log r} = 1.$$

Vậy $\rho(f) = 1$ nếu $f(z) = e^z$. □

Bổ đề 1.1.11. Cho f_1 và f_2 là hai hàm phân hình. Khi đó:

i) $\rho(f_1 + f_2) \leq \max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}$.

ii) $\rho(f_1 f_2) \leq \max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}$.

Nếu $\rho(f_1) \neq \rho(f_2)$ thì đẳng thức xảy ra trong các đánh giá trên.

Chứng minh. i) Ta cần chứng minh $\rho(f_1 + f_2) \leq \max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}$.

Từ bất đẳng thức cơ bản đối với hàm đặc trưng của một tổng, ta có:

$$T(r, f_1 + f_2) \leq T(r, f_1) + T(r, f_2) + \log 2.$$

Vì $T(r, f_1) \leq \max\{T(r, f_1), T(r, f_2)\}$ và $T(r, f_2) \leq \max\{T(r, f_1), T(r, f_2)\}$, ta có thể đánh giá:

$$T(r, f_1 + f_2) \leq 2 \max\{T(r, f_1), T(r, f_2)\} + \log 2.$$

Lấy $\log^+$ cả hai vế (với r đủ lớn để các đại lượng đều dương), ta được:

$$\begin{aligned} \log^+ T(r, f_1 + f_2) &\leq \log^+ (2 \max\{T(r, f_1), T(r, f_2)\}) + O(1) \\ &\leq \log^+ \max\{T(r, f_1), T(r, f_2)\} + \log 2 + O(1) \\ &\leq \max\{\log^+ T(r, f_1), \log^+ T(r, f_2)\} + O(1). \end{aligned}$$

Chia cả hai vế cho $\log r$ (với $r > 1$) và lấy giới hạn trên $\limsup_{r \rightarrow \infty}$, ta thu được:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ T(r, f_1 + f_2)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\max\{\log^+ T(r, f_1), \log^+ T(r, f_2)\}}{\log r}.$$

Do tính chất của giới hạn trên, ta suy ra:

$$\rho(f_1 + f_2) \leq \max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}.$$

ii) Ta cần chứng minh $\rho(f_1 f_2) \leq \max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}$.

Tương tự phần i), áp dụng bất đẳng thức cơ bản cho một tích:

$$T(r, f_1 f_2) \leq T(r, f_1) + T(r, f_2) \leq 2 \max\{T(r, f_1), T(r, f_2)\}.$$

Lấy $\log^+$ cả hai vế:

$$\log^+ T(r, f_1 f_2) \leq \max\{\log^+ T(r, f_1), \log^+ T(r, f_2)\} + \log 2.$$

Chia cho $\log r$ và lấy $\limsup_{r \rightarrow \infty}$, ta nhận được:

$$\rho(f_1 f_2) \leq \max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}.$$

Chứng minh trường hợp dấu bằng xảy ra khi $\rho(f_1) \neq \rho(f_2)$:

Không mất tính tổng quát, giả sử $\rho(f_1) < \rho(f_2)$.

Khi đó $\max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\} = \rho(f_2)$. Từ phần i), ta đã có $\rho(f_1 + f_2) \leq \rho(f_2)$. Bây giờ ta cần chứng minh $\rho(f_1 + f_2) \geq \rho(f_2)$.

Ta viết lại hàm f_2 dưới dạng:

$$f_2 = (f_1 + f_2) - f_1.$$

Áp dụng đánh giá ở phần i) cho hai hàm $(f_1 + f_2)$ và $(-f_1)$, ta có:

$$\rho(f_2) \leq \max\{\rho(f_1 + f_2), \rho(-f_1)\}.$$

Vì $T(r, -f_1) = T(r, f_1)$, suy ra $\rho(-f_1) = \rho(f_1)$. Do đó:

$$\rho(f_2) \leq \max\{\rho(f_1 + f_2), \rho(f_1)\}.$$

Vì giả thiết $\rho(f_1) < \rho(f_2)$, bất đẳng thức trên chỉ đúng khi giá trị lớn nhất rơi vào $\rho(f_1 + f_2)$. Do đó:

$$\rho(f_2) \leq \rho(f_1 + f_2).$$

Kết hợp cả hai chiều đánh giá, ta thu được đẳng thức:

$$\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_2) = \max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}.$$

Đối với tích, ta viết $f_2 = \frac{f_1 f_2}{f_1} = (f_1 f_2) \cdot \frac{1}{f_1}$. Áp dụng phần ii), ta có:

$$\rho(f_2) \leq \max \left\{ \rho(f_1 f_2), \rho \left(\frac{1}{f_1} \right) \right\}.$$

Theo Định lý cơ bản thứ nhất của Nevanlinna, $T \left(r, \frac{1}{f_1} \right) = T(r, f_1) + O(1)$, do đó $\rho \left(\frac{1}{f_1} \right) = \rho(f_1)$. Bất đẳng thức trở thành:

$$\rho(f_2) \leq \max \{ \rho(f_1 f_2), \rho(f_1) \}.$$

Một lần nữa, do $\rho(f_1) < \rho(f_2)$, ta bắt buộc phải có $\rho(f_2) \leq \rho(f_1 f_2)$. Vậy đẳng thức cho tích cũng xảy ra. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 1.1.12 ([18], Định lý 2.3, trang 99). *Đối với hàm phân hình bất kỳ f sao cho $f^{(k)}$ khác hằng, ta có:*

- i) $T(r, f^{(k)}) \leq (k+1)T(r, f) + S(r, f)$,
- ii) $S(r, f^{(k)}) = S(r, f)$.

Bổ đề 1.1.13 ([73], Bổ đề 2.3, trang 5; hoặc [68], Bổ đề 3, trang 171). *Đối với hàm phân hình bất kỳ f , ta có*

$$N \left(r, \frac{1}{f'} \right) \leq N \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N}(r, f) + S(r, f).$$

Định nghĩa 1.1.14 ([60], các trang 111–112). Một L -hàm luôn được hiểu là một L -hàm trong lớp Selberg $\mathcal{S}$. Một L -hàm trong lớp Selberg $\mathcal{S}$ được định nghĩa là một chuỗi Dirichlet hội tụ tuyệt đối trong miền $\text{Re}(s) > 1$:

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \quad a(1) = 1,$$

và thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) Giả thuyết Ramanujan: với mọi số dương ϵ , $a(n) \ll n^\epsilon$;
- (ii) Thác triển giải tích: tồn tại một số nguyên không âm m sao cho $(s-1)^m L(s)$ là một hàm nguyên của bậc hữu hạn;

(iii) Phương trình hàm: tồn tại các số thực dương Q , λ_i , tồn tại một số nguyên dương K , và tồn tại các số phức μ_i , ω với $\operatorname{Re} \mu_i \geq 0$ và $|\omega| = 1$ sao cho

$$\Lambda_L(s) = \omega \overline{\Lambda_L(1 - \bar{s})},$$

trong đó

$$\Lambda_L(s) = L(s) Q^s \prod_{i=1}^K \Gamma(\lambda_i s + \mu_i);$$

(iv) Giả thuyết tích Euler:

$$L(s) = \prod_p L_p(s),$$

trong đó

$$L_p(s) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}} \right)$$

với hệ số $b(p^k)$ thỏa mãn $b(p^k) \ll p^{k\theta}$ đối với $\theta \leq \frac{1}{2}$ nào đó, ở đó tích được lấy trên mọi số nguyên tố p .

Chú ý rằng, theo tính chất (ii), một L -hàm có thể thác triển giải tích thành một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ với chỉ một cực điểm có thể là 1. Do đó việc nghiên cứu phân bố giá trị của các L -hàm chia sẻ các tập hữu hạn với các hàm phân hình cũng là một trong những vấn đề nghiên cứu của lý thuyết Nevanlinna.

Ví dụ 1.1.15. Hàm zeta Riemann, ký hiệu là $\zeta(s)$, là một L -hàm. Hàm Riemann zeta được định nghĩa bởi chuỗi Dirichlet hội tụ tuyệt đối trong miền $\operatorname{Re}(z) > 1$ như sau:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Hàm $\zeta(s)$ có thể thác triển giải tích được ra toàn bộ mặt phẳng phức

ngoại trừ một cực điểm đơn $s = 1$. Đặt

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Khi đó $\Lambda(s)$ thỏa mãn phương trình hàm:

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

Hơn nữa, hàm $\zeta(s)$ có khai triển tích Euler:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

ở đó p lấy giá trị trong tập các số nguyên tố.

Bổ đề 1.1.16 ([47], Bổ đề 2.3, trang 3800). *Nếu L là một L -hàm thì phương trình $L = a$ có vô hạn nghiệm, trong đó $a \in \mathbb{C}$.*

Bổ đề 1.1.17 ([26], Định lý, trang 2). *Cho $L_1, \dots, L_N$ là các L -hàm phân biệt. Khi đó $L_1, \dots, L_N$ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}$.*

Bổ đề 1.1.18 ([60], Định lý 7.9, Định lý 7.11, các trang 150–152; hoặc [58], Bổ đề 3). *Cho L là một L -hàm. Khi đó:*

i) $T(r, L) = \frac{d_L}{\pi} r \log r + O(r)$, ở đó $d_L = 2 \sum_{i=1}^K \lambda_i$ là bậc của L , còn K và λ_i tương ứng là số nguyên dương và các số thực dương xuất hiện trong phương trình hàm của định nghĩa L -hàm.

ii) $N(r, L) = S(r, L)$.

iii) $\rho(L) = 1$.

1.2 Tập xác định duy nhất của L -hàm chia sẻ tập hữu hạn với hàm phân hình có hữu hạn cực điểm

Cho $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ là các tập con khác rỗng của $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ sao cho $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$.

Định nghĩa 1.2.1. Một đa thức $P(z)$ được gọi là **đa thức duy nhất trên** $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ nếu với hai hàm phân hình khác hằng bất kỳ f, g sao cho $(f, g) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$, điều kiện $P(f) = P(g)$ suy ra $f = g$.

Định nghĩa 1.2.2. Một đa thức $P(z)$ được gọi là **đa thức duy nhất mạnh trên** $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ nếu đối với hai hàm phân hình khác hằng bất kỳ (f, g) sao cho $(f, g) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$, điều kiện $P(f) = cP(g)$, với $c \neq 0$, suy ra $f = g$.

Lấy $\mathbb{A}$ là $\mathcal{S}$ (tập các L -hàm), $\mathbb{B}$ là $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Khi đó ta có các khái niệm đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Từ Định nghĩa 1.2.1 và Định nghĩa 1.2.2 ta thấy rằng, đa thức $P(z)$ là một đa thức duy nhất (duy nhất mạnh) trên $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ nếu và chỉ nếu $P(z)$ là một đa thức duy nhất (duy nhất mạnh) cho $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Chú ý rằng, tập các đa thức duy nhất cho $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ là tập con thực sự của tập các đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Xét $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ là đa thức bậc q có dạng:

$$P(z) = a(z - a_1) \cdots (z - a_q), \quad a \neq 0,$$

với đạo hàm của $P(z)$ có k không điểm phân biệt $d_1, d_2, \dots, d_k$ với bội tương ứng $m_1, m_2, \dots, m_k$ và khi đó

$$P'(z) = aq(z - d_1)^{m_1}(z - d_2)^{m_2} \cdots (z - d_k)^{m_k}. \quad (1.3)$$

Số k được gọi là chỉ số đạo hàm của $P(z)$.

Giả sử rằng

$$P(d_i) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1.4)$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{k-1} \geq m_k \geq 1, \quad k \geq 2. \quad (1.5)$$

Chú ý rằng, điều kiện (1.4) suy ra $P(z)$ chỉ có nghiệm đơn.

Ta nhắc lại điều kiện sau được giới thiệu bởi H. Fujimoto (xem [16], Định lý 1, trang 1176):

$$P(d_i) \neq P(d_j), \quad 1 \leq i < j \leq k, \quad k \geq 2. \quad (F)$$

Ta thấy rằng điều kiện (F) luôn đúng khi $k = 2$. Thật vậy, khi đó $P'(z) = aq(z - d_1)^{m_1}(z - d_2)^{m_2}$ và để ý rằng $q = m_1 + m_2 + 1$, $P(z) - P(d_1) = (z - d_1)^{m_1}P_1(z)$, ở đó $P_1(d_1) \neq 0$, $P(z) - P(d_2) = (z - d_2)^{m_2}P_2(z)$, $P_2(d_2) \neq 0$.

Nếu $P(d_1) = P(d_2)$ thì $(z - d_1)^{m_1+1}P_1(z) = (z - d_2)^{m_2+1}P_2(z)$. Do $d_1 \neq d_2$ nên $P_1(z)$ chứa nhân tử $(z - d_2)^{m_2+1}$. Do đó $q \geq m_1 + m_2 + 2$. Điều này mâu thuẫn với $q = m_1 + m_2 + 1$. Vậy $P(d_1) \neq P(d_2)$.

Do đó ta giả sử

$$\text{Điều kiện (F) được thỏa mãn khi } k \geq 3. \quad (1.6)$$

Từ (1.3) đến (1.6) ta có thể viết $P(z)$ dưới dạng

$$P(z) = a(z - d_1)^{m_1+1}(z - b_1) \cdots (z - b_{q-m_1-1}) + b, \quad (1.7)$$

trong đó $a \neq 0$, $b = P(d_1) \neq 0$ và $d_i \neq b_j$, $1 \leq i < j \leq q - m_1 - 1$.

Định lý 1.2.3. *Cho $P(z)$ được xác định như trong (1.3) với các điều kiện (1.4), (1.5), (1.6). Giả sử rằng một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:*

- 1) Nếu $k \geq 2$, $q \geq 4$ và $m_2 = 1$ hoặc $q \geq 6$ và $m_2 \geq 2$.
- 2) Nếu $k = 3$, $m_1 \geq 2$.
- 3) Nếu $k \geq 4$.

Khi đó $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Chứng minh. Xét $P(f) = P(L)$. Để ý rằng

$$q = m_1 + m_2 + \cdots + m_k + 1.$$

1) $k = 2$. Khi đó

$$P(z) = a(z - d_1)^{m_1+1}(z - b_1) + b, \quad P'(z) = aq(z - d_1)^{m_1}(z - d_2)^{m_2}.$$

Trường hợp 1. $q \geq 4$, $m_2 = 1$, nghĩa là $m_1 \geq 2$, $m_2 = 1$. Khi đó

$$P(z) = a(z - d_1)^{m_1+1}(z - b_1) + b, \quad P'(z) = aq(z - d_1)^{m_1}(z - d_2),$$

$$P(z) = a(z - d_1)^{m_1+2} + a(d_1 - b_1)(z - d_1)^{m_1+1} + b, \quad d_1 \neq b_1.$$

Đặt $-B = d_1 - b_1$, $h = \frac{f - d_1}{L - d_1}$, $g = L - d_1$. Từ $P(f) = P(L)$ ta có

$$(f - d_1)^{m_1+2} - B(f - d_1)^{m_1+1} = (L - d_1)^{m_1+2} - B(L - d_1)^{m_1+1}, \quad (1.8)$$

trong đó $B \neq 0$.

Chú ý rằng, phương trình $z^{m_1+2} - 1 = 0$ có m_1+2 nghiệm đơn, phương trình $z^{m_1+1} - 1 = 0$ có m_1+1 nghiệm đơn. Cho $t_1, t_2, \dots, t_{m_1}$ (tương ứng, $r_1, r_2, \dots, r_{m_1+1}$) là các nghiệm của đơn vị của bậc m_1+1 (tương ứng, m_1+2), $t_i \neq 1$, $i = 1, 2, \dots, m_1$, (tương ứng $r_i \neq 1$, $i = 1, 2, \dots, m_1+1$). Vì $\gcd(m_1+1, m_1+2) = 1$ nên các phương trình $z^{m_1+1} - 1 = 0$ và $z^{m_1+2} - 1 = 0$ có các nghiệm khác nhau trừ $z = 1$. Khi đó $t_1, t_2, \dots, t_{m_1}$ và $r_1, r_2, \dots, r_{m_1+1}$ là tất cả các nghiệm sao cho $t_i \neq r_j$ với mọi i, j . Do đó

$$L - d_1 = B \frac{h^{m_1+1} - 1}{h^{m_1+2} - 1},$$

$$g = B \frac{h^{m_1+1} - 1}{h^{m_1+2} - 1} = B \frac{(h - t_1) \cdots (h - t_{m_1})}{(h - r_1) \cdots (h - r_{m_1+1})}. \quad (1.9)$$

Giả sử h không là hằng số. Chú ý rằng, L chỉ có thể có một cực điểm tại $s = 1$. Do đó $g = L - d_1$ chỉ có thể có một cực điểm tại $s = 1$. Vậy

$N(r, g) = N(r, L) = S(r, L)$. Từ đây và (1.9) ta nhận được:

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T\left(r, \frac{h^{m_1+1} - 1}{h^{m_1+2} - 1}\right) = (m_1 + 1)T(r, h) + O(1), \\ T(r, h) &= \frac{1}{m_1 + 1}T(r, g) + O(1) = \frac{1}{m_1 + 1}T(r, L) + O(1). \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{m_1+1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{h - r_i}\right) = N(r, L) = S(r, L) \quad (1.10)$$

Từ (1.9) và giả thiết L là một hàm phân hình siêu việt, suy ra h cũng là hàm phân hình siêu việt và $S(r, h) = S(r, g) = S(r, L)$. Khi đó, áp dụng Định lý cơ bản thứ hai đối với $t_1, t_2, \dots, t_{m_1}, r_1, r_2, \dots, r_{m_1+1}$, từ (1.9) và (1.10) ta nhận được:

$$\begin{aligned} 2m_1 T(r, h) &\leq \overline{N}(r, h) + \sum_{i=1}^{m_1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{h - t_i}\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m_1+1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{h - r_i}\right) + S(r, h), \\ \frac{2m_1}{m_1 + 1} T(r, L) &\leq (m_1 + 1)T(r, h) + S(r, L) \\ &= \frac{m_1 + 1}{m_1 + 1} T(r, L) + S(r, L), \\ \frac{2m_1}{m_1 + 1} T(r, L) &\leq T(r, L) + S(r, L), \\ \frac{m_1 - 1}{m_1 + 1} T(r, L) &\leq S(r, L). \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $m_1 \geq 2$. Vậy h là một hằng số. ừ đó, kết hợp với (1.9), suy ra

$$h^{m_1+2} = 1 \quad \text{và} \quad h^{m_1+1} = 1.$$

Do đó $h = 1$ và $L = f$.

Trường hợp 2. $q \geq 6$ và $m_2 \geq 2$, nghĩa là $m_2 \geq 2$ và $m_1 + m_2 \geq 5$. Chú ý rằng điều kiện (F) luôn đúng khi $k = 2$. Mặt khác, $\min\{m_1, m_2\} \geq$

2. Từ đây và áp dụng Bổ đề 1.1.7 với $q_i = m_i, i = 1, \dots, k$, suy ra $P(z)$ là đa thức duy nhất. Kết hợp với $P(f) = P(L)$, ta nhận được $f = L$.

2) $m_1 \geq 2$ nếu $k = 3$.

Nếu $k = 3$ và $m_1 \geq 2$ thì $\max\{m_1, m_2, m_3\} \geq 2$. Áp dụng Bổ đề 1.1.7 với $q_i = m_i, i = 1, \dots, k$ ta có $P(z)$ là đa thức duy nhất và do đó $f = L$.

3) $k \geq 4$.

Áp dụng Bổ đề 1.1.7 với $q_i = m_i, i = 1, \dots, k$ ta có

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} m_i m_j \geq \sum_{i=1}^k m_i$$

luôn đúng nếu $k \geq 4$. Vậy $P(z)$ là đa thức duy nhất và do đó $f = L$ theo Bổ đề 1.1.7.

Định lý 1.2.3 được chứng minh. $\square$

Áp dụng Định lý 1.2.3 ta nhận được Định lý 1.2.4 sau đây.

Định lý 1.2.4. *Cho f là hàm phân hình khác hằng, có hữu hạn cực điểm, L là một L -hàm, $P(z)$ được xác định như trong (1.3) với các điều kiện (1.4), (1.5), (1.6) và cho $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $S = \{z : P(z) = 0\}$. Giả sử $q \geq 2(m_2 + \dots + m_k) + 3$. Khi đó nếu $E_L(S) = E_f(S)$ thì $L = f$.*

Chứng minh. Ta viết

$$P(z) = (z - d_1)^{m_1+1} Q(z) + b, \quad b = P(d_1) \neq 0.$$

Do $P(z)$ là đa thức có bậc q nên $Q(z)$ là đa thức có bậc $q - m_1 - 1$. Khi đó

$$P(L) = (L - d_1)^{m_1+1} Q(L) + b,$$

$$P(f) = (f - d_1)^{m_1+1} Q(f) + b.$$

Trước tiên ta chứng minh:

Khẳng định 1.

- i) $(q-1)T(r, L) + S(r, L) \leq qT(r, f) + S(r, f),$
- ii) $(q-2)T(r, f) + S(r, f) \leq qT(r, L) + S(r, L),$
- iii) $S(r, L) = o(T(r, f))$ và $S(r, f) = o(T(r, L)).$

Chứng minh.

Thật vậy, áp dụng Định lý cơ bản thứ hai cho hàm L và các giá trị $a_1, a_2, \dots, a_q$, ta có:

$$(q-1)T(r, L) \leq \overline{N}(r, L) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-a_i}\right) + S(r, L).$$

Từ đó, kết hợp với $\overline{N}(r, L) = S(r, L)$ và $E_L(S) = E_f(S)$, ta nhận được:

$$\begin{aligned} (q-1)T(r, L) + S(r, L) &\leq \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(r, f) \\ &\leq qT(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Do đó

$$(q-1)T(r, L) + S(r, L) \leq qT(r, f) + S(r, f).$$

Tương tự,

$$(q-1)T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(r, f).$$

Từ đó suy ra

$$(q-1)T(r, f) \leq T(r, f) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-a_i}\right) + S(r, f).$$

Do đó

$$(q-2)T(r, f) + S(r, f) \leq qT(r, L) + S(r, L).$$

Vậy

$$\frac{q-1}{q}T(r, L) + S(r, L) \leq T(r, f) + S(r, f) \leq \frac{q}{q-2}T(r, f) + S(r, f).$$

$$\frac{q-2}{q}T(r, f) + S(r, f) \leq T(r, L) + S(r, L) \leq \frac{q}{q-1}T(r, f) + S(r, f).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{S(r, L)}{\frac{q-1}{q}T(r, L) + S(r, L)} &\geq \frac{S(r, L)}{T(r, f) + S(r, f)} \geq \frac{S(r, L)}{\frac{q}{q-2}T(r, L) + S(r, L)} \\ \frac{S(r, f)}{\frac{q-2}{q}T(r, f) + S(r, f)} &\geq \frac{S(r, f)}{T(r, L) + S(r, L)} \geq \frac{S(r, f)}{\frac{q}{q-1}T(r, f) + S(r, f)}. \end{aligned}$$

Để ý rằng:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, L)}{\frac{q-1}{q}T(r, L) + S(r, L)} &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, L)}{\frac{q}{q-2}T(r, L) + S(r, L)} &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, f)}{\frac{q-2}{q}T(r, f) + S(r, f)} &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, f)}{\frac{q}{q-1}T(r, f) + S(r, f)} &= 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, L)}{T(r, f) + S(r, f)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, f)}{T(r, L) + S(r, L)} = 0.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, L)}{T(r, f)} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, L)}{T(r, f)} \frac{T(r, f) + S(r, f)}{T(r, f) + S(r, f)} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, L)}{T(r, f) + S(r, f)} \frac{T(r, f) + S(r, f)}{T(r, f)} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, L)}{T(r, f) + S(r, f)} \left(1 + \frac{S(r, f)}{T(r, f)} \right). \end{aligned}$$

Từ đó, kết hợp với

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, L)}{T(r, f) + S(r, f)} = 0$$

ta nhận được

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, L)}{T(r, f)} = 0.$$

Tương tự ta có

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, f)}{T(r, L)} = 0.$$

Khẳng định 1 được chứng minh.

Ta ký hiệu $S(r) = S(r, f) + S(r, L)$. Từ Khẳng định 1 ta có $S(r) = S(r, L)$ và $S(r) = S(r, f)$.

Khẳng định 2. $P(L) = hP(f)$, ở đó h là một hàm nhỏ đối với f và L .

Chứng minh.

Từ L và f chia sẻ S CM ta có

$$\frac{P(L)}{P(f)} = \frac{(L - d_1)^{m_1+1}Q(L) + b}{(f - d_1)^{m_1+1}Q(f) + b} = Re^{\varphi(z)}, \quad (1.11)$$

ở đó $R \neq 0$ là một hàm hữu tỷ và $\varphi(z)$ là một hàm nguyên. Khi đó từ Bổ đề 1.1.4 và Bổ đề 1.1.18 ta nhận được

$$\begin{aligned} T(r, P(L)) &= nT(r, L) + O(1), & T(r, P(f)) &= nT(r, f) + O(1), \\ \rho(P(L)) &= \rho(L) = 1, & \rho(P(f)) &= \rho(f) = 1. \end{aligned}$$

ừ đó, kết hợp với (1.11) và theo Bổ đề 1.1.11, để ý rằng $\rho(R) = 0$ từ Ví dụ 1.1.10 i), ta có

$$\begin{aligned} \rho(e^{\varphi(z)}) &= \rho\left(\frac{P(L)}{RP(f)}\right) \leq \max\{\rho(R), \rho(P(f)), \rho(P(L))\} \\ &= \rho(L) = 1, & \varphi(z) &= Az + B, \end{aligned}$$

ở đó A, B là các hằng số. Đặt $h(z) = Re^{\varphi(z)}$. Khi đó

$$T(r, h) \leq T(r, R) + T(r, e^{\varphi(z)}) = \frac{|A|}{\pi}r + O(\log r).$$

Do đó ta nhận được $T(r, h) = O(r)$ và vì vậy $T(r, h) = o(T(r, L))$. Từ đó, kết hợp với điều kiện $T(r, f) = O(T(r, L))$, ta suy ra $T(r, l) = o(T(r, f))$. Vậy h là một hàm nhỏ đối với f và L .

Khẳng định 2 được chứng minh.

Bây giờ ta tiếp tục chứng minh Định lý 1.2.4.

Từ Khẳng định 2 ta suy ra:

$$(L - d_1)^{m_1+1}Q(L) - b(h - 1) = h(f - d_1)^{m_1+1}Q(f). \quad (1.12)$$

Ta sẽ chứng minh $h \equiv 1$. Giả sử $h \not\equiv 1$. Áp dụng Định lý cơ bản thứ hai đối với hàm: $(L - d_1)^{m_1+1}Q(L)$ và các hàm nhỏ $\infty, 0, b(h - 1)$, và chú ý rằng $T(r, f) = T(r, L) + S(r)$, $\overline{N}(r, L) = S(r)$, $N(r, L) = S(r)$ và bậc của $Q(z)$ là $q - m_1 - 1$, $q - m_1 = m_2 + \dots + m_k + 1$, ta nhận được:

$$\begin{aligned} qT(r, L) + O(1) &= T(r, (L - d_1)^{m_1+1}Q(L)) \\ &\leq \overline{N}(r, (L - d_1)^{m_1+1}Q(L)) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{(L - d_1)^{m_1+1}Q(L)}\right) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{(L - d_1)^{m_1+1}Q(L) - b(h - 1)}\right) + S(r) \\ &\leq \overline{N}(r, L) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{L - d_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{Q(L)}\right) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{(f - d_1)^{m_1+1}Q(f)}\right) + S(r) \\ &\leq (q - m_1)T(r, L) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - d_1}\right) \\ &\quad + N\left(r, \frac{1}{Q(f)}\right) + S(r) \\ &\leq (q - m_1)(T(r, f) + T(r, L)) + S(r) \end{aligned}$$

$$\leq 2(m_2 + \cdots + m_k + 1)T(r, L) + S(r).$$

Do đó

$$(q - 2(m_2 + \cdots + m_k) - 2)T(r, L) \leq S(r).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $q \geq 2(m_2 + \cdots + m_k) + 3$.

Vậy $h \equiv 1$ và từ (1.12) ta nhận được

$$(L - d_1)^{m_1+1}Q(L) + b = (f - d_1)^{m_1+1}Q(f) + b,$$

nghĩa là $P(L) = P(f)$. Do $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ta nhận được $L = f$.

Định lý 1.2.4 được chứng minh. $\square$

Từ Định lý 1.2.3 và Định lý 1.2.4 ta nhận được hệ quả sau.

Cho $n, m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Xét đa thức $P_K(z) \in \mathbb{C}[z]$ có dạng sau:

$$P_K(z) = (n+m+1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n+m+1-i} z^{n+m+1-i} a^i \right) + 1 = Q_K(z) + 1, \quad (1.13)$$

trong đó

$$Q_K(z) = (n+m+1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n+m+1-i} z^{n+m+1-i} a^i \right).$$

Giả sử rằng

$$Q_K(a) = (n+m+1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n+m+1-i} \right) a^{n+m+1} \neq -1,$$

nghĩa là

$$P_K(a) \neq 0, \quad (1.14)$$

và giả sử

$$a \neq 0, \quad Q_K(a) \neq -1. \quad (1.15)$$

Khi đó $P'_K(z) = (n + m + 1)z^n(z - a)^m$ và P'_K có một không điểm tại 0 bậc n và một không điểm tại a bậc m . Chú ý rằng $P_K(z)$ có không điểm đơn khi và chỉ khi điều kiện (1.15) xảy ra.

Hệ quả 1.2.5. Cho f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm, L là một L -hàm, và $P_K(z)$ được định nghĩa như trong (1.13) với các điều kiện (1.14) và (1.15), $S_K = \{z : P_K(z) = 0\}$. Khi đó:

- i) Nếu $n \geq 3, m = 1$ thì $P_K(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.
- ii) Nếu $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ và $n \geq m + 2$ thì $L = f$.

Chứng minh. i) Ta có $P'_K(z) = (n + m + 1)z^n(z - a)^m$. Áp dụng Định lý 1.2.3 với $k = 2, n = m_1, m = m_2 = 1, q = n + m + 1$, ta nhận được $P_K(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ nếu $n \geq 3, m = 1$.

ii) Ta kiểm tra giả thiết của Định lý 1.2.4. Ta có $P'_K(z) = (n + m + 1)z^n(z - a)^m$. Khi đó $k = 2, m_1 = n, m_2 = m, q = n + m + 1$. Từ $n \geq m + 2$ ta suy ra $n + m + 1 \geq 2m + 3$, tức là $q \geq 2m_2 + 3$. Áp dụng Định lý 1.2.4, ta nhận được $L = f$ nếu $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ và $n \geq m + 2$. $\square$

Chú ý 1.2.6. i) Hệ quả 1.2.5 ii) chính là Định lý 2 của H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương [34]. Vậy Định lý 1.2.4 là một mở rộng của Định lý 2 [34].

ii) Định lý 5 của Q.-Q. Yuan, X.-M. Li và H.-X. Yi [70] đưa ra một lớp các tập duy nhất của L -hàm chia sẻ tập hợp với 7 phần tử với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm. Hệ quả 1.2.5 ii) đưa ra một lớp các tập duy nhất của L -hàm chia sẻ tập hợp với 5 phần tử với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm. Vậy Định lý 1.2.4 là một cải tiến của Định lý 5 [70].

Ví dụ 1.2.7. Cho đa thức $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ có dạng:

$$P(z) = 4z^5 - 5z^4 + 2 = Q(z) + 1,$$

ở đó $Q(z) = 4z^5 - 5z^4 + 1$.

$$\text{Ký hiệu } S = \{z : P(z) = 0\}. \quad (1.16)$$

Khi đó:

- i) $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.
- ii) $P(z)$ không là đa thức duy nhất cho các hàm phân hình.
- iii) $L = f$ nếu $E_L(S) = E_f(S)$, ở đó f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm, L là một L -hàm.

Chứng minh. i) Thật vậy, từ $P(z) = 4z^5 - 5z^4 + 2$ ta có $P'(z) = 20z^3(z - 1)$. Từ đó, ta thấy $P'(z)$ có không điểm $d_1 = 0$ (với bội $m_1 = 3$) và $d_2 = 1$ (với bội $m_2 = 1$). Đa thức có bậc $q = 5$. Ta kiểm tra thấy $P(0) = 2 \neq 0$ và $P(1) = 1 \neq 0$. Vì $k = 2$, $q = 5 \geq 4$ và $m_2 = 1$, áp dụng trực tiếp Định lý 1.2.3, ta nhận được $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

ii) Giả sử $P(z)$ là đa thức duy nhất cho các hàm phân hình. Khi đó, áp dụng Bổ đề 1.1.7 tới $P(z)$ với $k = 2$, $m_1 = 3, m_2 = 1$ suy ra $\min\{3, 1\} = 1 \not\geq 2$. Đây là một mâu thuẫn. Vậy $P(z)$ không là đa thức duy nhất cho các hàm phân hình.

iii) Ta có $k = 2$, $m_2 = 1$ và $q = 5$. Vì $q \geq 2m_2 + 3$, áp dụng Định lý 1.2.4, ta nhận được $L = f$. $\square$

1.3 Sự phụ thuộc tuyến tính đối với L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm chia sẻ các tập hữu hạn

Xét các đa thức $P(z)$ và $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ bậc n có dạng sau:

$$P(z) = az^n + bz^{n-m} + c, \quad \text{với } a, b, c \neq 0, \quad (1.17)$$

$$Q(z) = uz^n + vz^{n-m} + t, \quad \text{với } u, v, t \neq 0. \quad (1.18)$$

Giả sử

$$\frac{a^{n-m}c^m}{b^n} \neq \frac{(-1)^n(n-m)^{n-m}m^m}{n^n}, \quad (1.19)$$

$$\frac{u^{n-m}t^m}{v^n} \neq \frac{(-1)^n(n-m)^{n-m}m^m}{n^n}. \quad (1.20)$$

Chú ý rằng, đa thức $P(z)$ (tương ứng $Q(z)$) có n không điểm đơn phân biệt nếu và chỉ nếu điều kiện (1.19) (tương ứng (1.20)) được thỏa mãn (xem [39], Bổ đề 2.7, trang 151).

Định lý 1.3.1. *Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $n \geq 2m + 3$, $P(z), Q(z)$ là các đa thức dạng (1.17) và (1.18) với điều kiện (1.19) và (1.20) và cho S, T lần lượt là các tập không điểm của $P(z), Q(z)$. Giả sử f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và L là một L -hàm. Khi đó ta có:*

1) $E_L(S) = E_f(T)$ nếu và chỉ nếu $f = hL$ và $hS = T$, với h là hằng số khác không thỏa mãn $h^n = \frac{at}{cu}$ và $h^m = \frac{av}{ub}$.

2) $E_{L_1}(S) = E_{L_2}(T)$ nếu và chỉ nếu $L_1 = L_2$, $\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{t}$ và $S = T$, trong đó L_1, L_2 là các L -hàm.

Chứng minh. Ta chứng minh 1). Nhắc lại rằng

$$P(z) = az^n + bz^{n-m} + c, \quad Q(z) = uz^n + vz^{n-m} + t,$$

với $a, b, c, u, v, t \neq 0$. Khi đó, ta có

$$P(z) = a(z - a_1) \cdots (z - a_n), \quad P(L) = a(L - a_1) \cdots (L - a_n), \quad (1.21)$$

$$Q(z) = u(z - b_1) \cdots (z - b_n), \quad Q(f) = u(f - b_1) \cdots (f - b_n). \quad (1.22)$$

Điều kiện cần. Giả sử $n \geq 2m + 3$ và $E_L(S) = E_f(T)$.

Chú ý rằng, $T(r, P(L)) = nT(r, L) + O(1)$, $T(r, Q(f)) = nT(r, f) + O(1)$ theo Bổ đề 1.1.4. Từ đây và dùng lý luận tương tự như Khẳng định 1 của Định lý 1.2.4 ta có:

Khẳng định 1.

- i) $(n-1)T(r, L) + S(r, L) \leq nT(r, f) + S(r, f),$
- ii) $(n-1)T(r, f) + S(r, f) \leq nT(r, L) + S(r, L),$
- iii) $S(r, L) = o(T(r, f))$ và $S(r, f) = o(T(r, L)).$

Viết

$$P(z) = z^{n-m}R(z) + c, \quad Q(z) = z^{n-m}R_1(z) + t,$$

trong đó $R(z) = az^m + b$, $R_1(z) = uz^m + v$ là các đa thức bậc m . Từ Bổ đề 1.1.4 và Bổ đề 1.1.18 ta nhận được

$$\begin{aligned} T(r, P(L)) &= nT(r, L) + O(1), \quad T(r, Q(f)) = nT(r, f) + O(1), \\ \rho(P(L)) &= \rho(L) = 1, \quad \rho(Q(f)) = \rho(f) = 1. \end{aligned}$$

Vì $E_L(S) = E_f(T)$ và f có hữu hạn cực điểm nên áp dụng Bổ đề 1.1.9 ta có

$$\frac{Q(f)}{P(L)} = \frac{f^{n-m}R_1(f) + t}{L^{n-m}R(L) + c} = R_2e^{\varphi(z)}, \quad (1.23)$$

trong đó $R_2 \not\equiv 0$ là một hàm hữu tỷ và $\varphi(z)$ là một hàm nguyên. Từ đây và (1.23), theo Bổ đề 1.1.11, và để ý rằng $\rho(R_2) = 0$ từ Ví dụ 1.1.10 i), ta có

$$\begin{aligned} \rho(e^{\varphi(z)}) &= \rho\left(\frac{Q(f)}{R_2P(L)}\right) \leq \max\{\rho(R_2), \rho(Q(f)), \rho(P(L))\} \\ &= \rho(L) = 1, \quad \varphi(z) = Az + B, \end{aligned}$$

với A, B là các hằng số. Đặt

$$l(z) = R_2e^{\varphi(z)}. \quad (1.24)$$

Khẳng định 2. $l(z) = \frac{t}{c}.$

Chứng minh. Từ (1.24) dẫn đến

$$T(r, l) \leq T(r, R_2) + T(r, e^{\varphi}) = \frac{|A|}{\pi}r + O(\log r).$$

Do đó ta nhận được $T(r, l) = O(r)$ và vì vậy $T(r, l) = o(T(r, L))$. Từ đó, kết hợp với điều kiện $T(r, f) = O(T(r, L))$, ta suy ra $T(r, l) = o(T(r, f))$. Vậy l là một hàm nhỏ đối với f và L .

Đặt $S(r) = S(r, f) + S(r, L)$. Từ Khẳng định 1 iii), ta có $S(r) = S(r, f)$ và $S(r) = S(r, L)$. Từ đó, kết hợp với (1.23), ta có

$$\begin{aligned} Q(f) &= uf^n + vf^{n-m} + t = lP(L) = l(aL^n + bL^{n-m} + c), \\ T(r, l) &= S(r), \quad T(r, Q(f)) = nT(r, f) + O(1) = nT(r, L) + S(r). \end{aligned}$$

Vậy

$$T(r, f) + S(r) = T(r, L) + S(r), \quad (1.25)$$

$$f^{n-m}(uf^m + v) - (lc - t) = lL^{n-m}(aL^m + b). \quad (1.26)$$

Giả sử $l \neq \frac{t}{c}$. Khi đó $lc - t \neq 0$ và $lc - t$ là một hàm nhỏ đối với f và L . Áp dụng Định lý cơ bản thứ nhất và Định lý cơ bản thứ hai với mục tiêu di động đối với hàm $f^{n-m}(uf^m + v)$ và các giá trị $0, lc - t$. Đồng thời, kết hợp các hệ thức $N(r, L) = S(r)$, $N(r, f) = S(r)$ cùng với Khẳng định 1 và các phương trình (1.25), (1.26), ta nhận được:

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{l}\right) &\leq T(r, l) + O(1) = S(r), \\ nT(r, f) + O(1) &= T(r, f^{n-m}R_1(f)) \\ &\leq \overline{N}(r, f^{n-m}R_1(f)) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{n-m}R_1(f)}\right) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{n-m}R_1(f) - (lc - t)}\right) + S(r) \\ &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{R_1(f)}\right) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{l}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{L^{n-m}R(L)}\right) + S(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1+m)T(r, f) + \overline{N}(r, L) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{L}\right) \\
&\quad + N\left(r, \frac{1}{R(L)}\right) + S(r) \\
&\leq (1+m)(T(r, f) + T(r, L)) + S(r) \\
&\leq (2m+2)T(r, f) + S(r).
\end{aligned}$$

Do đó

$$(n-2m-2)T(r, f) \leq S(r).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $n \geq 2m+3$. Vậy $l \equiv \frac{t}{c}$ và

$$f^{n-m}R_1(f) = \frac{t}{c}L^{n-m}R(L), \quad uf^n + vf^{n-m} = \frac{t}{c}(aL^n + bL^{n-m}). \quad (1.27)$$

Để đơn giản, đặt $h = \frac{f}{L}$, và $\alpha = \frac{at}{cu} \neq 0$; $\beta = \frac{bt}{vc} \neq 0$. Khi đó ta nhận được từ (1.27)

$$\begin{aligned}
uL^m \left(h^n - \frac{at}{cu} \right) &= -v \left(h^{n-m} - \frac{bt}{vc} \right), \\
L^m(h^n - \alpha) &= -\frac{v}{u}(h^{n-m} - \beta), \\
L^m &= -\frac{v}{u} \frac{h^{n-m} - \beta}{h^n - \alpha}. \quad (1.28)
\end{aligned}$$

Khẳng định 3. h là một hằng số.

Giả sử ngược lại, h không là hằng số. Xét các trường hợp có thể sau:

Trường hợp 1. Các đa thức $z^n - \alpha$ và $z^{n-m} - \beta$ không có không điểm chung.

Khi đó phương trình $z^n - \alpha = 0$ có n nghiệm đơn phân biệt $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, và phương trình $z^{n-m} - \beta = 0$ có $n-m$ nghiệm đơn phân biệt $\beta_1, \dots, \beta_{n-m}$ sao cho $\beta_i \neq \alpha_j$.

Viết

$$\begin{aligned}
z^n - \alpha &= (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n), \\
z^{n-m} - \beta &= (z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdots (z - \beta_{n-m}),
\end{aligned}$$

$$h^n - \alpha = (h - \alpha_1)(h - \alpha_2) \cdots (h - \alpha_n),$$

$$h^{n-m} - \beta = (h - \beta_1)(h - \beta_2) \cdots (h - \beta_{n-m}).$$

Áp dụng hai định lý cơ bản cho hàm h và các giá trị $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-m}$, và chú ý rằng

$$mT(r, L) + O(1) = T(r, L^m) = T(r, h^n) = nT(r, h) + O(1),$$

$$S(r) = S(h, r) = N(r, L), \quad \sum_{i=1}^n \overline{N} \left(r, \frac{1}{h - \alpha_i} \right) \leq N(r, L) = S(r),$$

ta nhận được

$$(2n - m - 2)T(r, h) \leq \sum_{i=1}^n \overline{N} \left(r, \frac{1}{h - \alpha_i} \right) + \sum_{i=1}^{n-m} \overline{N} \left(r, \frac{1}{h - \beta_i} \right) + S(h, r),$$

$$(2n - m - 2)T(r, h) \leq (n - m)T(r, h) + S(h, r),$$

$$(n - 2)T(r, h) \leq S(h, r).$$

Đây là một mâu thuẫn với giả thiết $n \geq 2m + 3$.

Trường hợp 2. Các đa thức $z^n - \alpha$ và $z^{n-m} - \beta$ có không điểm chung.

Cho z_0 là một không điểm chung của $z^n - \alpha$ và $z^{n-m} - \beta$, khi đó ta có $z_0^n = \alpha$ và $z_0^{n-m} = \beta$. Từ đó, kết hợp với (1.28), ta nhận được

$$\frac{z^{n-m} - \beta}{z^n - \alpha} = \frac{\beta \left(\frac{z}{z_0} \right)^{n-m} - 1}{\alpha \left(\frac{z}{z_0} \right)^n - 1},$$

$$\frac{h^{n-m} - \beta}{h^n - \alpha} = \frac{\beta \left(\frac{h}{z_0} \right)^{n-m} - 1}{\alpha \left(\frac{h}{z_0} \right)^n - 1},$$

$$L^m = -\frac{\beta v \left(\frac{h}{z_0} \right)^{n-m} - 1}{\alpha u \left(\frac{h}{z_0} \right)^n - 1} = -\frac{\beta v H^{n-m} - 1}{\alpha u H^n - 1}, \quad (1.29)$$

ở đó $H = \frac{h}{z_0}$.

Từ giả thiết h không là hằng số nên ta thấy rằng H không là hằng số. Đặt $\gcd(n, m) = t$, ta có $t \leq m$ và các đa thức $z^n - 1$ và $z^{n-m} - 1$ có t không điểm chung. Khi đó, các nghiệm của $z^{n-m} - 1 = 0$ là khác các nghiệm của $z^n - 1 = 0$, trừ ra t không điểm chung. Vậy phương trình $z^{n-m} - 1 = 0$ có $n - m - t$ nghiệm đơn phân biệt $\beta_1, \dots, \beta_{n-m-t}$, và phương trình $z^n - 1 = 0$ có $n - t$ nghiệm đơn phân biệt $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-t}$ sao cho $\beta_i \neq \alpha_j$.

Từ (1.29) và theo lý luận tương tự như trong chứng minh của Trường hợp 1 và chú ý rằng $S(H, r) = S(h, r) = S(r)$, ta nhận được

$$\begin{aligned} (2n - m - 2t - 2)T(r, H) &\leq \sum_{i=1}^{n-t} \overline{N} \left(r, \frac{1}{H - \alpha_i} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-m-t} \overline{N} \left(r, \frac{1}{H - \beta_i} \right) + S(H, r), \\ (2n - m - 2t - 2)T(r, H) &\leq (n - m - t)T(r, H) + S(H, r), \\ (n - t - 2)T(r, H) &\leq S(H, r). \end{aligned}$$

Đây là một mâu thuẫn với giả thiết $n \geq 2m + 3$.

Do đó từ Trường hợp 1 và Trường hợp 2 ta nhận được h là một hằng số. Khẳng định 3 được chứng minh.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} l(aL^n + bL^{n-m} + c) &= uf^n + vf^{n-m} + t, \quad l = \frac{t}{c}, \\ alL^n + blL^{n-m} + cl &= uh^nL^n + vh^{n-m}L^{n-m} + t. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Từ phương trình (1.30) ta nhận được

$$l = \frac{t}{c}, \quad h^n = \frac{al}{u} = \frac{at}{cu}, \quad h^{n-m} = \frac{bl}{v} = \frac{bt}{cv}.$$

Do đó

$$h^n = \frac{at}{cu}, \quad h^m = \frac{h^n}{h^{n-m}} = \frac{av}{ub}.$$

Bây giờ ta chứng minh $hS = T$. Với mỗi $a_i \in S$ ($i = 1, \dots, n$), theo Bổ đề 1.1.16, tồn tại $z_0 \in \mathbb{C}$ sao cho $L(z_0) - a_i = 0$. Hơn nữa, từ $lP(L) = Q(f)$ và (1.21), (1.22), ta nhận được

$$\begin{aligned} P(L) &= a(L - a_1) \cdots (L - a_n), \\ Q(f) &= u(f - b_1) \cdots (f - b_n); \\ la(L - a_1) \cdots (L - a_n) &= u(f - b_1) \cdots (f - b_n). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Từ (1.31) ta thấy rằng: $L(z_0) - a_i = 0$ nếu và chỉ nếu z_0 là một không điểm của $P(L)$ và $L(z_0) - a_j \neq 0$ với $i \neq j$, do đó, tồn tại duy nhất một $b_k \in \{b_1, \dots, b_n\}$ sao cho $f(z_0) - b_k = 0$. Vì $f = hL$, ta có $hL(z_0) - b_k = 0$, và do đó $ha_i = b_k$. Từ đó, kết hợp với việc số lượng phần tử của S và T đều bằng n , ta suy ra $hS = T$.

Điều kiện đủ. Ta có:

$$\begin{aligned} P(L) &= aL^n + bL^{n-m} + c, \quad Q(f) = uf^n + vf^{n-m} + t, \\ f &= hL, \quad h^n = \frac{at}{cu}, \quad h^m = \frac{av}{ub}, \\ Q(f) &= uh^nL^n + vh^{n-m}L^{n-m} + t. \end{aligned}$$

Do đó,

$$tP(L) = cQ(f)$$

và

$$at(L - a_1) \cdots (L - a_n) = cu(f - b_1) \cdots (f - b_n).$$

Từ đó suy ra $E_L(S) = E_f(T)$.

Ta chứng minh 2).

Điều kiện cần. Ta có: $E_{L_1}(S) = E_{L_2}(T)$. Khi đó, theo i) ta nhận được: $L_2 = hL_1$ và $hS = T$, trong đó h là một hằng số khác 0 thỏa mãn $h^n = \frac{at}{cu}$, $h^m = \frac{av}{ub}$. Theo Bổ đề 1.1.17, ta nhận được $L_1 = L_2$, và khi đó $h = 1$, $\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{t}$, và $S = T$.

Điều kiện đủ. Bằng lập luận tương tự như trong phần chứng minh của i), ta suy ra điều kiện đủ của ii).

Định lý 1.3.1 được chứng minh. $\square$

Áp dụng Định lý 1.3.1 ta có định lý sau:

Định lý 1.3.2. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $\gcd(n, m) = 1$ và $n \geq 2m + 3$, cho $P(z)$ là đa thức dạng (1.17) với điều kiện (1.19), và cho S là tập hợp các không điểm của $P(z)$. Giả sử L là một L -hàm và f là một hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm thỏa mãn $E_L(S) = E_f(S)$. Khi đó $f = L$.

Chứng minh. Thật vậy, áp dụng Định lý 1.3.1 với $P(z) = Q(z)$, $S = T$, ta nhận được: $f = hL$ và $hS = S$, ở đó h là hằng số khác 0 thỏa mãn $h^n = \frac{at}{cu} = 1$, $h^m = \frac{av}{ub} = 1$. Vì $\gcd(n, m) = 1$ ta nhận được $h = 1$. Vậy $f = L$. $\square$

Cho một L -hàm L và f một hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm, S, T lần lượt là tập hợp các không điểm của các đa thức $P(z)$ và $Q(z)$. Các ví dụ sau là áp dụng của Định lý 1.3.1.

Ví dụ 1.3.3. Cho

$$\begin{aligned} P(z) &= z^5 - \frac{5}{4}z^4 + 1, & S &= \{a_1, \dots, a_5\}, \\ Q(z) &= z^5 - \frac{5}{2}z^4 + 2^5, & T &= \{b_1, \dots, b_5\}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$E_L(S) = E_f(T) \text{ nếu và chỉ nếu } f = 2L, \quad 2S = T.$$

Chứng minh. Điều kiện cần. Ta kiểm tra các điều kiện (1.19), (1.20). Ta có

$$a = u = 1, b = -\frac{5}{4}, c = 1, v = -\frac{5}{2}, t = 2^5, \\ -\frac{4^5}{5^5} \neq -\frac{4^4}{5^5}, \quad 5 = 2 \cdot 1 + 3.$$

Áp dụng Định lý 1.3.1 với $n = 5$, $m = 1$, $a = u = 1$, $b = -\frac{5}{4}$, $c = 1$, $v = -\frac{5}{2}$, $t = 2^5$, ta nhận được:

$$f = 2L, \quad 2S = T, \quad \text{ở đó } 2^5 = \frac{at}{cu} = 2^5, \quad \frac{av}{ub} = 2.$$

Điều kiện đủ. Giả sử $f = 2L$ và $2S = T$. Chú ý rằng $\frac{at}{cu} = 2^5$ và $\frac{av}{ub} = 2$, khi đó do

$$Q(f) = f^5 - \frac{5}{2}f^4 + 2^5 = 2^5 \left(L^5 - \frac{5}{4}L^4 + 1 \right) = 2^5 P(L),$$

ta nhận được

$$2^5(L - a_1) \cdots (L - a_5) = (f - b_1) \cdots (f - b_5). \quad \square$$

Ví dụ 1.3.4. Cho

$$P(z) = z^5 - \frac{5}{4}z^4 + 1.$$

Khi đó

$$E_L(S) = E_f(S) \quad \text{nếu và chỉ nếu } f = L.$$

Chứng minh. Điều kiện cần. Ta có $P(z)$ có 5 không điểm đơn phân biệt. Áp dụng Định lý 1.3.2 với $n = 5$, $m = 1$, và chú ý rằng $\gcd(5, 1) = 1$, ta nhận được $f = L$.

Điều kiện đủ. Giả sử $f = L$. Do

$$P(f) = f^5 - \frac{5}{4}f^4 + 1 = L^5 - \frac{5}{4}L^4 + 1 = P(L),$$

ta nhận được

$$(L - a_1) \cdots (L - a_5) = (f - b_1) \cdots (f - b_5).$$

Từ đó suy ra $E_L(S) = E_f(S)$.

□

Kết luận Chương 1

Trong Chương 1, luận án đã thực hiện một số nội dung sau:

1. Tổng hợp lý thuyết về các hàm Nevanlinna, một số tính chất và các dạng định lý cơ bản cho hàm phân hình, cùng với các khái niệm và tính chất cơ bản về L -hàm thuộc lớp Selberg làm công cụ nghiên cứu cho các chương tiếp theo.

2. Phát biểu và chứng minh một điều kiện đủ để một đa thức là đa thức duy nhất (**Định lý 1.2.3**) trên các L -hàm và hàm phân hình. Phát biểu và chứng minh điều kiện đủ để tập hợp các không điểm của đa thức duy nhất trên các L -hàm và hàm phân hình là tập duy nhất đối với L -hàm chia sẻ tập hợp hữu hạn với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm (**Định lý 1.2.4**). Từ đó, xác lập được một lớp các tập duy nhất gồm 5 phần tử đối với L -hàm chia sẻ tập hợp hữu hạn với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm (**Hệ quả 1.2.5**).

3. Phát biểu và chứng minh điều kiện cần và đủ để một hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm và một L -hàm phụ thuộc tuyến tính khi chúng chia sẻ hai lớp của các tập hợp hữu hạn (**Định lý 1.3.1**). Trên cơ sở đó, đưa ra kết quả về một lớp các tập duy nhất đối với L -hàm chia sẻ tập hợp gồm 5 phần tử với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm (**Định lý 1.3.2**).

Chương 2

Vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình

2.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Định nghĩa 2.1.1. Cho f là một hàm phân hình khác hằng và k, d là các số nguyên dương. Ta ký hiệu $\overline{N}_{(k)}(r, f)$, $\overline{N}_k(r, f)$ lần lượt là hàm đếm các cực điểm có bội $\geq k$ và bội $\leq k$ của f , ở đó mỗi cực điểm được tính một lần. Ta ký hiệu $\overline{N}_{(k)}\left(r, \frac{1}{f}\right)$, $\overline{N}_k\left(r, \frac{1}{f}\right)$ lần lượt là hàm đếm các không điểm có bội $\geq k$ và bội $\leq k$ của f , ở đó mỗi không điểm được tính một lần.

Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, ký hiệu $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}; g \neq 0\right)$ là hàm đếm tại các không điểm của f mà không phải là không điểm của g , ở đó mỗi điểm được tính một lần.

Bổ đề 2.1.2 ([31], Bổ đề 2.3, trang 128). Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng sao cho $E_f(0) = E_g(0)$. Đặt

$$F = \frac{1}{f}, \quad G = \frac{1}{g}, \quad H = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}.$$

Giả sử $H \not\equiv 0$. Khi đó

$$N(r, H) \leq \overline{N}_{(2)}(r, f) + \overline{N}_{(2)}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}; f \neq 0\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}; g \neq 0\right).$$

Hơn nữa, nếu a là không điểm đơn chung của f và g thì $H(a) = 0$.

Bổ đề 2.1.3 ([16], Mệnh đề 7.1, trang 1200). Cho $P(z)$ là một đa thức có bậc $q \geq 5$, được xác định như trong (1.3) với các điều kiện (1.4) và (F) được thiết lập ở Chương 1. Giả sử tồn tại hai hàm phân hình khác hằng f và g sao cho:

$$\frac{1}{P(f)} = \frac{c_0}{P(g)} + c_1$$

đối với hai hằng số $c_0 \neq 0$ và c_1 .

Nếu $k \geq 3$ hoặc nếu $k = 2$, $\min\{m_1, m_2\} \geq 2$ thì $c_1 = 0$.

Bổ đề 2.1.4. Cho f hàm phân hình khác hằng. Khi đó

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{2}\overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{2}\overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) &= \frac{1}{2}\left(\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \right. \\ &\quad \left. + \overline{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{N}_{(1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}_{(2)}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right). \end{aligned}$$

□

Bổ đề 2.1.5 ([44], Bổ đề 2.7, trang 591). Cho $a, b, c, u, v, t \neq 0$, n, m là hai số nguyên dương, sử dụng các đa thức $P(z), Q(z)$ có dạng (1.17) và (1.18) ở Chương 1. Giả sử tồn tại hai hàm phân hình khác hằng f và g sao cho:

$$\frac{1}{P(f)} = \frac{c_0}{Q(g)} + c_1$$

đối với hai hằng số $c_0 \neq 0$ và c_1 .

Nếu $n > 2m + 3$, $\gcd(n, m) = 1$ hoặc $m > 3$ thì $c_1 = 0$.

2.2 Phân bố giá trị và tập xác định duy nhất đối với L -hàm chia sẻ tập hữu hạn với hàm phân hình

Trước tiên, ta chứng minh định lý sau.

Định lý 2.2.1. Cho $P(z)$ là một đa thức có bậc $q \geq 4$, được xác định như trong (1.3) với các điều kiện (1.4), (1.5), (1.6) ở Chương 1. Giả sử $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

1) $P(d_i)P(d_j) \neq P(d_1)^2$ với mọi $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ và $m_1 \geq 2$.

2) $m_1 \geq m_2 + 2$.

Khi đó $P(z)$ là một đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Chứng minh. Giả sử $P(L) = cP(f)$, trong đó $c \neq 0$ và $(L, f) \in \mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Đặt $Q(z) = a(z - b_1) \cdots (z - b_{q-m_1-1})$. Chú ý rằng

$$P(z) = a(z - d_1)^{m_1+1}(z - b_1) \cdots (z - b_{q-m_1-1}) + b$$

và

$$P(z) = a(z - a_1) \cdots (z - a_q), \quad (2.1)$$

trong đó $a \neq 0$, $b = P(d_1) \neq 0$, $b_i \neq b_j$, $d_1 \neq b_i$, $a_i \neq a_j$.

Khi đó, từ (2.1) và $P(L) = cP(f)$, suy ra

$$P(z) = (z - d_1)^{m_1+1}Q(z) + b, \quad b \neq 0. \quad (2.2)$$

Vì vậy,

$$a(L - d_1)^{m_1+1}(L - b_1) \cdots (L - b_{q-m_1-1}) = (L - d_1)^{m_1+1}Q(L)$$

$$\begin{aligned}
&= cP(f) - b \\
&= c \left[(f - d_1)^{m_1+1} Q(f) + b \right] - b \\
&= c \left[(f - d_1)^{m_1+1} Q(f) - \frac{b(1-c)}{c} \right].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Xét đa thức $R(z) \in \mathbb{C}[z]$ bậc q xác định bởi:

$$R(z) = (z - d_1)^{m_1+1} Q(z) - b \frac{1-c}{c}. \tag{2.4}$$

1) $P(d_i)P(d_j) \neq b^2$ với mọi $i, j \in \{2, \dots, k\}$ và $m_1 \geq 2$.

Trường hợp 1. $c \neq 1$.

Khả năng 1. $R(z)$ chỉ có không điểm đơn.

Khi đó ta viết $R(z)$ dưới dạng:

$$R(z) = A(z - c_1)(z - c_2) \cdots (z - c_q). \tag{2.5}$$

Kết hợp (2.3) và (2.5), ta nhận được

$$(L - d_1)^{m_1+1} (L - b_1) \cdots (L - b_{q-m_1-1}) = Ac(f - c_1)(f - c_2) \cdots (f - c_q). \tag{2.6}$$

Áp dụng Định lý cơ bản thứ hai cho f và các giá trị $d_1, l_1, \dots, l_{q-m_1-1}$ và chú ý rằng

$$\begin{aligned}
T(r, f) &= T(r, L) + O(1), & S(r, f) &= S(r, L), \\
\overline{N}(r, L) &= S(r, L), & \overline{N}(r, f) &= S(r, L),
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
&\overline{N} \left(r, \frac{1}{L - d_1} \right) + \sum_{j=1}^{q-m_1-1} \overline{N} \left(r, \frac{1}{L - b_j} \right) \\
&= \overline{N} \left(r, \frac{1}{f - d_1} \right) + \sum_{j=1}^{q-m_1-1} \overline{N} \left(r, \frac{1}{f - l_j} \right),
\end{aligned}$$

ta nhận được

$$\begin{aligned}
(q - m_1 - 1)T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - d_1}\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{q-m_1-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - l_j}\right) + S(r, f) \\
&= \overline{N}\left(r, \frac{1}{L - d_1}\right) + \sum_{j=1}^{q-m_1-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{L - b_j}\right) + S(r, L).
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\overline{N}\left(r, \frac{1}{L - d_1}\right) &\leq T(r, L) + S(r, L), \\
\sum_{i=1}^{q-m_1-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{L - b_i}\right) &\leq (q - m_1 - 1)T(r, L) + S(r, L).
\end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$(q - 1)T(r, L) \leq (q - m_1)T(r, L) + S(r, L),$$

$$(m_1 - 1)T(r, L) \leq S(r, L).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $m_1 \geq 2$.

Khả năng 2. $R(z)$ có không điểm với bội lớn hơn hoặc bằng 2.

Do $c \neq 1$, $b \neq 0$ và kết hợp với (2.4), ta nhận được

$$R(z) = (z - d_1)^{m_1+1}Q(z) - b\frac{1-c}{c} = P(z) - \frac{b}{c}, \quad R(d_1) \neq 0.$$

Từ đó ta có

$$R(d_j) = P(d_j) - \frac{b}{c}, \quad j = 2, \dots, k.$$

Hơn nữa, từ

$$R'(z) = P'(z) = a(z - d_1)^{m_1}(z - d_2)^{m_2} \cdots (z - d_i)^{m_i} \cdots (z - d_k)^{m_k}$$

và $P(z)$ thỏa mãn điều kiện (F), ta thấy rằng:

Nếu $R(z)$ có không điểm với bội ≥ 2 thì tồn tại duy nhất một không điểm d_i , với $i \in \{2, \dots, k\}$, có bội ≥ 2 . Do đó

$$P(d_i) - \frac{b}{c} = 0, \quad P(d_i) = \frac{b}{c}, \quad c = \frac{b}{P(d_i)}. \quad (2.7)$$

Mặt khác, từ $P(L) = cP(f)$, ta thấy được

$$\begin{aligned} P(L) - bc &= (L - d_1)^{m_1+1}Q(L) - b(c-1) \\ &= c(f - d_1)^{m_1+1}Q(f) \\ &= ca(f - d_1)^{m_1+1}(f - b_1) \cdots (f - b_{q-m_1-1}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Từ (2.8), ta xét đa thức bậc q :

$$T(z) = P(z) - bc = (z - d_1)^{m_1+1}Q(z) - b(c-1). \quad (2.9)$$

Bây giờ ta chứng minh $T(z)$ chỉ có không điểm đơn. Thật vậy, giả sử $T(z)$ có không điểm bội lớn hơn hoặc bằng 2. Do $c \neq 1$, $b \neq 0$, kết hợp với (2.9), ta nhận được $T(d_1) = -b(c-1) \neq 0$. Hơn nữa, từ

$$T'(z) = P'(z) = aq(z - d_1)^{m_1}(z - d_2)^{m_2} \cdots (z - d_j)^{m_j} \cdots (z - d_k)^{m_k}$$

và $P(z)$ thỏa mãn điều kiện (F), ta thấy rằng:

Nếu $T(z)$ có không điểm với bội lớn hơn hoặc bằng 2 thì tồn tại duy nhất một không điểm d_j , với $j \in \{2, \dots, k\}$, có bội ≥ 2 . Do đó

$$P(d_j) - bc = 0, \quad c = \frac{P(d_j)}{b}. \quad (2.10)$$

Kết hợp (2.7) và (2.10), ta có:

$$c = \frac{b}{P(d_i)} = \frac{P(d_j)}{b}, \quad \text{ở đó } d_i, d_j \in \{d_2, \dots, d_k\}.$$

Từ đó suy ra $P(d_i)P(d_j) = b^2$ với $i, j \in \{2, \dots, k\}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $P(d_i)P(d_j) \neq b^2$ với mọi $i, j \in \{2, \dots, k\}$. Vậy $T(z)$ chỉ có

không điểm đơn. Khi đó ta có thể viết $T(z)$ dưới dạng

$$T(z) = aq(z - t_1)(z - t_2) \cdots (z - t_q).$$

Từ đó, kết hợp với (2.8), ta nhận được

$$(L - t_1)(L - t_2) \cdots (L - t_q) = c(f - d_1)^{m_1+1}(f - b_1) \cdots (f - b_{q-m_1-1}). \quad (2.11)$$

Để ý rằng hệ thức (2.11) tương tự như hệ thức (2.6), và bằng lập luận tương tự như trong (2.6) ta nhận được mâu thuẫn từ $m_1 \geq 2$.

Trường hợp 2. $c = 1$. Khi đó ta có $P(L) = P(f)$. Vì $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ nên ta có $L = f$.

2) $m_1 \geq m_2 + 2$.

Xét các trường hợp có thể sau:

Trường hợp 1. $c \neq 1$.

Khả năng 1. $R(z)$ chỉ có không điểm đơn.

Bằng lập luận tương tự như Khả năng 1 trong 1), ta nhận được một mâu thuẫn $m_1 \geq m_2 + 2 > 2$.

Khả năng 2. $R(z)$ có không điểm với bội lớn hơn hoặc bằng 2.

Bằng lập luận tương tự như trong Khả năng 2 của Trường hợp 1 trong 1), ta nhận được:

Nếu $R(z)$ có không điểm với bội ≥ 2 thì tồn tại duy nhất một không điểm d_i , với $i \in \{2, \dots, k\}$, có bội ≥ 2 .

Khi đó ta viết $R(z)$ dưới dạng

$$R(z) = a(z - d_i)^{m_i+1}(z - l_1) \cdots (z - l_{q-m_i-1}), \quad m_1 \neq m_i. \quad (2.12)$$

Kết hợp (2.3) và (2.12) ta nhận được

$$(L - d_1)^{m_1+1}(L - b_1) \cdots (L - b_{q-m_1-1}) = c(f - d_i)^{m_i+1}(f - l_1) \cdots (f - l_{q-m_i-1}).$$

Áp dụng Định lý cơ bản thứ hai cho f và các giá trị $d_i, l_1, \dots, l_{q-m_i-1}$ và

chú ý rằng:

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T(r, L) + O(1), \quad S(r, f) = S(r, L), \\ \overline{N}(r, L) &= S(r, L), \quad \overline{N}(r, f) = S(r, L), \end{aligned}$$

và hệ thức

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-d_1}\right) &+ \sum_{j=1}^{q-m_1-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-b_j}\right) \\ &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-d_i}\right) + \sum_{j=1}^{q-m_i-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-l_j}\right), \end{aligned}$$

ta nhận được

$$\begin{aligned} (q-m_i-1)T(r, f) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-d_i}\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{q-m_i-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-l_j}\right) + S(r, f) \\ &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-d_1}\right) + \sum_{j=1}^{q-m_1-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-b_j}\right) + S(r, L). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-d_1}\right) &\leq T(r, L) + S(r, L), \\ \sum_{j=1}^{q-m_1-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-b_j}\right) &\leq (q-m_1-1)T(r, L) + S(r, L). \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$(q-m_i-1)T(r, L) \leq (q-m_1)T(r, L) + S(r, L),$$

$$(m_1-m_i-1)T(r, L) \leq S(r, L).$$

Điều này mâu thuẫn với $m_1 \geq m_2 + 2$.

Trường hợp 2. $c = 1$. Khi đó ta có $P(L) = P(f)$. Vì $P(z)$ là đa thức duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ nên ta có $L = f$. $\square$

Áp dụng Định lý 2.2.1 ta nhận được Định lý 2.2.2 sau đây.

Định lý 2.2.2. Cho $P(z)$ là đa thức có bậc $q \geq 5$, được xác định như trong (1.3) với các điều kiện (1.4), (1.5) và (1.6) được thiết lập ở Chương 1. Cho $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ và $S = \{z : P(z) = 0\}$. Khi đó S là tập xác định duy nhất trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ nếu điều kiện sau được thỏa mãn:

$$q \geq 2k + 4 \text{ và } m_2 \geq 2.$$

Chứng minh. Từ Khẳng định 1 của Định lý 1.2.4, ta có:

Khẳng định 1.

- i) $(q - 1)T(r, L) + S(r, L) \leq qT(r, f) + S(r, f),$
- ii) $(q - 2)T(r, f) + S(r, f) \leq qT(r, L) + S(r, L),$
- iii) $S(r, L) = o(T(r, f))$ và $S(r, f) = o(T(r, L)).$

Đặt

$$F = \frac{1}{P(f)}, \quad G = \frac{1}{P(L)}, \quad H = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}, \quad S(r) = S(r, L) + S(r, f).$$

Từ iii) ta có $S(r) = o(T(r, L))$ và $S(r) = o(T(r, f))$.

Ta tìm quan hệ giữa f và L thông qua hàm phụ H .

Khẳng định 2. $H \equiv 0$ nếu $q \geq 2k + 4$.

Chứng minh. Giả sử $H \not\equiv 0$.

Khả năng 1.

- i) $(q - 1)T(r, L) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{P(L)}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) + S(r)$, ở đó $N_0\left(r, \frac{1}{L'}\right)$

là hàm đếm các không điểm của L' và các không điểm này không là không điểm của $(L - a_1)(L - a_2) \cdots (L - a_q)$.

- ii) $(q - 1)T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r)$, ở đó $N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ là hàm đếm các không điểm của f' và các không điểm này không là không điểm của $(f - a_1) \cdots (f - a_q)$.

Chứng minh i) Áp dụng Định lý cơ bản thứ hai cho L và các giá trị $a_1, a_2, \dots, a_q$, và chú ý rằng

$$N(r, L) = S(r, L), \quad \sum_{i=1}^q \overline{N} \left(r, \frac{1}{L - a_i} \right) = \overline{N} \left(r, \frac{1}{P(L)} \right),$$

ta nhận được

$$(q-1)T(r, L) \leq \overline{N}(r, L) + \sum_{i=1}^q \overline{N} \left(r, \frac{1}{L - a_i} \right) - N_0 \left(r, \frac{1}{L'} \right) + S(r, L),$$

$$(q-1)T(r, L) \leq \overline{N} \left(r, \frac{1}{P(L)} \right) - N_0 \left(r, \frac{1}{L'} \right) + S(r).$$

Chứng minh ii) Bất đẳng thức cho f được chứng minh tương tự. Khả năng 1 được chứng minh.

Khả năng 2.

Ta có

$$N(r, H) \leq kT(r, L) + kT(r, f) + \overline{N}(r, f) + N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{L'} \right) + S(r).$$

Chứng minh. Để ý rằng H chỉ có các cực điểm đơn, theo Bổ đề 2.1.2 ta nhận được

$$\begin{aligned} N(r, H) &\leq \overline{N}_{(2)}(r, P(f)) + \overline{N}_{(2)}(r, P(L)) \\ &\quad + \overline{N} \left(r, \frac{1}{P'(f)}; P(f) \neq 0 \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{P'(L)}; P(L) \neq 0 \right) + S(r). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\overline{N}_{(2)}(r, P(L)) = \overline{N}(r, L) = S(r), \quad \overline{N}_{(2)}(r, P(f)) = \overline{N}(r, f).$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}
\overline{N}\left(r, \frac{1}{[P(L)]'}; P(L) \neq 0\right) &\leq \sum_{i=1}^k \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-d_i}; \prod_{j=1}^q (L-a_j) \neq 0\right) \\
&\quad + N_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^k \overline{N}\left(r, \frac{1}{L-d_i}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) \\
&\leq kT(r, L) + N_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) + S(r).
\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có đánh giá đối với hàm f :

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{[P(f)]'}; P(f) \neq 0\right) \leq kT(r, f) + N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r).$$

Thay các đánh giá trên vào bất đẳng thức của $N(r, H)$, ta tổng hợp được:

$$\begin{aligned}
N(r, H) &\leq \overline{N}(r, f) + k[T(r, f) + T(r, L)] \\
&\quad + N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) + S(r). \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Theo Định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna đối với bài toán chia sẻ tập hợp, khi $H \not\equiv 0$, ta có bất đẳng thức cơ bản sau:

$$\begin{aligned}
(q-2)[T(r, f) + T(r, L)] &\leq 2\overline{N}(r, f) + 2\overline{N}(r, L) + 2N(r, H) \\
&\quad - 2N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) - 2N_0\left(r, \frac{1}{L'}\right) + S(r). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Từ đó, kết hợp (2.13) vào (2.14) và để ý rằng $\overline{N}(r, L) = S(r)$, các đại lượng N_0 bị triệt tiêu hoàn toàn, ta suy ra:

$$(q-2)[T(r, f) + T(r, L)] \leq 2\overline{N}(r, f)$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left[\overline{N}(r, f) + k(T(r, f) + T(r, L)) \right] + S(r) \\
& = 4\overline{N}(r, f) + 2k[T(r, f) + T(r, L)] + S(r).
\end{aligned}$$

Chuyển về, ta nhận được:

$$(q - 2k - 2)T(r, L) + (q - 2k - 2)T(r, f) \leq 4\overline{N}(r, f) + S(r).$$

Khả năng 2 được chứng minh.

Khả năng 3.

Ta có

$$\begin{aligned}
i) \quad & \overline{N} \left(r, \frac{1}{P(L)} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{P(f)} \right) \leq \left(\frac{q}{2} + k \right) T(r, L) + \left(\frac{q}{2} + k \right) T(r, f) \\
& + \overline{N}(r, f) + N_0 \left(r, \frac{1}{L'} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + S(r). \\
ii) \quad & (q - 2k - 2)T(r, L) + (q - 2k - 6)T(r, f) \leq S(r).
\end{aligned}$$

Chứng minh

i) Theo Bổ đề 2.1.2, nếu a là không điểm đơn chung của $P(f)$ và $P(L)$ thì $H(a) = 0$. Do đó,

$$\begin{aligned}
N_{1)} \left(r, \frac{1}{P(L)} \right) & = N_{1)} \left(r, \frac{1}{P(f)} \right) \leq N \left(r, \frac{1}{H} \right) \\
& \leq T(r, H) + S(r, H) \leq N(r, H) + S(r),
\end{aligned}$$

vì $m(r, H) = o(T(r, H))$ và $S(r, H) \leq S(r)$.

Khi đó, áp dụng Bổ đề 2.1.4 và Khả năng 2, ta nhận được

$$\begin{aligned}
& \overline{N} \left(r, \frac{1}{P(L)} \right) - \frac{1}{2} N_{1)} \left(r, \frac{1}{P(L)} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{P(f)} \right) \\
& - \frac{1}{2} N_{1)} \left(r, \frac{1}{P(f)} \right) + N_{1)} \left(r, \frac{1}{P(L)} \right) \\
& \leq \frac{1}{2} \left(N \left(r, \frac{1}{P(L)} \right) + N \left(r, \frac{1}{P(f)} \right) \right) + N(r, H) \\
& \leq \left(\frac{q}{2} + k \right) T(r, L) + \left(\frac{q}{2} + k \right) T(r, f) \\
& + \overline{N}(r, f) + N_0 \left(r, \frac{1}{L'} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + S(r).
\end{aligned}$$

ii) Từ Khả năng 1 và phần i) của khả năng 3, ta nhận được

$$(2q - 2)T(r, L) + (2q - 2)T(r, f) \leq (q + 2k)T(r, L) + (q + 2k)T(r, f) + 4\overline{N}(r, f) + S(r),$$

$$(q - 2k - 2)T(r, L) + (q - 2k - 2)T(r, f) \leq 4\overline{N}(r, f) + S(r),$$

$$(q - 2k - 2)T(r, L) + (q - 2k - 6)T(r, f) \leq S(r).$$

Khả năng 3 được chứng minh.

Bây giờ, sử dụng Khẳng định 1 và phần ii) của Khả năng 3, ta sẽ chỉ ra một mâu thuẫn, từ đó suy ra $H \equiv 0$.

Từ phần ii) của Khả năng 3 và phần i) của Khẳng định 1, ta nhận được

$$(q - 2k - 2)T(r, L) + (q - 2k - 6)T(r, f) \leq S(r),$$

$$\frac{q - 1}{q}T(r, L) \leq T(r, f).$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta thu được:

$$\left[(q - 2k - 2) + (q - 2k - 6)\frac{q - 1}{q} \right] T(r, L) \leq S(r)$$

$$\Leftrightarrow \left(2q - 4k - 9 + \frac{2k + 6}{q} \right) T(r, L) \leq S(r). \quad (2.15)$$

Xét

$$t(x) = 2x - 4k - 9 + \frac{2k + 6}{x} \quad \text{với } x \geq 2k + 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$t'(x) = 2 - \frac{2k + 6}{x^2} > 0 \quad \text{với } x \geq 2k + 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó, kết hợp với $q \geq 2k + 4$, ta nhận được

$$t(q) = 2q - 4k - 9 + \frac{2k + 6}{q},$$

$$t(2k + 4) = \frac{2k + 6}{2k + 4} - 1 > 0,$$

$$t(q) \geq t(2k + 4) > 0, \quad 2q - 4k - 9 + \frac{2k + 6}{q} > 0.$$

Đây là một mâu thuẫn với (2.15).

Vậy $H \equiv 0$.

Do đó $\frac{1}{P(f)} = \frac{c}{P(L)} + c_1$ cho các hằng số $c \neq 0$ và c_1 . Từ $m_2 \geq 2$, áp dụng Bổ đề 2.1.3, ta nhận được $c_1 = 0$. Do đó, tồn tại một hằng số $c \neq 0$ sao cho $P(L) = cP(f)$. Vì $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ nên ta nhận được $f = L$.

Định lý 2.2.2 được chứng minh. $\square$

Từ Định lý 2.2.1 và Định lý 2.2.2, ta nhận được hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.3. Cho f là hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm, và $P_K(z)$ được định nghĩa như trong (1.13) với các điều kiện (1.14) và (1.15) ở Chương 1, $S_K = \{z : P_K(z) = 0\}$. Khi đó:

i) $P_K(z)$ là đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ nếu

$$P_K(0) + P_K(a) \neq 0 \quad \text{và} \quad n \geq 3, m = 1, \quad \text{hoặc} \quad n \geq m + 2 \quad \text{và} \quad m \geq 2.$$

ii) $L = f$ nếu $E_L(S_K) = E_f(S_K)$ và $n + m \geq 7, n \geq m \geq 2$.

Chứng minh. i) Thật vậy, ta có $P'_K(z) = (n + m + 1)z^n(z - a)^m$, $n > m$. P'_K có một không điểm tại 0 bậc n và một không điểm tại a bậc m . Ta kiểm tra các điều kiện của Định lý 2.2.1. Với $k = 2$, điều kiện $P_K(0) + P_K(a) \neq 0$ suy ra $P_K(a)P_K(a) \neq P_K(0)^2$. Khi đó, áp dụng Định lý 2.2.1 với $m_1 = n, m_2 = m$, ta nhận được i).

ii) Ta kiểm tra các điều kiện của Định lý 2.2.2: $k = 2, m_1 = n, m_2 = m, q = m + n + 1$. Giả thiết của ii): $n + m \geq 7, n \geq m \geq 2$ thỏa mãn

các điều kiện của Định lý 2.2.2. Khi đó, áp dụng Định lý 2.2.2, ta nhận được ii). $\square$

Chú ý 2.2.4. i) Hệ quả 2.2.3, phần i) đưa ra một lớp các đa thức duy nhất mạnh trên không gian $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ với 5 phần tử. Trong khi đó, Hệ quả 1.1 (trang 126, [31]) đưa ra một lớp các đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$ (áp dụng cho các hàm phân hình) với 6 phần tử ($6 > 5$). Trong Định lý 3.4 (trang 502, [8]), A. Banerjee và A. Kundu đã giả thiết $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình, tức là họ vẫn phụ thuộc vào chuẩn đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Do đó, Định lý 2.2.1 (nền tảng của Hệ quả 2.2.3 i)) thực sự là một cải tiến và mở rộng quan trọng về mặt cấu trúc đại số so với Định lý 3.4 trong [8].

ii) Hệ quả 2.2.3, phần ii) với điều kiện ngưỡng bậc $n + m \geq 7$ là một kết quả cải tiến trực tiếp đối với Định lý 1 trong [34] của nhóm tác giả H. H. Khoái, V. H. An và N. D. Phương (2023). Từ đó khẳng định, Định lý 2.2.2 là một sự cải tiến và mở rộng toàn diện của Định lý 1 [34].

Ví dụ 2.2.5. 1) Cho $P(z) = 4z^5 - 5z^4 + 2$. Khi đó:

i) $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

ii) $P(z)$ không là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình.

2) Cho $P(z) = z^8 - \frac{16}{7}z^7 + \frac{4}{3}z^6 + 1$ và $S = \{z : P(z) = 0\}$. Khi đó:

$L = f$ nếu $E_L(S) = E_f(S)$, ở đó f là hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm.

Chứng minh. 1)

i) Thật vậy, từ $P(z) = 4z^5 - 5z^4 + 2$, ta có $P'(z) = 20z^3(z - 1)$. Từ đó, ta nhận được $P'(z)$ có một không điểm tại 0 bậc 3, một không điểm tại 1 bậc 1, và $P(0) + P(1) = 3 \neq 0$. Áp dụng Hệ quả 2.2.3, phần i) với $n = 3, m = 1$, ta nhận được $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh trên $\mathcal{S} \times \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

ii) Giả sử $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình. Khi đó, $P(z)$ là đa thức duy nhất cho các hàm phân hình. Áp dụng

Bổ đề 1.1.7 (Chương 1) tới $P(z)$ với $k = 2, n = 3, m = 1$, suy ra $\min\{3, 1\} = 1 \not\geq 2$. Đây là một mâu thuẫn. Vậy $P(z)$ không là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình.

2) Thật vậy, từ $P(z) = z^8 - \frac{16}{7}z^7 + \frac{4}{3}z^6 + 1$, ta có $P'(z) = 8z^5(z-1)^2$. Từ đó, ta nhận được $P'(z)$ có một không điểm tại 0 bậc 5, một không điểm tại 1 bậc 2, và $n = 5, m = 2$. Áp dụng Hệ quả 2.2.3, phần ii) với $n = 5, m = 2$, ta nhận được $n > m = 2, n + m = 7$, và do đó $L = f$. $\square$

Định lý 2.2.6. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $n \geq 2m + 6$ và $m \geq 2$, $P(z), Q(z)$ là các đa thức dạng (1.17) và (1.18) với điều kiện (1.19) và (1.20) đã đưa ra ở Chương 1 và cho S, T lần lượt là hai tập hợp các không điểm của $P(z), Q(z)$. Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trong mặt phẳng phức và L là L -hàm. Khi đó ta có

1) $E_L(S) = E_f(T)$ nếu và chỉ nếu $f = hL$ và $hS = T$, với h là hằng số khác không thỏa mãn $h^n = \frac{at}{cu}$ và $h^m = \frac{av}{ub}$.

2) $E_{L_1}(S) = E_{L_2}(T)$ nếu và chỉ nếu $L_1 = L_2, \frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{t}$ và $S = T$, trong đó L_1, L_2 là các L -hàm.

Chứng minh. Lập luận tương tự như Khẳng định 1 của Định lý 2.2.2 với $q = n, k = m + 1$, ta có:

Khẳng định 1.

- i) $(q-1)T(r, L) + S(r, L) \leq qT(r, f) + S(r, f),$
- ii) $(q-2)T(r, f) + S(r, f) \leq qT(r, L) + S(r, L),$
- iii) $S(r, L) = o(T(r, f))$ và $S(r, f) = o(T(r, L)).$

Đặt

$$F = \frac{1}{P(L)}, \quad G = \frac{1}{Q(f)}, \quad H = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}, \quad S(r) = S(r, L) + S(r, f).$$

Từ iii) ta có $S(r) = o(T(r, L))$ và $S(r) = o(T(r, f)).$

Ta tìm quan hệ giữa f và L thông qua hàm phụ H .

Lập luận tương tự như Khẳng định 2 của Định lý 2.2.2 với $q = n, k = m + 1$, ta có:

Khẳng định 2. $H \equiv 0$ nếu $n \geq 2m + 6$.

Chứng minh Khẳng định 2.

Lập luận tương tự như (2.15) của Định lý 2.2.2 với $q = n, k = m + 1$, ta nhận được

$$\left(2n - 4m - 13 + \frac{2m + 8}{n}\right) T(r, L) \leq S(r). \quad (2.16)$$

Xét

$$t(x) = 2x - 4m - 13 + \frac{2m + 8}{x} \quad \text{với } x \geq 2m + 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$t'(x) = 2 - \frac{2m + 8}{x^2} > 0 \quad \text{với } x \geq 2m + 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó, kết hợp với $n \geq 2m + 6$, ta nhận được

$$t(n) = 2n - 4m - 13 + \frac{2m + 8}{n},$$

$$t(2m + 6) = \frac{2m + 8}{2m + 6} - 1 > 0,$$

$$t(n) \geq t(2m + 6) > 0, \quad 2n - 4m - 13 + \frac{2m + 8}{n} > 0.$$

Đây là một mâu thuẫn với (2.16).

Vậy $H \equiv 0$.

Do đó

$$Q(f) = lP(L), \quad l \text{ là hằng số.} \quad (2.17)$$

Bây giờ, bằng lập luận tương tự như Định lý 1.3.1 (Chương 1) cho (2.17), ta nhận được kết luận của Định lý 2.2.6.

Định lý 2.2.6 được chứng minh. $\square$

Bây giờ, ta đưa ra một số áp dụng của Định lý 2.2.6 cho các hàm phân hình. Chú ý rằng, quan hệ đồng nhất giữa các hàm phân hình là trường hợp đặc biệt của quan hệ phụ thuộc tuyến tính giữa chúng.

Định lý 2.2.7. Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $\gcd(n, m) = 1$ và $n \geq 2m + 3, m \geq 2$, cho $P(z)$ là đa thức của dạng (1.17) với điều kiện (1.19) Chương 1 và cho S là tập hợp các không điểm của $P(z)$. Giả sử rằng $E_L(S) = E_f(S)$ cho một L -hàm L và một hàm phân hình khác hằng f . Khi đó ta có $f = L$.

Chứng minh. Thật vậy, áp dụng Định lý 2.2.6 với $P(z) = Q(z), S = T$, ta nhận được: $f = hL$ và $hS = S$, ở đó h là hằng số khác 0 thỏa mãn $h^n = \frac{at}{cu} = 1, h^m = \frac{av}{ub} = 1$. Vì $\gcd(n, m) = 1$ nên ta nhận được $h = 1$. Vậy $f = L$. $\square$

Chú ý 2.2.8. Định lý 2.2.7 cho ta một tập xác định duy nhất với 10 phần tử đối với L -hàm và hàm phân hình khác hằng khi chúng chia sẻ một tập hợp kiểu Yi. Tập xác định duy nhất như vậy khác với tập xác định duy nhất trong Định lý 1 [34].

Cho L là một L -hàm và f là một hàm phân hình khác hằng. Gọi S, T lần lượt là tập hợp các không điểm của các đa thức $P(z)$ và $Q(z)$. Các ví dụ sau là áp dụng của Định lý 2.2.6. Sử dụng lập luận tương tự như trong Ví dụ 1.3.3 và Ví dụ 1.3.4 ở Chương 1, ta nhận được kết quả.

Ví dụ 2.2.9. Cho

$$\begin{aligned} P(z) &= z^{10} - \frac{5}{4}z^8 + 1, & S &= \{a_1, \dots, a_{10}\}, \\ Q(z) &= z^{10} - 5z^8 + 2^{10}, & T &= \{b_1, \dots, b_{10}\}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$E_L(S) = E_f(T) \quad \text{nếu và chỉ nếu} \quad f = 2L, \quad 2S = T.$$

Ví dụ 2.2.10. Cho

$$P(z) = z^{10} - \frac{5}{4}z^8 + 1, \quad S = \{a_1, \dots, a_{10}\}.$$

Khi đó

$$E_L(S) = E_f(S) \quad \text{nếu và chỉ nếu} \quad f = L.$$

2.3 Phân bố giá trị và tập xác định duy nhất đối với hàm phân hình chia sẻ tập hữu hạn

Trước tiên, ta cần khái niệm sau.

Ta định nghĩa các giá trị khuyết Nevanlinna như sau:

$$\Theta(\infty, (f_1, \dots, f_N)) = 1 - \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^N \overline{N}(r, f_i)}{\sum_{i=1}^N T(r, f_i)},$$

$$\Theta(a, (f_1, \dots, f_N)) = 1 - \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^N \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_i - a}\right)}{\sum_{i=1}^N T(r, f_i)}.$$

Chú ý rằng, $0 \leq \Theta(\infty, (f_1, \dots, f_N)) + \Theta(a, (f_1, \dots, f_N)) \leq 2$.

Ta chứng minh định lý sau. Ở đây, ta tiếp tục sử dụng lớp đa thức $P(z)$ đã thiết lập ở công thức (1.3) Chương 1 thỏa mãn các điều kiện Fujimoto.

Định lý 2.3.1. *Cho $S = \{a_1, a_2, \dots, a_q\} \subset \mathbb{C}$, đa thức $P(z)$ được xác định như trong phương trình (1.3) với các điều kiện (1.4) và (F) ở Chương 1. Giả sử $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình. Nếu $k \geq 3$, hoặc $k = 2$ và $\min\{m_1, m_2\} \geq 2$ thì đối với hai hàm phân hình khác hằng f, g , điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$, $q > 2k + 6 - 4(\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)))$ suy ra $f = g$.*

Chứng minh. Trước tiên, ta chứng minh tồn tại hằng số $C \neq 0$ sao cho $P(f) = CP(g)$.

Đặt

$$F = \frac{1}{P(f)}, \quad G = \frac{1}{P(g)}, \quad H = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'},$$

$$T(r) = T(r, f) + T(r, g), \quad S(r) = S(r, f) + S(r, g).$$

Khi đó $T(r, P(f)) = qT(r, f) + S(r, f)$ và $T(r, P(g)) = qT(r, g) + S(r, g)$, và do đó $S(r, P(f)) = S(r, f)$ và $S(r, P(g)) = S(r, g)$.

Bây giờ, giả sử $H \neq 0$. Theo bổ đề đạo hàm loga, ta có $m(r, H) = S(r, f)$.

Từ

$$P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_q), \quad P'(z) = qz^{m_1}(z - d_2)^{m_2} \cdots (z - d_k)^{m_k},$$

ta có

$$[P(f)]' = qf^{m_1}(f - d_2)^{m_2} \cdots (f - d_k)^{m_k} f',$$

$$[P(g)]' = qg^{m_1}(g - d_2)^{m_2} \cdots (g - d_k)^{m_k} g'.$$

Từ $E_f(S) = E_g(S)$,

$$N_1) \left(r, \frac{1}{F} \right) = N_1) \left(r, \frac{1}{G} \right)$$

và ta ký hiệu giá trị chung này là $N_1(r)$. Theo Bổ đề 2.1.2, mỗi không điểm chung đơn của F và G là một không điểm của H . Do đó

$$N_1(r) \leq \overline{N} \left(r, \frac{1}{H} \right) \leq T(r, H) \leq N(r, H) + S(r),$$

vì theo Bổ đề đạo hàm loga ta có $m(r, H) = o(T(r, H)) = S(r)$. Mặt khác, H chỉ có cực điểm đơn, khi đó ta có

$$N_1(r) \leq \overline{N}(r, H).$$

Tiếp theo, ta chứng minh các khẳng định sau:

Khẳng định 1. Ta có

$$\begin{aligned} qT(r) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, g) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{g} \right) \\ &\quad + \overline{N} \left(r, \frac{1}{P(f)} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{P(g)} \right) \\ &\quad - N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) - N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right) + S(r), \end{aligned}$$

ở đó $N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ (tương ứng, $N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right)$) là hàm đếm các không điểm của f' (tương ứng, g'), và các không điểm này không là không điểm của $(f - a_j)$ và $(f - d_l)$ (tương ứng, $(g - a_j)$ và $(g - d_l)$) cho bất kì $j \in \{1, 2, \dots, q\}, l \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Chứng minh: Áp dụng Định lý cơ bản thứ hai cho hàm f và các giá trị $a_1, a_2, \dots, a_q, 0, d_2, \dots, d_k, \infty$, ta nhận được

$$(q + k - 1)T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) + \sum_{i=2}^k \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - d_i}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f).$$

Mặt khác

$$\sum_{i=2}^k \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - d_i}\right) \leq (k - 1)T(r, f) + S(r, f)$$

và

$$\sum_{i=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{P(f)}\right).$$

Khi đó ta nhận được

$$qT(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f).$$

Kết hợp bất đẳng thức này với bất đẳng thức tương tự cho g , ta nhận được

$$qT(r) \leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{P(g)}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) + S(r).$$

Khẳng định 1 được chứng minh.

Khẳng định 2.

Ta có

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{P(g)}\right) \leq \frac{q}{2}T(r) + N_1(r).$$

Chứng minh: Theo Bổ đề 2.1.4, ta thấy rằng

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) \leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) + \frac{1}{2}N_1\left(r, \frac{1}{P(f)}\right)$$

và bất đẳng thức cho $P(g)$ cũng đúng. Mặt khác

$$N\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) \leq qT(r, f) + S(r, f); \quad N\left(r, \frac{1}{P(g)}\right) \leq qT(r, g) + S(r, g),$$

và Khẳng định 2 được chứng minh.

Từ Khẳng định 1 và Khẳng định 2, ta có

$$\begin{aligned} \frac{q}{2}T(r) &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, g) \\ &\quad + N_1(r) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) + S(r). \end{aligned}$$

Khẳng định 3. Ta có

$$\begin{aligned} N_1(r) &\leq (k-1)T(r) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, g) \\ &\quad + N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) + S(r). \end{aligned}$$

Chứng minh: Từ $N_1(r) \leq N(r, H)$ và theo Bổ đề 2.1.2, ta có:

$$\begin{aligned} N_1(r) &\leq \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, g) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{[P(f)]'}; P(f) \neq 0\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{[P(g)]'}; P(g) \neq 0\right). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{[P(f)]'}; P(f) \neq 0\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{N} \left(r, \frac{1}{f^{q_1} \dots (f - d_k)^{q_k} f'}; \prod_{j=1}^q (f - a_j) \neq 0 \right) \\
&\leq \overline{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \sum_{i=2}^k \overline{N} \left(r, \frac{1}{f - d_i} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) \\
&\leq (k-1)T(r, f) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + N_0 \left(r, \frac{1}{f'} \right) + S(r, f).
\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}
\overline{N} \left(r, \frac{1}{[P(g)]'}; P(g) \neq 0 \right) &\leq (k-1)T(r, g) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{g} \right) \\
&\quad + N_0 \left(r, \frac{1}{g'} \right) + S(r, g).
\end{aligned}$$

Khẳng định 3 được chứng minh.

Từ Khẳng định 1, 2, 3 ta nhận được:

$$\begin{aligned}
\frac{q}{2}T(r) &\leq (k-1)T(r) + 2[\overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, g)] \\
&\quad + 2 \left[\overline{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + \overline{N} \left(r, \frac{1}{g} \right) \right] + S(r).
\end{aligned}$$

Do đó

$$q \leq 2k + 6 - 4[\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g))].$$

Đây là một mâu thuẫn với giả thiết

$$q > 2k + 6 - 4[\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g))].$$

Vậy

$$H \equiv 0.$$

Do đó $\frac{1}{P(f)} = \frac{c}{P(g)} + c_1$ với các hằng số $c \neq 0$ và c_1 . Theo Bổ đề 2.1.3, ta nhận được $c_1 = 0$.

Vậy, tồn tại một hằng số $C \neq 0$ sao cho $P(f) = CP(g)$, $C = 1/c$. Vì $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình, ta nhận được

$$f = g.$$

Định lý 2.3.1 được chứng minh. $\square$

Từ Định lý 2.3.1 ta nhận được các hệ quả sau.

Hệ quả 2.3.2. Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng và $P_K(z)$ là đa thức được xác định trong Hệ quả 2.2.3 với S_K là tập các không điểm của $P_K(z)$. Giả sử $E_f(S_K) = E_g(S_K)$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

- i) $q \geq 6$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > 1$, hoặc
- ii) $q \geq 7$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > \frac{3}{4}$, hoặc
- iii) $q \geq 8$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > \frac{1}{2}$, hoặc
- iv) $q \geq 9$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > \frac{1}{4}$, hoặc
- v) $q \geq 10$, $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > 0$.

Khi đó $f = g$.

Chứng minh. i) Chú ý rằng, $P_K(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình. Khi đó áp dụng Định lý 2.3.1 với $k = 2$ và $\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g)) > 1$ ta nhận được:

$$2.2 + 6 - 4 > 2.2 + 6 - 4(\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g))), \quad q \geq 6$$

và $f = g$.

Các phần khác được chứng minh tương tự như phần i). $\square$

Hệ quả 2.3.3. Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng với bội của cực điểm và bội của không điểm lần lượt ít nhất là s, l , và $P_K(z)$ là đa thức được xác định trong Hệ quả 2.2.3 với S_K là tập các không điểm của $P_K(z)$. Giả sử $E_f(S_K) = E_g(S_K)$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

- i) $q \geq 6$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{l} < 1$, hoặc
- ii) $q \geq 7$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{l} < \frac{5}{4}$, hoặc
- iii) $q \geq 8$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{l} < \frac{3}{2}$, hoặc
- iv) $q \geq 9$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{l} < \frac{7}{4}$, hoặc

$$v) \, q \geq 10, \, \frac{1}{s} + \frac{1}{l} < 2.$$

Khi đó $f = g$.

Chứng minh. i) Chọn s, l thỏa mãn

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{l} \geq 2 - (\Theta(\infty, (f, g)) + \Theta(0, (f, g))).$$

Khi đó áp dụng Hệ quả 2.3.2, phần i) ta nhận được $f = g$.

Các phần khác được chứng minh tương tự như phần i). □

Kết luận Chương 2

Trong Chương 2, luận án đã đi sâu nghiên cứu tính duy nhất và sự phân bố giá trị của L -hàm và hàm phân hình thông qua việc chia sẻ các tập hữu hạn. Các nội dung chính đã thực hiện bao gồm:

1. Thiết lập các điều kiện để đa thức $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh, từ đó đưa ra một lớp các tập xác định duy nhất hữu hạn S đối với L -hàm chia sẻ S với hàm phân hình thông qua việc phát biểu và chứng minh **Định lý 2.2.1** và **Định lý 2.2.2**. Kết quả này giúp cải tiến và làm giảm lực lượng của tập duy nhất so với một số nghiên cứu trước đây.

2. Thiết lập một lớp các cặp tập hữu hạn S, T và tập hợp kiểu Yi đối với bài toán L -hàm chia sẻ tập hợp với hàm phân hình thông qua việc phát biểu và chứng minh **Định lý 2.2.6** và **Định lý 2.2.7**.

3. Xây dựng các lớp tập xác định duy nhất hữu hạn S đối với hàm phân hình thông qua việc phát biểu và chứng minh **Định lý 2.3.1**, dựa trên các đánh giá về giá trị khuyết Nevanlinna và bội của không điểm, cực điểm. Kết quả này đã cụ thể hóa định hướng của Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An [29] về việc lực lượng của tập duy nhất có thể được thu gọn đáng kể khi các hàm phân hình có các đặc tính giải tích đặc biệt.

Chương 3

Vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình với điều kiện đa thức vi phân

3.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Bổ đề 3.1.1 ([66], Bổ đề 3, trang 396). Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng. Nếu f, g chia sẻ giá trị 1 CM thì một trong các trường hợp sau là đúng:

i) Ta có bất đẳng thức:

$$T(r, f) \leq N_2(r, f) + N_2\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_2(r, g) + N_2\left(r, \frac{1}{g}\right) + S(r, f) + S(r, g),$$

và bất đẳng thức như thế đúng cho $T(r, g)$;

ii) $f \cdot g = 1$;

iii) $f = g$.

Bổ đề 3.1.2 ([73], Bổ đề 2.3, trang 5). Cho f là một hàm phân hình khác hằng và p, k là các số nguyên dương, $f^{(k)} \not\equiv 0$. Khi đó ta có

$$N_p\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) \leq T(r, f^{(k)}) - T(r, f) + N_{p+k}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f),$$

$$N_p\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) \leq k\overline{N}(r, f) + N_{p+k}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f).$$

Bổ đề 3.1.3 ([41], Bổ đề 2.10, trang 432). Cho f, g là các hàm phân hình khác hằng, n, k là các số nguyên dương, $n > 2k$. Nếu $(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} = 1$ thì $f = c_1 e^{cz}$ và $g = c_2 e^{-cz}$ với ba hằng số khác không c_1, c_2 và c sao cho $(-1)^k (c_1 c_2)^n (nc)^{2k} = 1$.

Bổ đề 3.1.4 ([36], Định lý 1.2, trang 97). Giả sử f là một hàm phân hình có bậc hữu hạn trên $\mathbb{C}$, và $f^{(k)}$ có hữu hạn không điểm với $k \geq 2$ nào đó. Khi đó f có hữu hạn cực điểm trong $\mathbb{C}$.

Bổ đề 3.1.5. Cho f là một hàm phân hình khác hằng và n, m là hai số nguyên dương, $n > m$ và a là cực điểm của f . Khi đó

$$(f^n)^{(m)} = \frac{\varphi_m}{(z-a)^{np+m}}, \quad \text{trong đó } p = \nu_f^\infty(a), \quad \varphi_m(a) \neq 0.$$

Bổ đề 3.1.6. Cho f là một hàm phân hình khác hằng và n, m là hai số nguyên dương, $n > m$ và a, b lần lượt là cực điểm và không điểm của f .

Khi đó

$$\begin{aligned} i) \quad & \frac{(f^n)^{(m)}}{f^n} = \frac{h_m}{(z-a)^m}, \quad \text{trong đó } p = \nu_f^\infty(a), \quad h_m(a) \neq 0; \\ ii) \quad & \frac{(f^n)^{(m)}}{f^n} = \frac{S_m}{(z-b)^m}, \quad \text{trong đó } l = \nu_f^0(b), \quad S_m(b) \neq 0. \end{aligned}$$

Bổ đề 3.1.7. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, n, m, k là các số nguyên, $m \geq 0$, $n > k + 1$, và $P(z)$ là một đa thức bậc m . Khi đó

$$\begin{aligned} (n-k-1)T(r, f) &\leq T\left(r, (f^n P(f))^{(k)}\right) + S(r, f) \\ &\leq (n+m)(k+1)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Đặc biệt, $(f^n P(f))^{(k)}$ khác hằng và $S(r, (f^n P(f))^{(k)}) = S(r, f)$.

Chứng minh. Chú ý rằng $(f^n P(f))^{(k)} \not\equiv 0$. Thật vậy, nếu $(f^n P(f))^{(k)} \equiv 0$ thì $f^n P(f)$ là đa thức bậc k . Điều này mâu thuẫn với $n > k + 1$.

Mặt khác, từ $T(r, f^n P(f)) = (n+m)T(r, f) + O(1)$ ta suy ra $S(r, f) = S(r, f^n P(f))$.

Áp dụng Bổ đề 3.1.2 với $p = 1$ cho hàm $(f^n P(f))^{(k)}$ ta nhận được

$$\begin{aligned} T(r, f^n P(f)) + N_1 \left(r, \frac{1}{(f^n P(f))^{(k)}} \right) &\leq T \left(r, (f^n P(f))^{(k)} \right) \\ &\quad + N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n P(f)} \right) + S(r, f), \\ T(r, f^n P(f)) &\leq T \left(r, (f^n P(f))^{(k)} \right) \\ &\quad + N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n P(f)} \right) + S(r, f). \end{aligned}$$

Ta có $T(r, f^n P(f)) = (n + m)T(r, f) + O(1)$.

Hơn nữa,

$$N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n P(f)} \right) \leq N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n} \right) + N_{k+1} \left(r, \frac{1}{P(f)} \right).$$

Vì $n > k + 1$ ta nhận được

$$N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n} \right) = (k + 1)\bar{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) \leq (k + 1)T(r, f) + S(r, f).$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} N_{k+1} \left(r, \frac{1}{P(f)} \right) &\leq N \left(r, \frac{1}{P(f)} \right) \leq T(r, P(f)) + S(r, f) \\ &= mT(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Vậy

$$N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n P(f)} \right) \leq (k + 1)T(r, f) + mT(r, f) + S(r, f).$$

Theo Bổ đề 1.1.12 (Chương 1), ta có

$$\begin{aligned} T \left(r, (f^n P(f))^{(k)} \right) &\leq (k + 1)T(r, f^n P(f)) + S(r, f) \\ &\leq (n + m)(k + 1)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
(n+m)T(r, f) &\leq T\left(r, (f^n P(f))^{(k)}\right) + (k+1)T(r, f) \\
&\quad + mT(r, f) + S(r, f), \\
(n-k-1)T(r, f) &\leq T\left(r, (f^n P(f))^{(k)}\right) + S(r, f) \\
&\leq (n+m)(k+1)T(r, f) + S(r, f).
\end{aligned}$$

Do vậy $(f^n P(f))^{(k)}$ khác hằng và $S(r, f) = S\left(r, (f^n P(f))^{(k)}\right)$. $\square$

Bổ đề 3.1.8. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, n, m, k, d là các số nguyên, $m \geq 0$, $k > 0$, $n > k + 1 + \frac{2k+m+2}{d}$ và $P(z)$ là một đa thức bậc m , $S = \{a \in \mathbb{C} : a^d = 1\}$. Khi đó

$$(d(n-k-1) - 2k - m - 2)T(r, f) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{((f^n P(f))^{(k)})^d - 1}\right) + S(r, f).$$

Đặc biệt, $((f^n P(f))^{(k)})^{-1}(S) \neq \emptyset$.

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.1.7 và $n > k + 1 + \frac{2k+m+2}{d}$ ta suy ra rằng $(f^n P(f))^{(k)}$ khác hằng và $S(r, (f^n P(f))^{(k)}) = S(r, f)$.

Khi đó, áp dụng hai Định lý cơ bản ta nhận được

$$\begin{aligned}
T\left(r, \left((f^n P(f))^{(k)}\right)^d\right) &\leq \overline{N}\left(r, \left((f^n P(f))^{(k)}\right)^d\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{((f^n P(f))^{(k)})^d}\right) \\
&\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{((f^n P(f))^{(k)})^d - 1}\right) + S(r, f).
\end{aligned}$$

Chú ý rằng, nếu a là một cực điểm của $(f^n P(f))^{(k)}$ thì a là một cực điểm của f . Do đó

$$\overline{N}\left(r, \left((f^n P(f))^{(k)}\right)^d\right) = \overline{N}(r, f) \leq T(r, f) + S(r, f).$$

Mặt khác

$$\overline{N} \left(r, \frac{1}{((f^n P(f))^{(k)})^d} \right) = \overline{N} \left(r, \frac{1}{(f^n P(f))^{(k)}} \right) = N_1 \left(r, \frac{1}{(f^n P(f))^{(k)}} \right).$$

Áp dụng Bổ đề 3.1.2 với $p = 1$ cho hàm $(f^n P(f))$ và bằng lập luận tương tự như trong Bổ đề 3.1.7 ta nhận được

$$\begin{aligned} N_1 \left(r, \frac{1}{(f^n P(f))^{(k)}} \right) &\leq k \overline{N}(r, f^n P(f)) + N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n P(f)} \right) + S(r, f) \\ &\leq k \overline{N}(r, f) + N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n P(f)} \right) + S(r, f) \\ &\leq (m + 2k + 1)T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 1.1.12 (Chương 1) ta có

$$d(n - k - 1)T(r, f) \leq T \left(r, \left((f^n P(f))^{(k)} \right)^d \right) + S(r, f).$$

Kết hợp các bất đẳng thức trên ta nhận được

$$(d(n - k - 1) - 2k - m - 2)T(r, f) \leq \overline{N} \left(r, \frac{1}{((f^n P(f))^{(k)})^d - 1} \right) + S(r, f).$$

Từ $n > k + 1 + \frac{2k+m+2}{d}$ suy ra $((f^n P(f))^{(k)})^{-1}(S) \neq \emptyset$.

Bổ đề 3.1.8 được chứng minh. □

3.2 Phân bố giá trị và tập xác định duy nhất đối với đa thức vi phân của L -hàm và hàm phân hình chia sẻ tập hợp các nghiệm của đơn vị

Định lý 3.2.1. Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng và n, m là các số nguyên dương, $P(z)$ được xác định như trong phương trình (1.3) với các điều kiện (1.4) và (F) ở Chương 1. Giả sử $P(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình. Nếu $k \geq 3$, hoặc $k = 2$ và $\min\{m_1, m_2\} \geq 2$ thì ta có:

1) Nếu $E_{(f^n)^{(m)}}(S) = E_{(g^n)^{(m)}}(S)$, $n \geq m + 2$ và $q > 2k + 6 - \frac{8(n-1)}{n+m}$ thì $f = cg$ với $c^n = 1$.

2) Nếu $E_{f^{(m)}}(S) = E_{g^{(m)}}(S)$, và $q > 2k + 6 - \frac{4m}{m+1}$ thì $f^{(m)} = g^{(m)}$.

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh:

Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng và n, m là các số nguyên dương, $n \geq m + 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} & \Theta\left(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})\right) + \Theta\left(0, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})\right) \\ & \geq \frac{2(n-1)}{n+m}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\Theta(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) \geq \frac{m}{m+1}. \quad (3.2)$$

Chứng minh (3.1).

Vì $n \geq m + 2$ nên $(f^n)^{(m)}$ khác hằng. Viết $(f^n)^{(m)} = f^{n-m}F$. Khi đó

$$\frac{F}{f^m} = \frac{(f^n)^{(m)}}{f^n}.$$

Ta thấy rằng, nếu z_0 là một cực điểm của $\frac{(f^n)^{(m)}}{f^n}$ thì z_0 là một cực điểm hoặc một không điểm của f . Khi đó, theo Bổ đề 3.1.6, nếu a, b lần

lượt là một cực điểm, một không điểm của f thì $\frac{(f^n)^{(m)}}{f^n} = \frac{B}{(z-a)^m}$ và $\frac{(f^n)^{(m)}}{f^n} = \frac{C}{(z-b)^m}$, trong đó $B, C \neq 0$. Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{F}; f \neq 0\right) &= N\left(r, \frac{1}{\frac{F}{f^m}}\right) \leq T\left(r, \frac{F}{f^m}\right) + S(r, f) \\ &\leq N\left(r, \frac{F}{f^m}\right) + m\left(r, \frac{F}{f^m}\right) + S(r, f) \\ &\leq m\bar{N}(r, f) + m\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

Do đó

$$N\left(r, \frac{1}{F}; f \neq 0\right) \leq m\bar{N}(r, f) + m\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f).$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} \bar{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)^{(m)}}\right) &= \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{n-m}F}\right) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}; f \neq 0\right) \\ &\leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\bar{N}(r, f) + m\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f) \\ &\leq (m+1)\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\bar{N}(r, f) + S(r, f). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Theo Bổ đề 3.1.5, nếu a, b lần lượt là một cực điểm, một không điểm của f thì

$$(f^n)^{(m)} = \frac{B_m}{(z-a)^{np+m}}, \quad B_m(a) \neq 0, \quad \text{trong đó } p = \nu_f^\infty(a),$$

$$(f^n)^{(m)} = C_m(z-b)^{nl-m}, \quad C_m(b) \neq 0, \quad \text{trong đó } l = \nu_f^0(b).$$

Vậy

$$\begin{aligned}
N\left(r, \frac{1}{(f^n)_{(m)}}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)_{(m)}}\right) \\
\geq (n-1)(m+1)\overline{N}_{(m+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
+ (n-m-1)\overline{N}_m\left(r, \frac{1}{f}\right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Mặt khác

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \overline{N}_m\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}_{(m+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Từ đây và (3.3), (3.4) ta nhận được

$$\begin{aligned}
\overline{N}_m\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq \frac{1}{n-m-1} \left(N\left(r, \frac{1}{(f^n)_{(m)}}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)_{(m)}}\right) \right. \\
&\quad \left. - (n-1)(m+1)\overline{N}_{(m+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \right), \\
\overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)_{(m)}}\right) &\leq (m+1)\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\overline{N}(r, f) + S(r, f) \\
&\leq (m+1)\overline{N}_m\left(r, \frac{1}{f}\right) + (m+1)\overline{N}_{(m+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&\quad + m\overline{N}(r, f) \\
&\leq (m+1)\overline{N}_{(m+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\overline{N}(r, f) \\
&\quad + \frac{m+1}{n-m-1} \left(N\left(r, \frac{1}{(f^n)_{(m)}}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)_{(m)}}\right) \right. \\
&\quad \left. - (n-1)(m+1)\overline{N}_{(m+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \right).
\end{aligned}$$

Khai triển vế phải và chuyển số hạng chứa $\overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)_{(m)}}\right)$ sang vế

trái, ta thu được:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{m+1}{n-m-1}\right) \overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)^{(m)}}\right) &\leq \frac{m+1}{n-m-1} N\left(r, \frac{1}{(f^n)^{(m)}}\right) \\ &\quad + m\overline{N}(r, f) \\ &\quad + \left(m+1 - \frac{(m+1)^2(n-1)}{n-m-1}\right) \overline{N}_{(m+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right). \end{aligned}$$

Quy đồng về trái, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n-m-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)^{(m)}}\right) &\leq \frac{m+1}{n-m-1} N\left(r, \frac{1}{(f^n)^{(m)}}\right) \\ &\quad + m\overline{N}(r, f) \\ &\quad + \left(m+1 - \frac{(m+1)^2(n-1)}{n-m-1}\right) \overline{N}_{(m+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right). \end{aligned}$$

Để ý rằng

$$m+1 - \frac{(m+1)^2(n-1)}{n-m-1} < 0,$$

ta suy ra

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)^{(m)}}\right) \leq \frac{m+1}{n} N\left(r, \frac{1}{(f^n)^{(m)}}\right) + \frac{m(n-m-1)}{n} \overline{N}(r, f).$$

Hơn nữa, nếu a là một cực điểm của f với bội p thì a là một cực điểm của $(f^n)^{(m)}$ với bội $np + m \geq n + m$. Vậy

$$\frac{1}{n+m} N(r, (f^n)^{(m)}) \geq \overline{N}(r, f), \quad \overline{N}(r, (f^n)^{(m)}) = \overline{N}(r, f).$$

Do đó

$$\overline{N}(r, (f^n)^{(m)}) \leq \frac{1}{n+m} T(r, (f^n)^{(m)}) + S(r, f), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)^{(m)}}\right) &\leq \frac{m+1}{n} T(r, (f^n)^{(m)}) \\ &\quad + \frac{m(n-m-1)}{n(n+m)} T(r, (f^n)^{(m)}) + S(r, f). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tương tự

$$\overline{N}(r, (g^n)^{(m)}) \leq \frac{1}{n+m} T(r, (g^n)^{(m)}) + S(r, f), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{(g^n)^{(m)}}\right) &\leq \frac{m+1}{n(n+m)} T(r, (g^n)^{(m)}) \\ &+ \frac{m(n-m-1)}{n(n+m)} T(r, (g^n)^{(m)}) + S(r, f). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Từ (3.5)-(3.8) ta nhận được

$$\begin{aligned} &\overline{N}\left(r, \frac{1}{(f^n)^{(m)}}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{(g^n)^{(m)}}\right) \\ &+ \overline{N}(r, (f^n)^{(m)}) + \overline{N}(r, (g^n)^{(m)}) \\ &\leq \frac{2(m+1)}{n+m} \left(T(r, (f^n)^{(m)}) + T(r, (g^n)^{(m)})\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\Theta(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) + \Theta(0, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) \geq \frac{2(n-1)}{n+m}.$$

(3.1) được chứng minh.

Chứng minh (3.2). Từ (3.5) ta nhận được

$$\overline{N}(r, f^{(m)}) \leq \frac{1}{m+1} T(r, f^{(m)}) + S(r, f),$$

$$\overline{N}(r, g^{(m)}) \leq \frac{1}{m+1} T(r, g^{(m)}) + S(r, g).$$

Từ đây ta có

$$\overline{N}(r, f^{(m)}) + \overline{N}(r, g^{(m)}) \leq \frac{1}{m+1} (T(r, f^{(m)}) + T(r, g^{(m)})),$$

$$\Theta(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) \geq \frac{m}{m+1}.$$

(3.2) được chứng minh.

Bây giờ ta tiếp tục chứng minh Định lý 3.2.1.

1) Giả sử $E_{(f^n)^{(m)}}(S) = E_{(g^n)^{(m)}}(S)$, $n \geq m+2$, và $q > 2k+6 - \frac{8(n-1)}{n+m}$.

Theo (3.1) ta có

$$\Theta(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) + \Theta(0, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) \geq \frac{2(n-1)}{n+m}.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} 2k+6 - \frac{8(n-1)}{n+m} &\geq 2k+6 \\ &\quad - 4\left(\Theta(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) \right. \\ &\quad \left. + \Theta(0, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)}))\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Kết hợp (3.9) với Định lý 2.3.1 (Chương 2), ta thu được kết luận 1).

2) Giả sử $E_{f^{(m)}}(S) = E_{g^{(m)}}(S)$, và $q > 2k+6 - \frac{4m}{m+1}$ thì $f^{(m)} = g^{(m)}$.

Theo (3.2) ta có

$$\Theta(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) \geq \frac{m}{m+1}.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} 2k+6 - \frac{4m}{m+1} &\geq 2k+6 \\ &\quad - 4\Theta(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Kết hợp (3.10) với Định lý 2.3.1 (Chương 2) ta nhận được Kết luận 2). $\square$

Từ Định lý 3.2.1 ta nhận được các hệ quả sau.

Nhắc lại đa thức $P_K(z)$ được định nghĩa như trong (1.13) với các điều kiện (1.14) và (1.15) ở Chương 1:

$$P_K(z) = (n+m+1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n+m+1-i} z^{n+m+1-i} a^i \right) + 1 = Q_K(z) + 1,$$

với các điều kiện $a \neq 0, Q_K(a) \neq -1$ và $P_K(a) \neq 0$. Theo Định lý 1.1 ([7], trang 469) hoặc Định lý 1.1 ([31], trang 126), $P_K(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình.

Hệ quả 3.2.2. Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng và $P_K(z)$ là đa thức được xác định như trên với S_K lần lượt là tập các không điểm của P_K . Nếu

$$k = 2, \quad \Theta(\infty, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) = 0, \quad \Theta(0, ((f^n)^{(m)}, (g^n)^{(m)})) = 0$$

thì S_K là tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình với ít nhất 11 phân tử.

Hệ quả 3.2.3. Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, n, m là các số nguyên dương, và $P_K(z)$ là đa thức như trên với S_K là tập các không điểm của P_K . Giả sử $E_{(f^n)^{(m)}}(S_K) = E_{(g^n)^{(m)}}(S_K)$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $q \geq 6$ và $n \geq m + 3$, hoặc

ii) $q \geq 7$ và $n \geq m + 2$.

Khi đó $f = cg$ với $c^n = 1$.

Chứng minh. i) Chú ý rằng, $P_K(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình.

Áp dụng Định lý 3.2.1 với $k = 2$ và $q \geq 6, n \geq m + 3$ ta nhận được:

$$q \geq 6 > 10 - \frac{8(n-1)}{n+m}.$$

ii) chứng minh tương tự như phần i). □

Hệ quả 3.2.4. Cho f, g là hai hàm phân hình khác hằng, n, m là các số nguyên dương, và $P_K(z)$ là đa thức được xác định như trên với S_K là tập các không điểm của P_K . Giả sử $E_{f^{(m)}}(S_K) = E_{g^{(m)}}(S_K)$ và một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $q \geq 7$ và $m > 3$;

ii) $q \geq 8$ và $m > 1$;

iii) $q \geq 9$.

Khi đó $f^{(m)} = g^{(m)}$.

Chứng minh. i) Chú ý rằng, $P_K(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình.

Áp dụng Định lý 3.2.1 với $k = 2$ và $q \geq 7$, $m > 3$ ta nhận được:

$$q \geq 7 > 10 - \frac{4m}{m+1}.$$

Các phần khác được chứng minh tương tự như phần i). $\square$

Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán chia sẻ giữa L -hàm và hàm phân hình. Trước tiên chúng ta cần các bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.5. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm, n, m, k là các số nguyên, $m \geq 0$, $k > 0$, và P, Q là các đa thức bậc m . Giả sử $(f^n P(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$ chia sẻ 1 CM, và $n > 3k + m + 3$. Khi đó, ta có một trong các trường hợp sau:

1.

$$i) (n - k - 2)T(r, L) + S(r, L) \leq (m + 2k + 4)T(r, f) + S(r, f),$$

$$ii) (n - k - 4)T(r, f) + S(r, f) \leq (m + k + 2)T(r, L) + S(r, L),$$

$$iii) S(r, f) = o(T(r, L)), \quad S(r, L) = o(T(r, f)).$$

$$2. (L^n Q(L))^{(k)} (f^n P(f))^{(k)} = 1.$$

$$3. (L^n Q(L))^{(k)} = (f^n P(f))^{(k)}.$$

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.1.7 và giả thiết $n > 3k + m + 3$, ta suy ra rằng $(f^n P(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$ là các hàm phân hình khác hằng, đồng thời $S(r, (f^n P(f))^{(k)}) = S(r, f)$ và $S(r, (L^n Q(L))^{(k)}) = S(r, L)$.

Áp dụng Bổ đề 3.1.8 với $d = 1$ cho các hàm $(f^n P(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$, đồng thời chú ý rằng $n > 3k + m + 3$, ta thấy

$$\left((f^n P(f))^{(k)} \right)^{-1} (1) \neq \emptyset \quad \text{và} \quad \left((L^n Q(L))^{(k)} \right)^{-1} (1) \neq \emptyset.$$

Áp dụng Bổ đề 3.1.1 cho các hàm $(f^n P(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$, ta suy ra một trong các trường hợp sau phải xảy ra.

Trường hợp 1.

$$\begin{aligned} T(r, (L^n Q(L))^{(k)}) + S(r, L) &\leq N_2(r, (L^n Q(L))^{(k)}) \\ &\quad + N_2\left(r, \frac{1}{(L^n Q(L))^{(k)}}\right) + N_2(r, (f^n P(f))^{(k)}) \\ &\quad + N_2\left(r, \frac{1}{(f^n P(f))^{(k)}}\right) + S(r, f), \end{aligned} \quad (3.11)$$

và

$$\begin{aligned} T(r, (f^n P(f))^{(k)}) + S(r, f) &\leq N_2(r, (f^n P(f))^{(k)}) \\ &\quad + N_2\left(r, \frac{1}{(f^n P(f))^{(k)}}\right) + N_2(r, (L^n Q(L))^{(k)}) \\ &\quad + N_2\left(r, \frac{1}{(L^n Q(L))^{(k)}}\right) + S(r, L). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Xét bất đẳng thức (3.11). Chú ý rằng, nếu a là một cực điểm của $(L^n Q(L))^{(k)}$ thì a là một cực điểm của L có bội $np + k \geq n + k \geq 2$. Từ đây và Định lý cơ bản thứ nhất, ta có $N_2(r, (L^n Q(L))^{(k)}) = 2\bar{N}(r, L) \leq 2T(r, L) + S(r, L)$. Tương tự, ta có $N_2(r, (f^n P(f))^{(k)}) = 2\bar{N}(r, f) \leq 2T(r, f) + S(r, f)$.

Áp dụng Bổ đề 3.1.2 cho $(L^n Q(L))^{(k)}$ với $p = 2$, ta nhận được:

$$\begin{aligned} N_2\left(r, \frac{1}{(L^n Q(L))^{(k)}}\right) &\leq T\left(r, (L^n Q(L))^{(k)}\right) - T(r, L^n Q(L)) \\ &\quad + N_{k+2}\left(r, \frac{1}{L^n Q(L)}\right) + S(r, L). \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$N_{k+2}\left(r, \frac{1}{L^n Q(L)}\right) \leq N_{k+2}\left(r, \frac{1}{L^n}\right) + N_{k+2}\left(r, \frac{1}{Q(L)}\right).$$

Vì $n > k + 2$ và $Q(z)$ là đa thức bậc m , ta đánh giá được:

$$\begin{aligned}
N_{k+2} \left(r, \frac{1}{Q(L)} \right) &\leq N \left(r, \frac{1}{Q(L)} \right) \leq T(r, Q(L)) + S(r, L) \\
&\leq mT(r, L) + S(r, L), \\
N_{k+2} \left(r, \frac{1}{L^n} \right) &\leq (k+2)\overline{N}(r, L) \\
&\leq (k+2)T(r, L) + S(r, L).
\end{aligned}$$

Từ đó cộng vế theo vế, ta thu được:

$$N_{k+2} \left(r, \frac{1}{L^n Q(L)} \right) \leq (m+k+2)T(r, L) + S(r, L). \quad (3.13)$$

Kết hợp các bất đẳng thức trên, ta suy ra:

$$\begin{aligned}
N_2 \left(r, \frac{1}{(L^n Q(L))^{(k)}} \right) &\leq T \left(r, (L^n Q(L))^{(k)} \right) - T(r, L^n Q(L)) \\
&\quad + (m+k+2)T(r, L) + S(r, L). \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Bằng lập luận hoàn toàn tương tự như quá trình thiết lập (3.13), ta cũng có:

$$N_{k+2} \left(r, \frac{1}{f^n P(f)} \right) \leq (m+k+2)T(r, f) + S(r, f).$$

Do đó, áp dụng Bổ đề 3.1.2 cho $(f^n P(f))^{(k)}$ với $p = 2$, ta nhận được:

$$\begin{aligned}
N_2 \left(r, \frac{1}{(f^n P(f))^{(k)}} \right) &\leq k\overline{N}(r, f^n P(f)) + N_{k+2} \left(r, \frac{1}{f^n P(f)} \right) + S(r, f) \\
&\leq (m+2k+2)T(r, f) + S(r, f). \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Thế (3.13), (3.14) và (3.15) vào (3.11), ta thu được:

$$\begin{aligned}
T(r, (L^n Q(L))^{(k)}) + S(r, L) &\leq T \left(r, (L^n Q(L))^{(k)} \right) - T(r, L^n Q(L)) \\
&\quad + (m+k+2)T(r, L)
\end{aligned}$$

$$+ (m + 2k + 4)T(r, f) + S(r, f). \quad (3.16)$$

Để ý rằng:

$$T(r, L^n Q(L)) + S(r, L) = (n + m)T(r, L) + S(r, L). \quad (3.17)$$

Từ (3.16) và (3.17), giản ước $T(r, (L^n Q(L))^{(k)})$ ở cả hai vế, ta nhận được:

$$(n - k - 2)T(r, L) + S(r, L) \leq (m + 2k + 4)T(r, f) + S(r, f).$$

Vậy ta có kết luận i).

Sử dụng lập luận tương tự như trên đối với hệ thức (3.12), ta nhận được:

$$\begin{aligned} T(r, (f^n P(f))^{(k)}) + S(r, f) &\leq 2T(r, f) + T(r, (f^n P(f))^{(k)}) \\ &\quad - T(r, f^n P(f)) + (m + k + 2)T(r, f) \\ &\quad + (m + k + 2)T(r, L) + S(r, L). \end{aligned}$$

Từ đó dẫn đến:

$$(n - k - 4)T(r, f) + S(r, f) \leq (m + k + 2)T(r, L) + S(r, L).$$

Vậy ta có kết luận ii).

Từ i) và ii), ta dễ dàng suy ra $S(r, f) = o(T(r, L))$ và $S(r, L) = o(T(r, f))$. Đây chính là kết luận iii).

Trường hợp 2. Khả năng thứ hai của Bổ đề 3.1.1 xảy ra, tức là hai hàm phân hình đang xét là nghịch đảo của nhau. Khi đó, ta trực tiếp thu được:

$$(L^n Q(L))^{(k)}(f^n P(f))^{(k)} = 1.$$

Điều này thỏa mãn chính xác kết luận 2 của Bổ đề 3.2.5.

Trường hợp 3. Khả năng thứ ba của Bổ đề 3.1.1 xảy ra, tức là hai

hàm phân hình đang xét đồng nhất với nhau. Khi đó, ta lập tức có:

$$(L^n Q(L))^{(k)} = (f^n P(f))^{(k)}.$$

Điều này thỏa mãn chính xác kết luận 3 của Bổ đề 3.2.5.

Bổ đề 3.2.5 được chứng minh. $\square$

Bổ đề 3.2.6. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm, n, m, k, d là các số nguyên, $m \geq 0, k > 0$, $P(z)$ và $Q(z)$ là đa thức bậc m , và cho $S = \{a \in \mathbb{C} : a^d = 1\}$, $d \geq 2$. Giả sử $(f^n P(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$ chia sẻ S CM và

$$n > k + 1 + \frac{2k + m + 2}{d}.$$

Khi đó, ta có một trong ba trường hợp sau:

1.

- i) $d(n - k - 1)T(r, L) + S(r, L) \leq 2(m + 2k + 2)T(r, f) + S(r, f)$,
- ii) $(d(n - k - 1) - 2)T(r, f) + S(r, f) \leq 2(m + k + 1)T(r, L) + S(r, L)$,
- iii) $S(r, f) = o(T(r, L))$, $S(r, L) = o(T(r, f))$.

2.

$$(L^n Q(L))^{(k)} (f^n P(f))^{(k)} = h, h^d = 1.$$

3.

$$(L^n Q(L))^{(k)} = h(f^n P(f))^{(k)}, h^d = 1.$$

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.1.8 và giả thiết $n > k + 1 + \frac{2k + m + 2}{d}$ ta suy ra $(f^n P(f))^{(k)}$, $(L^n Q(L))^{(k)}$ khác hằng và $((f^n P(f))^{(k)})^{-1}(S) \neq \emptyset$, $((L^n Q(L))^{(k)})^{-1}(S) \neq \emptyset$.

Để đơn giản, ta đặt $F = (L^n Q(L))^{(k)}$, $G = (f^n P(f))^{(k)}$. Khi đó F^d và G^d chia sẻ 1 CM. Chú ý rằng

$$\begin{aligned} S(r, F^d) &= S(r, (L^n Q(L))^{(k)}) = S(r, L), \\ S(r, G^d) &= S(r, (f^n P(f))^{(k)}) = S(r, f). \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 3.1.1 cho các hàm F^d, G^d , ta có một trong các trường hợp sau đúng.

Trường hợp 1.

$$T(r, F^d) + S(r, L) \leq N_2(r, F^d) + N_2\left(r, \frac{1}{F^d}\right) + N_2(r, G^d) + S(r, f). \quad (3.18)$$

và

$$T(r, G^d) + S(r, f) \leq N_2(r, G^d) + N_2\left(r, \frac{1}{G^d}\right) + N_2(r, F^d) + S(r, L). \quad (3.19)$$

Xét (3.18). Từ $d \geq 2$, ta nhận được

$$N_2(r, F^d) = 2\overline{N}(r, F), \quad N_2\left(r, \frac{1}{F^d}\right) = 2N_1\left(r, \frac{1}{F}\right),$$

$$N_2(r, G^d) = 2\overline{N}(r, G), \quad N_2\left(r, \frac{1}{G^d}\right) = 2N_1\left(r, \frac{1}{G}\right).$$

Do đó

$$\begin{aligned} dT(r, F) + S(r, L) &\leq 2\overline{N}(r, F) + 2N_1\left(r, \frac{1}{F}\right) + 2\overline{N}(r, G) \\ &\quad + 2N_1\left(r, \frac{1}{G}\right) + S(r, f). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Bằng lập luận tương tự như trong Bổ đề 3.1.7 và Bổ đề 3.2.5 ta nhận được

$$d(n - k - 1)T(r, L) + S(r, L) \leq dT(r, F) + S(r, L).$$

$$\overline{N}(r, F) = S(r, L), \quad \overline{N}(r, G) \leq T(r, f) + S(r, f). \quad (3.21)$$

và

$$\begin{aligned} 2N_1\left(r, \frac{1}{F}\right) &\leq 2k\overline{N}(r, L^n Q(L)) + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{L^n Q(L)}\right) \\ &\leq 2(m + k + 1)T(r, L) + S(r, L). \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
N_{k+1} \left(r, \frac{1}{L^n Q(L)} \right) &\leq N_{k+1} \left(r, \frac{1}{L^n} \right) + N_{k+1} \left(r, \frac{1}{Q(L)} \right) \\
&\leq (m+k+1)T(r, L) + S(r, L), \\
T(r, L^n Q(L)) &= (n+m)T(r, L) + S(r, L), \\
N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n Q(f)} \right) &\leq (m+k+1)T(r, f) + S(r, f).
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
2N_1 \left(r, \frac{1}{G} \right) &\leq 2 \left(k\overline{N}(r, f^n P(f)) + N_{k+1} \left(r, \frac{1}{f^n P(f)} \right) \right) \\
&\leq 2(m+2k+1)T(r, f) + S(r, f).
\end{aligned}$$

Từ đây và (3.20), (3.21) ta có

$$\begin{aligned}
&(d-2)T(r, f) + (2n-2k-2)T(r, L) + S(r, L) \\
&\leq 2(m+2k+2)T(r, f) + S(r, f), \\
&((d-2)(n-k-1) + 2n-2k-2)T(r, L) + S(r, L) \\
&\leq 2(m+2k+2)T(r, f) + S(r, f).
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$d(n-k-1)T(r, L) + S(r, L) \leq 2(m+2k+2)T(r, f) + S(r, f).$$

Như vậy i) được chứng minh.

Bây giờ ta xét (3.19). Bằng lập luận tương tự như trong (3.18) đối với (3.19) ta có

$$\begin{aligned}
dT(r, G) + S(r, f) &\leq 2\overline{N}(r, G) + 2N_1 \left(r, \frac{1}{G} \right) + 2\overline{N}(r, F) \\
&\quad + 2\overline{N}(r, F) + 2N_1 \left(r, \frac{1}{F} \right) + S(r, L),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\overline{N}(r, G) &\leq 2T(r, f) + S(r, f), \\
2N_1\left(r, \frac{1}{G}\right) &\leq 2(T(r, G) - T(r, f^n P(f))) \\
&\quad + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{f^n P(f)}\right) + S(r, f), \\
2\overline{N}(r, F) &= S(r, L), \\
2N_1\left(r, \frac{1}{F}\right) &\leq 2k\overline{N}(r, L^n Q(L)) + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{L^n Q(L)}\right) \\
&\leq 2(m + k + 1)T(r, L) + S(r, L).
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}
&((d - 2)(n - k - 1) + 2n - 2k - 4)T(r, f) + S(r, f) \\
&\leq 2(m + k + 1)T(r, L) + S(r, L), \\
&(d(n - k - 1) - 2)T(r, f) + S(r, f) \\
&\leq 2(m + k + 1)T(r, L) + S(r, L).
\end{aligned}$$

(ii) được chứng minh.

Từ (i) và (ii) ta suy ra (iii).

Trường hợp 2. $F^d G^d = 1$. Từ đây suy ra

$$(F \cdot G)^d = 1, \quad F \cdot G = h, \quad h^d = 1.$$

Vậy

$$(L^n Q(L))^{(k)} (f^n P(f))^{(k)} = h, \quad h^d = 1.$$

Trường hợp 3. $F^d = G^d$. Từ đây suy ra

$$F = hG, \quad h^d = 1. \text{ Do đó}$$

$$(L^n Q(L))^{(k)} = h(f^n P(f))^{(k)}, \quad h^d = 1.$$

Bổ đề 3.2.6 được chứng minh. □

Bổ đề 3.2.7. Cho n, m, k là các số nguyên, $m \geq 0$, $n > m + 2$, $k > 0$,

$P(z)$ và $Q(z)$ là các đa thức bậc m . Giả sử f là một hàm phân hình khác hằng và L là một L -hàm. Nếu $(L^n Q(L))^{(k)} = h(f^n P(f))^{(k)}$, trong đó $h^d = 1$, thì $L^n Q(L) = hf^n P(f)$.

Chứng minh. Ta có

$$L^n Q(L) = hf^n P(f) + s, \text{ trong đó } s \text{ là một đa thức có bậc } < k.$$

Ta chứng minh $s \equiv 0$. Giả sử phản chứng rằng $s \not\equiv 0$. Kết hợp với Bổ đề 1.1.18 (Chương 1), ta suy ra

$$T(r, s) = S(r, L), \quad T(r, L) + S(r, L) = T(r, f), \quad S(r, L) = S(r, f).$$

Áp dụng hai Định lý cơ bản cho hàm $\frac{L^n Q(L)}{s}$ với các giá trị $\infty, 0, 1$, ta nhận được

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{L^n Q(L)}{s}\right) &\leq \overline{N}\left(r, \frac{L^n Q(L)}{s}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{L^n Q(L)}{s}}\right) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{L^n Q(L)}{s} - 1}\right) + S\left(r, \frac{L^n Q(L)}{s}\right). \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{L^n Q(L)}{s}\right) &= (n + m)T(r, L) + S(r, L), \\ \overline{N}\left(r, \frac{L^n Q(L)}{s}\right) &= S(r, L), \\ \overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{L^n Q(L)}{s}}\right) &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{L}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{Q(L)}\right) \\ &\leq T(r, L) + mT(r, L) + S(r, L) \\ &= (m + 1)T(r, L) + S(r, L), \\ \overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{L^n Q(L)}{s} - 1}\right) &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{hf^n P(f)}{s}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) \\
&\leq (m+1)T(r, f) + S(r, f), \\
S\left(r, \frac{L^n Q(L)}{s}\right) &= S(r, L).
\end{aligned}$$

Từ các bất đẳng thức trên suy ra rằng

$$(n - m - 2)T(r, L) \leq S(r, L),$$

mâu thuẫn với giả thiết $n > m + 2$. Vậy $s \equiv 0$.

Bổ đề 3.2.7 được chứng minh. $\square$

Bổ đề 3.2.8. Cho a, b, c, u là các hằng số phức khác không, n và m là các số nguyên dương, $n \geq m + 3$. Đặt

$$R(z) = az^n + bz^{n-m}, \quad T(z) = uz^n + vz^{n-m}.$$

i) Nếu $R(L) = T(f)$ với $L \in \mathcal{S}$ và $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ thì $f = hL$, trong đó h là hằng số, thỏa mãn $h^n = \frac{a}{u}, h^{n-m} = \frac{b}{v}$.

ii) Nếu $\gcd(n, m) = 1, c = a, u = b$, và $R(L) = T(f)$ với $L \in \mathcal{S}$ và $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ thì $f = L$.

iii) Nếu $R(L_1) = T(L_2)$ với $L_j \in \mathcal{S} (j = 1, 2)$ thì $L_1 = L_2$ và $a = u, b = v$.

Chứng minh. Đặt

$$P(z) = R(z) + 1, \quad Q(z) = T(z) + 1. \quad (3.22)$$

Bằng lập luận tương tự trong phương trình (1.27) Chương 1 cho phương trình (3.22) với $t = c = 1, l = 1$, khi đó ta nhận được khẳng định của Bổ đề 3.2.8. $\square$

Ta dùng các bổ đề trên để chứng minh định lý sau đây. Một mở rộng của Định lý 1.1 [48] của F. Liu, X.-M. Li và H.-X. Yi năm 2017.

Định lý 3.2.9. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương, và cho S là tập các nghiệm của đơn vị bậc d . Giả sử rằng $(f^n)^{(k)}$ và $(L^n)^{(k)}$ chia sẻ S CM. Khi đó $f = tL$, trong đó $t^{nd} = 1$, nếu một trong hai điều kiện sau thỏa mãn:

- 1) $d = 1$ và $n > 3k + 6$;
- 2) $d \geq 2$, và $n > k + 1 + \frac{4k+4}{d}$.

Chứng minh. Ta xét các điều kiện sau:

Điều kiện 1. $d = 1$ và $n > 3k + 6$. Áp dụng Bổ đề 3.2.5 với $m = 0$ ta có một trong ba hệ thức sau đúng:

1.
 - i) $d(n - k - 1)T(r, L) + S(r, L) \leq (4k + 4)T(r, f) + S(r, f)$,
 - ii) $(d(n - k - 1) - 2)T(r, f) + S(r, f) \leq (2k + 2)T(r, L) + S(r, L)$,
 - iii) $S(r, f) = o(T(r, L))$, $S(r, L) = o(T(r, f))$;
2. $(L^n)^{(k)}(f^n)^{(k)} = h$, $h^d = 1$;
3. $(L^n)^{(k)} = h(f^n)^{(k)}$, $h^d = 1$.

Ta sẽ chứng minh 1. và 2. không xảy ra.

Giả sử 1. xảy ra. Với r sao cho $T(r, f) \leq T(r, L)$, từ

$$(n - k - 2)T(r, L) + S(r, L) \leq (2k + 4)T(r, f) + S(r, f)$$

ta suy ra rằng

$$(n - k - 2)T(r, L) + S(r, L) \leq (2k + 4)T(r, L) + S(r, L),$$

$$(n - 3k - 6)T(r, L) \leq S(r, L).$$

Với r sao cho $T(r, L) \leq T(r, f)$, từ $(n - k - 4)T(r, f) + S(r, f) \leq (k + 2)T(r, f) + S(r, f)$ suy ra $(n - 2k - 6)T(r, f) \leq S(r, f)$.

Mâu thuẫn với giả thiết $n > 3k + 6$.

Bây giờ giả sử ta có 2.

$$(L^n)^{(k)}(f^n)^{(k)} = 1.$$

Từ $n > 3k + 6 > 2k$, áp dụng Bổ đề 3.1.3 ta nhận được $L = c_1 e^{cz}$ và $f = c_2 e^{-cz}$, trong đó c_1, c_2, c là các hằng số khác không thỏa mãn $(-1)^k (c_1 c_2)^n (nc)^{2k} = 1$. Điều này suy ra L không có không điểm, mâu thuẫn với Bổ đề 1.1.16 (Chương 1).

Vậy ta có $(L^n)^{(k)} = (f^n)^{(k)}$. Từ $n > 3k + 6 \geq 9 > 3$, khi đó áp dụng Bổ đề 3.2.7 ta nhận được $L^n = f^n$. Vậy $f = tL$ với t là một hằng số thỏa mãn $t^n = 1$.

Điều kiện 2. $d \geq 2$, và $n > k + 1 + \frac{4k + 4}{d}$.

Áp dụng Bổ đề 3.2.6 với $m = 0$ ta nhận được một trong ba hệ thức sau đúng:

1.

- i) $d(n - k - 1)T(r, L) + S(r, L) \leq (4k + 4)T(r, f) + S(r, f)$,
- ii) $(d(n - k - 1) - 2)T(r, f) + S(r, f) \leq (2k + 2)T(r, L) + S(r, L)$,
- iii) $S(r, f) = o(T(r, L))$, $S(r, L) = o(T(r, f))$;

2. $(L^n)^{(k)}(f^n)^{(k)} = h$, $h^d = 1$;

3. $(L^n)^{(k)} = h(f^n)^{(k)}$, $h^d = 1$.

Ta sẽ chứng minh 1. và 2. không xảy ra.

Giả sử 1. xảy ra. Với r sao cho $T(r, f) \leq T(r, L)$, từ $d(n - k - 1)T(r, L) + S(r, L) \leq (4k + 4)T(r, f) + S(r, f)$ ta suy ra

$$\begin{aligned} d(n - k - 1)T(r, L) + S(r, L) &\leq (4k + 4)T(r, L) + S(r, L), \\ (d(n - k - 1) - 4k - 4)T(r, L) &\leq S(r, L). \end{aligned}$$

Với r sao cho $T(r, L) \leq T(r, f)$, từ $(d(n - k - 1) - 2)T(r, f) + S(r, f) \leq (2k + 2)T(r, L) + S(r, L)$ ta suy ra

$$(d(n - k - 1) - 2k - 4)T(r, f) \leq S(r, f).$$

Mâu thuẫn với $n > k + 1 + \frac{4k + 4}{d}$.

Bây giờ giả sử ta có

$$(L^n)^{(k)}(f^n)^{(k)} = h, \quad h^d = 1.$$

Đặt $l^{2n} = h$. Khi đó

$$\left(\left(\frac{L}{l}\right)^n\right)^{(k)} \left(\left(\frac{f}{l}\right)^n\right)^{(k)} = 1. \quad (3.23)$$

Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $k = 1$. Khi đó $n > 2 + \frac{8}{d} > 2$. Từ Bổ đề 3.1.3 và bằng lập luận tương tự như khi xét phương trình $(L^n)^{(k)}(f^n)^{(k)} = 1$ ở Điều kiện 1 ta thấy mâu thuẫn.

Trường hợp 2. $k \geq 2$. Xét (3.23). Theo kết quả của Whittaker [63], ta có

$$\rho(f) = \rho(f^n) = \rho((f^n)^{(k)}) = 1,$$

$$\rho((L^n)^{(k)}) = \rho(L^n) = \rho(L) = 1.$$

Từ đây suy ra f là hàm phân hình siêu việt. Từ Bổ đề 3.1.1, phần ii), và vì một L -hàm có nhiều nhất là một cực điểm tại $z = 1$, ta suy ra rằng $(f^n)^{(k)}$ có nhiều nhất là một không điểm tại $z = 1$. Mặt khác, $k \geq 2$, và theo Bổ đề 3.1.4, f có hữu hạn cực điểm. Do đó $(L^n)^{(k)}$ có hữu hạn không điểm. Từ $n > k + 1$ và L có vô hạn không điểm ta nhận được $(L^n)^{(k)}$ có vô hạn không điểm. Mâu thuẫn. Vậy 2. không xảy ra.

Vậy ta chỉ có 3. Khi đó ta có

$$\left(\left(\frac{L}{l}\right)^n\right)^{(k)} = \left(\left(\frac{f}{1/l}\right)^n\right)^{(k)}. \quad (3.24)$$

Từ $n > k + 1 + \frac{4k+4}{d} > 2$, khi đó áp dụng Bổ đề 3.2.7 cho (3.24) ta nhận được

$$\left(\frac{1}{l}L\right)^n = (lf)^n, \quad L^n = hf^n, \quad h^d = 1.$$

Bằng lập luận tương tự như 1. ta nhận được $f = tL$ với t là một hằng số thỏa mãn $t^{nd} = 1$. $\square$

Chú ý rằng, từ Phần 1 của Định lý 3.2.9 ta nhận được Định lý 1.1 [48] của F. Liu, X.-M. Li và H.-X. Yi năm 2017 sau đây.

Hệ quả 3.2.10. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương. Giả sử rằng $(f^n)^{(k)}$ và $(L^n)^{(k)}$ chia sẻ 1 CM. Khi đó $f = tL$, trong đó $t^n = 1$, nếu $d = 1$ và $n > 3k + 6$.

Định lý sau đây là mở rộng của Định lý 1.10 [43] của Li X.-M., Liu F. và Yi H.-X. năm 2019.

Định lý 3.2.11. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, m, k là các số nguyên dương, $k \geq 2, a, b, c, u \in \mathbb{C}, a, b, c, u \neq 0$, và S là tập các nghiệm bậc d của đơn vị. Giả sử hai hàm $(L^n(cL^m + u))^{(k)}$ và $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ chia sẻ tập S CM, ta nhận được $f = tL$ với t là một hằng số sao cho $t^{(n+m)d} = \frac{c^d}{a^d}$ và $t^{nd} = \frac{u^d}{b^d}$, nếu một trong hai điều kiện sau thỏa mãn:

1) $d = 1, n > 3k + m + 6$;

2) $d \geq 2, n > \max \left\{ k + 1 + \frac{4k + 2m + 4}{d}, m + 2 \right\}$.

Đặc biệt, nếu $a = c, b = u, \gcd(n, m) = 1$ và $d = 1$ thì $f = L$.

Chứng minh. 1) Giả sử $d = 1, n > 3k + m + 6$.

Theo Bổ đề 3.2.5, từ giả thiết hai hàm $(L^n(cL^m + u))^{(k)}$ và $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ chia sẻ tập S CM, ta nhận được một trong ba hệ thức sau đúng:

1.

i) $(n - k - 2)T(r, L) + S(r, L) \leq (m + 2k + 4)T(r, f) + S(r, f)$,

ii) $(n - k - 4)T(r, f) + S(r, f) \leq (m + k + 2)T(r, L) + S(r, L)$,

iii) $S(r, f) = o(T(r, L)), S(r, L) = o(T(r, f))$;

2. $(L^n(cL^m + u))^{(k)} (f^n(af^m + b))^{(k)} = 1$;

3. $(L^n(cL^m + u))^{(k)} = (f^n(af^m + b))^{(k)}$.

Nếu các hệ thức trong 1. hoặc 2. đúng, thì bằng lập luận tương tự như như trong phần chứng minh mục 1 và 2 của Định lý 3.2.9 ta thấy mâu thuẫn với giả thiết $n > 3k + m + 6$.

Vậy ta chỉ có đẳng thức trong 3. Khi đó áp dụng Bổ đề 3.2.7 ta nhận được

$$L^n(cL^m + u) = f^n(af^m + b).$$

Áp dụng Bổ đề 3.2.8 ta nhận được $f = tL$ với t là một hằng số sao cho $t^{n+m} = \frac{c}{a}$ và $t^n = \frac{u}{b}$.

2) Giả sử $d \geq 2$ và $n > \max \left\{ k + 1 + \frac{4k+2m+4}{d}, m + 2 \right\}$.

Từ giả thiết hai hàm $(L^n(cL^m + u))^{(k)}$ và $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ chia sẻ tập S CM. Khi đó, áp dụng Bổ đề 3.2.6 cho các hàm $(L^n(cL^m + u))^{(k)}$ và $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ ta nhận được một trong ba trường hợp sau:

1.

$$i) d(n - k - 1)T(r, L) + S(r, L) \leq 2(m + 2k + 2)T(r, f) + S(r, f),$$

$$ii) (d(n - k - 1) - 2)T(r, f) + S(r, f) \leq 2(m + k + 1)T(r, L) + S(r, L),$$

$$iii) S(r, f) = o(T(r, L)), S(r, L) = o(T(r, f));$$

$$2. (L^n(cL^m + u))^{(k)} (f^n(af^m + b))^{(k)} = h, \quad h^d = 1;$$

$$3. (L^n(cL^m + u))^{(k)} = h (f^n(af^m + b))^{(k)}, \quad h^d = 1.$$

Nếu các hệ thức ở mục 1 hoặc 2 xảy ra, thì bằng lập luận tương tự như chứng minh của 1. và 2. của Định lý 3.2.9 ta thấy mâu thuẫn với giả thiết $n > \max \left\{ k + 1 + \frac{4k + 2m + 4}{d}, m + 2 \right\}$.

Do đó, ta có đẳng thức 3. Khi đó, áp dụng Bổ đề 3.2.7 ta nhận được

$$L^n(cL^m + u) = hf^n(af^m + b), \quad h^d = 1,$$

$$cL^{n+m} + uL^n = ahf^{n+m} + bhf^n.$$

Theo Bổ đề 3.2.8, từ các phương trình trên ta nhận được $f = tL$ với t là một hằng số sao cho $t^{(n+m)d} = \frac{c^d}{a^d}$ và $t^{nd} = \frac{u^d}{b^d}$.

Nếu $a = c, b = u, \gcd(n, m) = 1$ và $d = 1$ thì $t = 1$. Do đó $f = L$. $\square$

Định lý 3.2.11 cho ta Hệ quả 3.2.12 sau đây. Hệ quả 3.2.12 là Định lý 1.10 [43] của X.-M. Li, F. Liu và H.-X. Yi năm 2019.

Hệ quả 3.2.12. Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, k là các số nguyên dương, $n > 3k + 9, k \geq 2$. Nếu $(f^n(f - 1))^{(k)}$ và $(L^n(L - 1))^{(k)}$ chia sẻ 1 CM thì $f = L$.

Thật vậy, áp dụng Phần 1 của Định lý 3.2.11 với $m = 1, a = 1, c = 1, b = -1, u = -1$ ta nhận được Hệ quả 3.2.12.

Định lý sau đây cho ta mối liên hệ giữa hàm phân hình với L -hàm khi đa thức vi phân của chúng chia sẻ tập nghiệm của đơn vị và liên quan đến đa thức duy nhất.

Định lý 3.2.13. *Cho f là một hàm phân hình khác hằng, L là một L -hàm khác hằng, n, m, k là các số nguyên dương, $k \geq 2, S$ là tập nghiệm bậc d của đơn vị, và cho $Q(z)$ là một đa thức bậc m . Giả sử rằng $(f^n Q(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$ chia sẻ S CM. Khi đó $f = L$ nếu một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

1) $d = 1, n > 3k + m + 6$ và $z^n Q(z)$ là một đa thức duy nhất cho các hàm phân hình;

2) $d \geq 2, n > \max \left\{ k + 1 + \frac{4k+2m+4}{d}, m + 2 \right\}$, và $z^n Q(z)$ là một đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình.

Chứng minh. 1) $d = 1$ và $n > 3k + m + 6$.

Áp dụng Bổ đề 3.2.5 cho các hàm $(L^n Q(L))^{(k)}$ và $(f^n Q(f))^{(k)}$, và bằng lập luận tương tự như trong chứng minh của trường hợp $d = 1$ của Định lý 3.2.11, ta chỉ nhận được trường hợp

$$(L^n Q(L))^{(k)} = (f^n Q(f))^{(k)}.$$

Khi đó, theo Bổ đề 3.2.7 ta nhận được

$$L^n Q(L) = f^n Q(f).$$

Từ $z^n Q(z)$ là đa thức duy nhất cho các hàm phân hình ta có $f = L$.

2) $d \geq 2, n > \max \left\{ k + 1 + \frac{4k + 2m + 4}{d}, m + 2 \right\}$.

Bằng lập luận tương tự như trong chứng minh của trường hợp $d \geq 2$ của Định lý 3.2.11 ta chỉ nhận được hệ thức sau:

$$(L^n Q(L))^{(k)} = h(f^n Q(f))^{(k)}, \quad h^d = 1.$$

Khi đó, theo Bổ đề 3.2.7 ta nhận được

$$L^n Q(L) = h f^n Q(f).$$

Từ $z^n Q(z)$ là đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình ta suy ra $f = L$. □

Kết luận Chương 3

Trong Chương 3, luận án đã mở rộng định hướng nghiên cứu về lý thuyết phân bố giá trị và tính duy nhất đối với L -hàm và hàm phân hình dưới sự tác động của toán tử vi phân. Các kết quả trọng tâm đã đạt được bao gồm:

1. Khảo sát bài toán chia sẻ tập hợp của các đa thức vi phân sinh bởi hai hàm phân hình. Thông qua việc phát biểu và chứng minh **Định lý 3.2.1** cùng các hệ quả tương ứng, luận án đã thiết lập thành công các tập xác định duy nhất hữu hạn cho các đa thức vi phân có dạng $(f^n)^{(m)}$ và $f^{(m)}$ dựa trên nền tảng của đa thức duy nhất mạnh và các đánh giá về giá trị khuyết Nevanlinna.

2. Nghiên cứu sâu về quan hệ duy nhất giữa một L -hàm và một hàm phân hình khi các đa thức vi phân của chúng chia sẻ tập các nghiệm của đơn vị (tập S). Bằng việc phát biểu và chứng minh **Định lý 3.2.9** và **Định lý 3.2.11**, luận án đã xác định được các hệ thức liên hệ cụ thể (có dạng $f = tL$). Những định lý này là sự khái quát hóa, mở rộng và cải tiến trực tiếp các kết quả quan trọng đã biết trước đây của F. Liu, X.-M. Li và H.-X. Yi [48] và X.-M. Li, F. Liu và H.-X. Yi [43].

3. Thiết lập mối liên hệ chặt chẽ giữa đa thức duy nhất (hoặc đa thức duy nhất mạnh) và bài toán chia sẻ tập hợp của các biểu thức vi phân dạng $(f^n Q(f))^{(k)}$ và $(L^n Q(L))^{(k)}$. Kết quả của **Định lý 3.2.13** đã khẳng định sự đồng nhất $f = L$ dưới các điều kiện ràng buộc cụ thể về bậc của đa thức và lực lượng của tập chia sẻ, qua đó làm phong phú thêm các tiêu chuẩn nhận biết tính duy nhất của L -hàm.

Kết luận chung

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu bài toán xác định duy nhất cho các L -hàm thuộc lớp Selberg $\mathcal{S}$ và các hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ thông qua việc chia sẻ các tập hợp hữu hạn và đa thức vi phân.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Nghiên cứu vấn đề duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm thông qua việc thiết lập điều kiện đủ để một đa thức là đa thức duy nhất (**Định lý 1.2.3**). Từ đó, xây dựng thành công lớp các tập xác định duy nhất hữu hạn S chỉ với 5 phần tử cho cặp hàm (L, f) (**Định lý 1.2.4**, **Hệ quả 1.2.5** và **Định lý 1.3.2**).

2. Mở rộng bài toán duy nhất cho trường hợp tổng quát và tối ưu hóa lực lượng tập duy nhất dựa trên các đặc tính giải tích. Cụ thể, đã thiết lập các định lý duy nhất khi chia sẻ một hoặc hai tập hữu hạn (**Định lý 2.2.1** và **Định lý 2.2.6**) và chứng minh rằng lực lượng của tập xác định duy nhất hữu hạn S có thể được thu gọn đáng kể khi hàm phân hình có các giá trị khuyết Nevanlinna (**Định lý 2.3.1**, **Hệ quả 2.3.2** và **Hệ quả 2.3.3**).

3. Giải quyết bài toán duy nhất đối với các toán tử vi phân bậc cao. Luận án đã xác lập tính duy nhất cho đạo hàm cấp cao (**Định lý 3.2.1** và **Định lý 3.2.9**) cùng các cấu trúc đa thức vi phân phức tạp dạng $(f^n(af^m + b))^{(k)}$ và $(f^nQ(f))^{(k)}$ (**Định lý 3.2.11** và **Định lý 3.2.13**) khi chúng chia sẻ tập các nghiệm của đơn vị với L -hàm.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo:

1. Nghiên cứu một số dạng định lý duy nhất mới cho L -hàm và hàm phân hình.

2. Tiếp tục nghiên cứu vấn đề duy nhất cho L -hàm và đường cong chỉnh hình.

Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án

1. [3] An V. H., Lai N. X., Phuong N. D. (2021), Uniqueness of Meromorphic Functions with Deficient values and unique range sets of small cardinalities, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, 52, pp. 13–28.
2. [34] Khoai H. H., An V. H., Phuong N. D. (2023), On value distribution of L -functions sharing finite sets with meromorphic functions, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, Vol. 66(114), No. 3, pp. 265–280.
3. [4] An V. H., Khoai H. H., Phuong N. D. (2024), On value sharing of certain differential polynomials of meromorphic functions and L -functions, *The Journal of Analysis*, Vol. 32, pp. 2485–2502.
4. [5] An V. H., Phuong N. D. (2025), The linear dependency of L -functions and meromorphic functions sharing finite sets, *J. Math. Math. Sci.*, pp. 57–72.

Tài liệu tham khảo

- [1] Ahlfors L. (1935), Zur Theorie der Überlagerungsflächen, *Acta Mathematica*, 65(1), pp. 157–194.
- [2] An T. T. H., Phuong N. V. (2017), Uniqueness theorems for differential polynomials sharing a small function, *Comput. Methods Funct. Theory*, 17, pp. 613–634.
- [3] An V. H., Lai N. X., Phuong N. D. (2021), Uniqueness of Meromorphic Functions with Deficient values and unique range sets of small cardinalities, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, 52, pp. 13–28.
- [4] An V. H., Khoai H. H., Phuong N. D. (2024), On value sharing of certain differential polynomials of meromorphic functions and L -functions, *The Journal of Analysis*, 32, pp. 2485–2502.
- [5] An V. H., Phuong N. D. (2025), The linear dependency of L -functions and meromorphic functions sharing finite sets, *J. Math. Math. Sci.*, pp. 57–72.
- [6] Banerjee A. (2007), On a question of Gross, *J. Math. Anal. Appl.*, 327, pp. 1273–1283.
- [7] Banerjee A. (2015), A new class of strong uniqueness polynomial satisfying Fujimoto’s conditions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 40, pp. 465–474.
- [8] Banerjee A., Kundu A. (2023), On uniqueness of L -functions in terms of zeros of strong uniqueness polynomial, *Cubo, A Mathematical Journal*, 25(03), pp. 497–514.

- [9] Carlson J., Griffiths P. (1972), A defect relation for equidimensional holomorphic mappings between algebraic varieties, *Annals of Mathematics*, 95(3), pp. 557–584.
- [10] Cartan H. (1933), Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, *Mathematica (Cluj)*, 7, pp. 5–31.
- [11] Dethloff G., Tan T. V. (2006), Uniqueness problem for meromorphic mappings with truncated multiplicities and moving targets, *Nagoya Math. J.*, 181, pp. 75–101.
- [12] Boutabaa A., Escassut A. (2000), Unique range sets for p -adic meromorphic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(6), pp. 1649–1657.
- [13] Fang M. L., Hong W. (2001), A unicity theorem for entire functions concerning differential polynomials, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 32(9), pp. 1343–1348.
- [14] Frank G., Reinders M. (1998), A unique range set for meromorphic functions with 11 elements, *Compl. Var. Theory Appl.*, 37(1), pp. 185–193.
- [15] Fujimoto H. (1975), The uniqueness problem of meromorphic maps into the complex projective space, *Nagoya Math. J.*, 58, pp. 1–23.
- [16] Fujimoto H. (2000), On uniqueness of meromorphic functions sharing finite sets, *Amer. J. Math.*, 122, pp. 1175–1203.
- [17] Fujimoto H. (2003), On uniqueness polynomials for meromorphic functions, *Nagoya Math. J.*, 170, pp. 33–46.
- [18] Goldberg A. A., Ostrovskii I. V. (2008), *Value Distribution of Meromorphic Functions*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 236.

- [19] Griffiths P. (1976), *Entire Holomorphic Mappings in One and Several Complex Variables*, Annals of Mathematics Studies, No. 85, Princeton University Press.
- [20] Gross F. (1972), *Factorization of Meromorphic Functions*, Mathematics Research Center, Naval Research Laboratory, Washington D.C.
- [21] Gross F. (1977), Factorization of meromorphic functions and some open problems, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 599, Springer, Berlin.
- [22] Gundersen G. G. (1979), Meromorphic functions that share three or four values, *Journal of the London Mathematical Society*, s2-20(3), pp. 457–466.
- [23] Gundersen G. G. (1983), Meromorphic functions that share four values, *Transactions of the American Mathematical Society*, 277(2), pp. 545–567.
- [24] Hayman W. K. (1964), *Meromorphic Functions*, Clarendon, Oxford.
- [25] Hayman W. K. (1967), *Research Problems in Function Theory*, Athlone Press, London.
- [26] Kaczorowski J., Molteni G., Perelli A. (2006), Linear independence of L -functions, *Forum Math.*, 18(1), pp. 1–7.
- [27] Khoai H. H. (1983), On p -adic meromorphic functions, *Duke Math. J.*, 50(3), pp. 695–711.
- [28] Khoai H. H. (2005), Some remarks on the genericity of unique range sets for meromorphic functions, *Sci. China Ser. A: Mathematics*, 48, pp. 262–267.
- [29] Khoai H. H., An V. H. (2005), On the number of elements of unique range sets for meromorphic functions, *International Journal of Mathematics*, 16(05), pp. 437–450.

- [30] Khoai H. H., An V. H., Hoa P. N. (2017), On functional equations for meromorphic functions and applications, *Arch. Math.*, 109, pp. 539–549.
- [31] Khoai H. H., An V. H., Lai N. X. (2018), Strong uniqueness polynomials of degree 6 and unique range sets for powers of meromorphic functions, *International Journal of Mathematics*, 29(5), pp. 122–140.
- [32] Khoai H. H., An V. H., Ninh L. Q. (2021), Value-sharing and uniqueness for L -functions, *Ann. Polonici Math.*, 126(3), pp. 265–278.
- [33] Khoai H. H., An V. H., Ninh L. Q. (2022), Uniqueness of holomorphic mappings concerning a question of Gross, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 67(7), pp. 1698–1711.
- [34] Khoai H. H., An V. H., Phuong N. D. (2023), On value distribution of L -functions sharing finite sets with meromorphic functions, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, 66(114), No. 3, pp. 265–280.
- [35] Lahiri I. (2001), Weighted sharing and uniqueness of meromorphic functions, *Nagoya Math. J.*, 161, pp. 193–206.
- [36] Langley J. K. (2003), The second derivative of a meromorphic function finite order, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 35(1), pp. 97–108.
- [37] Le Van Thiem (1948), Sur le problème d’inversion de la théorie des fonctions méromorphes, *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 65, pp. 149–183.
- [38] Li P., Yang C.-C. (1995), Some further results on the unique range sets of meromorphic functions, *Kodai Math. J.*, 18, pp. 437–450.
- [39] Li X.-M., Yi H.-X. (2004), Meromorphic functions sharing three values, *J. Math. Soc. Japan*, 56(1), pp. 147–167.

- [40] Li B. Q. (2014), On the uniqueness of L-functions sharing a set of values, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 412(2), pp. 775–784.
- [41] Li X.-M., Yi H.-X. (2014), Remarks on value sharing of certain differential polynomials of meromorphic functions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 90, pp. 427–443.
- [42] Li B. Q. (2019), Unicity of L-functions concerning differential polynomials, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 42(3), pp. 917–929.
- [43] Li X.-M., Liu F., Yi H.-X. (2019), Results on L -functions of certain differential polynomials sharing one finite value, *Filomat*, 33(18), pp. 5767–5776.
- [44] Li Y., Lin W. (2022), Set sharing results for derivatives of meromorphic functions, *J. Math. Res. Appl.*, 42(6), pp. 587–598.
- [45] Li B. Q. (2014), On uniqueness of L-functions sharing values, *Arch. Math. (Basel)*, 102(3), pp. 263–272.
- [46] Li B. Q. (2019), On uniqueness of L-functions and their derivatives sharing values, *J. Math. Anal. Appl.*, 475(2), pp. 1162–1174.
- [47] Lin P., Lin W. (2016), Value distribution of L -functions concerning sharing sets, *Filomat*, 30(14), pp. 3795–3806.
- [48] Liu F., Li X.-M., Yi H.-X. (2017), Value distribution of L -functions concerning shared values and certain differential polynomials, *Proceedings of the Japan Academy, Series A*, 93(5), pp. 41–46.
- [49] Mues E. (1989), Bemerkungen zum Vier-Werte-Satz, *Complex Variables, Theory and Application*, 12(1-4), pp. 5–9.

- [50] Mues E., Steinmetz N. (1979), Meromorphe Funktionen, die mit ihrer Ableitung Werte teilen, *Manuscripta Mathematica*, 29, pp. 195–206.
- [51] Nevanlinna R. (1926), Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen, *Acta Mathematica*, 48, pp. 367–391.
- [52] Ojeda J. (2008), Applications of the p -adic Hayman conjecture to uniqueness of p -adic meromorphic functions, *p -Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 1(1), pp. 43–53.
- [53] Ojeda J. (2011), On the distribution of values of p -adic differential polynomials and uniqueness, *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 18(2), pp. 313–333.
- [54] Phuong H. T., Padaphet I. (2024), A uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 69(9), pp. 1558–1577.
- [55] Phuong H. T., An V. H., Chanthaphone P. (2025), Uniqueness problem for level-1 linearly non-degenerate holomorphic mappings concerning hypersurfaces, *Complex Anal. Operator Theory*, 19(88).
- [56] Ru M. (2001), *Nevanlinna Theory and Its Relation to Diophantine Approximation*, World Scientific Publishing.
- [57] Ru M. (2014), Some generalizations of the Second Main Theorem intersecting hypersurfaces, *Methods and Applications of Analysis*, 21(4), pp. 503–526.
- [58] Sahoo P., Halder S. (2020), Results on L -functions and certain uniqueness questions of Gross, *Lith. Math. J.*, 60(6), pp. 80–91.
- [59] Shirosaki M. (1997), On polynomials which determine holomorphic mappings, *J. Math. Soc. Japan*, 49(2), pp. 289–298.

- [60] Steuding J. (2007), *Value-Distribution of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics, 1877, Springer.
- [61] Thai D. D., Quang S. D. (2005), Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables, *International Journal of Mathematics*, 16(8), pp. 903–939.
- [62] Weyl H., Weyl F. J. (1943), *Meromorphic Functions and Analytic Curves*, Annals of Mathematics Studies, No. 12, Princeton University Press.
- [63] Whittaker J. M. (1933), On the Derivatives of an Integral Function, *Journal of the London Mathematical Society*, s1-8(1), pp. 20–27.
- [64] Yamanoi K. (2004), The second main theorem for small functions and related problems, *Acta Math.*, 192, pp. 225–294.
- [65] Yang C.-C. (1972), On deficiencies of differential polynomials, *Math. Z.*, 125, pp. 107–112.
- [66] Yang C.-C., Hua X. H. (1997), Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 22(2), pp. 395–406.
- [67] Yang C.-C., Yi H.-X. (2003), *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Mathematics and its Applications, Vol. 557, Kluwer Academic Publishers.
- [68] Yi H.-X. (1990), Uniqueness of meromorphic functions and a question of C. C. Yang, *Complex Variables*, 14, pp. 169–176.
- [69] Yi H.-X. (1996), Unicity theorems for meromorphic or entire functions III, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 53, pp. 71–82.
- [70] Yuan Q.-Q., Li X.-M., Yi H.-X. (2018), Value distribution of L -functions and uniqueness questions of F. Gross, *Lith. Math. J.*, 58(2), pp. 249–262.

- [71] H. X. Yi, *Uniqueness of meromorphic functions and a question of Gross*, Science in China (Series A), **37**(7) (1994), 802–813.
- [72] P. Li, C. C. Yang, *Some further results on the unique range sets of meromorphic functions*, Kodai Mathematical Journal, **18**(3) (1995), 437–450.
- [73] Zhang J. L., Yang L. Z. (2007), Some results related to a conjecture of R. Brück, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 8(1), Art. 18.