

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHOMMAVONG CHANTHAPHONE

VẤN ĐỀ DUY NHẤT ĐỐI VỚI  $L$ -HÀM VÀ  
ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2026

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

---

PHOMMAVONG CHANTHAPHONE

VẤN ĐỀ DUY NHẤT ĐỐI VỚI  $L$ -HÀM VÀ  
ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số : 9.46.01.02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

1. TS. Vũ Hoài An
2. PGS. TS. Hà Trần Phương

Thái Nguyên - Năm 2026

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của TS. Vũ Hoài An và PGS. TS. Hà Trần Phương. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học của ai khác.

*Thái Nguyên, tháng 03 năm 2026*

**Tác giả**

**Phommavong Chanthaphone**

# Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Vũ Hoài An và PGS. TS. Hà Trần Phương. Tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến các thầy.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám đốc Đại học Thái Nguyên, Ban Đào tạo Đại học Thái Nguyên, Ban Giám hiệu, các Phòng Ban chức năng, Phòng Đào tạo, Ban chủ nhiệm khoa Toán cùng toàn thể giảng viên trong khoa, đặc biệt là Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô, bạn bè trong các Seminar tại Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng, Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã luôn giúp đỡ, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học.

Cuối cùng tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới những người thân trong gia đình, những người đã chịu nhiều khó khăn, vất vả và dành hết tình cảm yêu thương, động viên, chia sẻ, khích lệ để tác giả hoàn thành được luận án này.

*Thái Nguyên, tháng 03 năm 2026*

**Tác giả**

**Phommavong Chanthaphone**

# Một số ký hiệu và viết tắt

|                                                           |                                                                          |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}^*$                                            | tập các số tự nhiên khác không                                           |
| $\mathbb{Z}$                                              | tập các số nguyên                                                        |
| $\mathbb{R}$                                              | tập các số thực                                                          |
| $\mathbb{C}$                                              | trường các số phức                                                       |
| $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$                                | không gian xạ ảnh $N$ chiều trên trường $\mathbb{C}$                     |
| $T(\rho, f)$                                              | hàm đặc trưng của hàm phân hình $f$                                      |
| $m(\rho, f)$                                              | hàm xấp xỉ của hàm phân hình $f$                                         |
| $N(\rho, f)$                                              | hàm đếm tại các cực điểm của hàm phân hình $f$                           |
| $o(\cdot)$                                                | đại lượng bé so với $(\cdot)$                                            |
| $O(1)$                                                    | đại lượng bị chặn                                                        |
| $S(\rho, f)$                                              | đại lượng giới nội của hàm $f$                                           |
| $\Theta(\infty, f)$                                       | số khuyết không kể bội tại $\infty$ của hàm $f$                          |
| $E_f(a)$                                                  | tập các không điểm kể cả bội của hàm $f$ tại điểm $a$                    |
| $E_f(S)$                                                  | tập các không điểm kể cả bội của hàm $f$ tại điểm $a$ trong tập $S$      |
| $E_{f',1}(0)$                                             | tập các không điểm kể cả bội của đạo hàm $f'$ với điều kiện bội $\leq 1$ |
| $T_f(\rho)$                                               | hàm đặc trưng của ánh xạ $f$ kết hợp với $D$                             |
| $m_f(\rho, D)$                                            | hàm xấp xỉ của ánh xạ $f$ kết hợp với $D$                                |
| $N_f(\rho, D)$                                            | hàm đếm của ánh xạ $f$ kết hợp với $D$                                   |
| $\mathcal{M}_{L^1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ | tập các ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1                |
| $\mathbb{A}_R$                                            | hình vành khuyên trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$                       |
| IM                                                        | không kể bội hoặc không tính bội                                         |
| CM                                                        | kể cả bội hoặc tính bội                                                  |

# Mục lục

|                                                                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Mở đầu                                                                                                                | 1          |
| <b>Chương 1 Vấn đề duy nhất đối với hàm phân hình và <math>L</math>-hàm chia sẻ tập hữu hạn</b>                       | <b>13</b>  |
| 1.1. Kiến thức cơ sở . . . . .                                                                                        | 13         |
| 1.2. Định lý duy nhất liên quan đến giá trị khuyết . . . . .                                                          | 27         |
| 1.3. Định lý duy nhất liên quan đến đạo hàm . . . . .                                                                 | 35         |
| Kết luận Chương 1 . . . . .                                                                                           | 47         |
| <b>Chương 2 Siêu mặt xác định duy nhất đối với ánh xạ chỉnh hình</b>                                                  | <b>48</b>  |
| 2.1. Kiến thức cơ bản về phân bố giá trị cho đường cong . . . . .                                                     | 48         |
| 2.2. Siêu mặt xác định duy nhất đối với đường cong chỉnh hình . . . . .                                               | 58         |
| Kết luận Chương 2 . . . . .                                                                                           | 77         |
| <b>Chương 3 Định lý duy nhất đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên liên quan đến bội các không điểm</b> | <b>78</b>  |
| 3.1. Các hàm Nevanlinna-Cartan và tính chất . . . . .                                                                 | 78         |
| 3.2. Định lý duy nhất . . . . .                                                                                       | 87         |
| Kết luận Chương 3 . . . . .                                                                                           | 99         |
| <b>Kết luận chung</b>                                                                                                 | <b>100</b> |
| <b>Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án</b>                                                          | <b>101</b> |
| <b>Tài liệu tham khảo</b>                                                                                             | <b>102</b> |

# Mở đầu

## 1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Vào những năm 20 của thế kỷ XX, Nevanlinna R. ([37]) đã xây dựng lý thuyết phân bố giá trị cho các hàm phân hình trên  $\mathbb{C}$  mà ngày nay được gọi là lý thuyết Nevanlinna. Với nội dung cốt lõi là hai định lý cơ bản, lý thuyết được đánh giá là một trong những thành tựu sâu sắc và đẹp đẽ nhất của toán học thế kỷ XX và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau. Song song với việc phát triển lý thuyết cho các hàm, năm 1933, Cartan H. ([11]) đã xây dựng lý thuyết Nevanlinna chiều cao, tức là xem xét phân bố giá trị cho các ánh xạ chỉnh hình phức và cùng với lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình, hướng nghiên cứu này nhanh chóng đã thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước, có nhiều công trình quan trọng được công bố gắn với tên của các nhà toán học lớn: Thiem L. V. ([56]), Khoai H. H. ([24]), Ahlfors L. ([1]), Griffiths Ph. ([20]), ...

Một trong những ứng dụng nổi bật và phong phú nhất của lý thuyết phân bố giá trị là các vấn đề duy nhất cho hàm phân hình hay đường cong chỉnh hình, tức là tìm điều kiện về tôpô, hình học, đại số, ... để hai hàm phân hình hoặc hai ánh xạ chỉnh hình là đồng nhất hoặc liên kết với nhau khi chúng chia sẻ đủ số lượng giá trị hoặc siêu mặt. Theo hướng nghiên cứu này, năm 1926, Nevanlinna R. ([38]) đã chứng minh Định lý 5 điểm nổi tiếng *hai hàm phân hình khác hằng là đồng nhất nếu chúng có cùng*

*ảnh ngược không tính bội, của 5 điểm phân biệt.* Năm 1975, Fujimoto H. ([14]) đã mở rộng định lý này cho đường cong chẵn hình. Các công trình này của Nevanlinna R. ([38]) và Fujimoto H. ([14]) được xem như khởi nguồn của hướng nghiên cứu và ngày càng thu hút được sự quan tâm phát triển của nhiều tác giả trong và ngoài nước, có nhiều công trình được công bố: Khoai H. H., An V. H., Ninh L. Q. ([28], [30]), Phuong H. T. ([40], [41], [42]), Smiley L. ([53]), Gross F. ([21]), Aihara Y. ([2]), .... Trong thời gian gần đây, các nghiên cứu về vấn đề duy nhất tập trung vào hai chủ đề chính:

1. Xây dựng các điều kiện đại số để hai hàm phân hình hoặc ánh xạ chẵn hình là trùng nhau hoặc biểu thị qua nhau. Từ đó xây dựng các tập xác định duy nhất cho hàm với số phần tử ít nhất có thể, siêu mặt xác định duy nhất cho ánh xạ chẵn hình với bậc thấp nhất có thể, trong các trường hợp tính bội, không tính bội, tính bội cắt cụt, tính bội với trọng số, ...

2. Thiết lập các đặc trưng của tập xác định duy nhất cho các hàm hay họ các siêu phẳng, siêu mặt xác định duy nhất cho các ánh xạ.

Trong luận án này chúng tôi tập trung vào chủ đề nghiên cứu thứ nhất cho hàm phân hình và đường cong chẵn hình. Cụ thể chúng tôi sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Xây dựng các điều kiện đại số để  $L$ -hàm và hàm phân hình là trùng nhau hoặc biểu thị tuyến tính qua nhau, từ đó xây dựng các tập xác định duy nhất cho hàm với số phần tử ít nhất có thể.

2. Xây dựng một số điều kiện đại số liên quan đến siêu mặt để hai đường cong chẵn hình trùng nhau hoặc biểu thị qua nhau.

Cho  $f$  là hàm phân hình khác hằng trên  $\mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , ta kí hiệu  $E_f(a)$  là tập các không điểm của  $f - a$  ở đó mỗi không điểm được tính

với bội của nó,  $\overline{E}_f(a)$  là tập các không điểm của  $f - a$  mà ở đó mỗi không điểm được tính một lần. Với  $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  là tập con khác rỗng của  $\mathbb{C}$ , ta định nghĩa:

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} E_f(a), \quad \overline{E}_f(S) = \bigcup_{a \in S} \overline{E}_f(a).$$

Theo hướng nghiên cứu thứ nhất, phát triển công trình của Nevanlinna R. ([38]), năm 1977, Gross F. ([21]) đưa ra ý tưởng là không xét ảnh ngược của các điểm riêng rẽ mà xét ảnh ngược của tập hợp điểm  $S$  của  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**Vấn đề Gross.** *i) Tồn tại hay không tập  $S$  để với bất kỳ các hàm phân hình khác hằng  $f, g$  thỏa mãn điều kiện  $E_f(S) = E_g(S)$  ta có  $f = g$  ?*

*ii) Tồn tại hay không hai tập  $S_i, i = 1, 2$  sao cho với hai hàm phân hình khác hằng bất kỳ  $f, g$ , thỏa mãn  $E_f(S_i) = E_g(S_i), i = 1, 2$  ta có  $f = g$  ?*

Tập  $S$  thỏa mãn (i) được gọi là tập xác định duy nhất, các tập  $S_1, S_2$  trong (ii) được gọi là các tập song xác định duy nhất cho các hàm phân hình kể cả bội. Yi H.-X. (xem [59], [61]) là người đầu tiên đưa ra câu trả lời cho Vấn đề Gross, từ đó các kết quả đạt được theo hướng nghiên cứu này là rất phong phú và sâu sắc (xem [59], [61], [17], [18], [13], [29], [25], [31], ...) cho các đối tượng hàm khác nhau: hàm phân hình, hàm nguyên,  $L$ -hàm là công cụ quan trọng trong nghiên cứu lý thuyết số. Từ đây và sự tương tự giữa số học trên trường số và số học trên trường hàm - một ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị đã dẫn đến ... trong vài năm gần đây, vấn đề này đã được nghiên cứu cho lớp các  $L$ -hàm. Cụ thể, năm 2018, Yuan Q.-Q., Li X.-M. và Yi H.-X. ([62]) đã chỉ ra sự tồn tại tập  $S$  gồm 7 phần tử, sao cho nếu  $E_f(S) = E_L(S)$  thì  $f = L$ , trong đó  $f$  là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm,  $L$  là  $L$ -hàm. Đây là câu trả lời cho Vấn đề Gross đối với trường hợp  $L$ -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm.

Cho  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . Kí hiệu

$$Q_K(z) = (n + m + 1) \left( \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n + m + 1 - i} z^{n+m+1-i} a^i \right). \quad (1)$$

Năm 2023 Khoai H. H., An V. H. và Phuong N. D. ([31], Định lý 1, trang 267) đã chứng minh:

**Định lý 1.** *Giả sử  $Q_K(z)$  xác định như (1) thỏa mãn  $Q_K(a) \neq -1, -2$ . Đặt  $P_K(z) = Q_K(z) + 1$  và đặt  $S_K = \{z \mid P_K(z) = 0\}$ . Khi đó, nếu  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ ,  $n + m \geq 8$ , thì điều kiện  $E_f(S_K) = E_L(S_K)$ , kéo theo  $f = L$  với mọi hàm phân hình khác hằng  $f$  và  $L$ -hàm khác hằng  $L$ .*

Kết quả này cũng là câu trả lời cho Vấn đề Gross cho trường hợp  $L$ -hàm và hàm phân hình.

Đa thức  $P(z)$  được gọi là *đa thức duy nhất (duy nhất mạnh) đối với hàm phân hình (nguyên)* nếu hai hàm phân hình (nguyên) khác hằng tùy ý  $f$  và  $g$ , thỏa mãn điều kiện  $P(f) = P(g)$  ( $P(f) = cP(g)$ , trong đó  $c$  là hằng số khác không) và kéo theo  $f = g$ .

Xét đa thức  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  bậc  $q$  có dạng

$$P(z) = a(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_q). \quad (2)$$

Giả sử đạo hàm của  $P(z)$  có biểu diễn

$$P'(z) = aq(z - d_1)^{q_1}(z - d_2)^{q_2} \dots (z - d_k)^{q_k}, \quad a \neq 0,$$

trong đó  $d_1, d_2, \dots, d_k$  là các số phức phân biệt. Khi đó số  $k$  được gọi là *chỉ số đạo hàm* của  $P(z)$ . Giả sử rằng

$$P(d_i) \neq 0 \text{ đối với } 1 \leq i \leq k. \quad (3)$$

Chúng ta nhắc lại điều kiện sau giới thiệu bởi Fujimoto H. (xem [18]):

$$P(d_i) \neq P(d_j) \text{ đối với } 1 \leq i < j \leq k, \quad k \geq 2. \quad (F)$$

Năm 2023 Banerjee A. và Kundu A. ([9], Định lý 3.4, trang 502) đã chứng minh:

**Định lý 2.** *Giả sử  $a_1, \dots, a_q$  là các số phức phân biệt và đa thức duy nhất mạnh  $P(z) = a(z - a_1) \dots (z - a_q)$  với các điều kiện (3) và (F), và  $S = \{z : P(z) = 0\}$ . Cho  $f$  là hàm phân hình khác hằng,  $L$  là  $L$ -hàm. Nếu  $\min\{q_1, q_2\} \geq 2$  khi  $k = 2$  và  $q \geq 2k + 4$  và  $E_f(S, 2) = E_L(S, 2)$ , thì ta có  $f = L$ .*

Chú ý rằng, nếu  $E_f(S) = E_L(S)$  thì  $E_f(S, 2) = E_L(S, 2)$ . Khi đó, áp dụng Định lý 2 với  $k = 2$  và  $q \geq 8$ , ta thu được Định lý 1.

Trong luận án này chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu các điều kiện đại số cho  $L$ -hàm và hàm phân hình để tìm ra tập xác định duy nhất cho  $L$ -hàm và hàm phân hình với số phân tử ít nhất có thể.

Một hướng nghiên cứu nữa đối với vấn đề duy nhất là tìm các tập  $S, T$  sao cho với các hàm phân hình  $f, g$  tùy ý, điều kiện  $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(T)$  hoặc  $E_f(S) = E_g(T)$ , kéo theo  $f = g$  hoặc  $f$  và  $g$  biểu thị qua nhau. Pakovich F. ([39]) đã chứng minh kết quả đầu tiên cho trường hợp  $S, T$  là các tập con compact và  $f, g$  là các đa thức. Trong [26], Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. đã xem xét vấn đề này trong trường hợp  $E_f(S) = E_g(T)$ ,  $f, g$  là hai hàm phân hình khác hằng và  $S, T \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  lần lượt là tập nghiệm của các đa thức

$$P(z) = z^n + az^{n-m} + b, \quad Q(z) = z^n + a'z^{n-m} + b',$$

trong đó  $n \geq 2m + 9$ , hoặc  $m \geq 4$ , hoặc  $(n, m) = 1$  khi  $m \geq 2$ . Trong luận án này chúng tôi sẽ nghiên cứu các vấn đề tương tự các kết quả của Pakovich F. và Khoai H. H., An V. H., Hoa P. N. cho trường hợp các ánh xạ chỉnh hình.

Theo hướng nghiên cứu thứ hai, như đã nói ở trên, năm 1975, Fujimoto H. (xem [15]) đã mở rộng định lý này cho đường cong chỉnh hình, ông đã

chứng minh rằng các ánh xạ chỉnh hình không suy biến từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  được xác định duy nhất bởi  $3n + 2$  siêu phẳng ở vị trí tổng quát khi tính cả bội các không điểm. Năm 1983, Smiley L. ([53]) đã cải tiến kết quả này bằng cách bỏ qua bội các không điểm. Sau đó, vấn đề này đã được nghiên cứu sâu rộng bởi nhiều tác giả: Fujimoto H. ([16]), Ru M. ([48]), Yan Q. và Chen Z. ([58]), Dethloff G. và Tan T. V. ([12]), An D. P., Quang S. D. và Thai D. D. ([3]), Phuong H. T. và Minh T. H. ([45]), Phuong H. T và Vilaisavanh L. ([47]), Aihara Y. ([2]), Cao T.-B. và Yi H.-X ([10]) và nhiều tác giả khác cho đường cong chỉnh hình từ  $\mathbb{C}^m$ ,  $\mathbb{C}$  hay hình vành khuyên trong mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$  vào không gian xạ ảnh  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  hay đa tạp đại số trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , với mục tiêu là các siêu phẳng hay siêu mặt, cố định hay di động.

Cho  $f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là đường cong chỉnh hình, trong đó  $f_0, \dots, f_n$  là các hàm phân hình không có không điểm bội trên  $\mathbb{C}^m$ . Gọi  $D$  là siêu mặt bậc  $d$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và  $Q$  là đa thức thuần nhất bậc  $d$  xác định  $D$  trong  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ . Giả sử

$$Q(z_0, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \dots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó  $n_d = \binom{n+d}{n} - 1$  và  $i_{k0} + \dots + i_{kn} = d$  với  $k = 0, \dots, n_d$ . Ta viết

$$(f, D) = Q(f) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k f_0^{i_{k0}} \dots f_n^{i_{kn}}.$$

Ta nói rằng  $(f, D)$  là tự do nếu  $(f, D) \not\equiv 0$ .

Đối với giả thiết  $(f, D)$  là tự do, ta ký hiệu  $\nu_{(f,D)}$  là ánh xạ từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{Z}$ , trong đó  $\nu_{(f,D)}(z)$  ( $z \in \mathbb{C}^m$ ) là bội không điểm của  $(f, D)$  tại  $z$ . Đối với các số nguyên dương  $d, k$ , ta đặt

$$\nu_{(f,D), \leq k}^d = \begin{cases} \min\{d, \nu_{(f,D)}\} & \text{nếu } 0 < \nu_{(f,D)} \leq k, \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Bây giờ, ta giả sử  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$  là tập hợp các siêu mặt bất kỳ và  $Q_j$  là các đa thức thuần nhất bậc  $d_j$  xác định  $D_j$  với  $j = 1, \dots, q$  trong  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ . Ký hiệu  $d_{\mathcal{D}}$  là bội chung nhỏ nhất của các  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  và đặt

$$n_{\mathcal{D}} = \binom{n + d_{\mathcal{D}}}{n} - 1.$$

Đối với số nguyên  $N \geq n$ , ta nhắc lại tập các siêu mặt  $\mathcal{D}$  được gọi là ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát nếu  $q > N$  và với mọi tập con gồm  $N + 1$  chỉ số phân biệt  $i_1, \dots, i_{N+1} \in \{1, \dots, q\}$ , ta có  $\bigcap_{k=1}^{N+1} \text{supp}(D_{i_k}) = \emptyset$ . Đặc biệt, nếu  $N = n$ , thì tập các siêu mặt  $\mathcal{D}$  được gọi là ở vị trí tổng quát.

Giả sử  $f$  và  $g$  là hai ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và  $H_1, \dots, H_q$  là  $q$  siêu phẳng ở vị trí tổng quát sao cho

$$\dim f^{-1}(H_i \cap H_j) \leq m - 2 \quad \text{đối với } i \neq j.$$

Gọi  $m_1, \dots, m_q$  là các số nguyên dương hoặc  $\infty$  thỏa mãn  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q \geq n$ ,

$$\nu_{(f, H_j), \leq m_j}^1 = \nu_{(g, H_j), \leq m_j}^1, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

và  $f(z) = g(z)$  với mọi  $z \in \bigcup_{j=1}^q \{z \in \mathbb{C}^m : 0 < \nu_{(f, H_j)} \leq m_j\}$ . Năm 2000, Aihara Y. (xem [2]) đã chứng minh  $f = g$  nếu

$$\sum_{j=3}^q \frac{m_j}{m_j + 1} > \frac{qn - q + n + 1}{n} + \frac{m_1}{m_1 + 1} - \frac{m_2}{m_2 + 1}. \quad (4)$$

Kết quả của Aihara Y. là điều kiện đủ liên quan đến quan hệ giữa bội các không điểm của  $(f, H_j)$  và  $(g, H_j)$  để hai đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính là bằng nhau. Lưu ý rằng điều kiện (4) sẽ suy ra được  $q \geq 3n + 2$ . Năm 2011, Cao T.-B. và Yi H.-X. ([10]) đã cải tiến kết quả

của Aihara Y. và chứng minh rằng  $f = g$  nếu

$$\sum_{j=3}^q \frac{m_j}{m_j + 1} > \frac{qn - q + n + 1}{n} - (n - 1) \left( \frac{1}{m_1 + 1} + \frac{1}{m_2 + 1} \right). \quad (5)$$

Đối với vấn đề này ta có thể tiếp tục nghiên cứu trong các trường hợp khác, chẳng hạn trường hợp đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, mục tiêu là các siêu mặt di động hay cố định ở vị trí tổng quát hoặc dưới tổng quát.

Sự lựa chọn đề tài "*Vấn đề duy nhất đối với  $L$ -hàm và đường cong chỉnh hình*" của chúng tôi nhằm làm phong phú thêm các kết quả về phân bố giá trị cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình.

## 2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

- **Đối tượng nghiên cứu:** Hàm phân hình, ánh xạ chỉnh hình trên mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$  và trên hình vành khuyên, ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna cho hàm và ánh xạ chỉnh hình để khảo cứu vấn đề phân bố giá trị của hàm và ánh xạ chỉnh hình có điều kiện của giá trị khuyết, bài toán xác định duy nhất hàm và ánh xạ chỉnh hình khi chúng chia sẻ các tập hợp hoặc siêu mặt.

- **Mục đích nghiên cứu:**

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu các vấn đề sau đây:

**Vấn đề thứ nhất:** Thiết lập một số điều kiện đủ liên quan đến điều kiện của giá trị khuyết và đạo hàm để cho  $L$ -hàm và hàm phân hình là trùng nhau.

**Vấn đề thứ hai:** Xây dựng một số dạng định lý duy nhất liên quan đến việc chia sẻ các siêu mặt kiểu Fermat-Yi đối với lũy thừa các ánh xạ chỉnh hình.

**Vấn đề thứ ba:** Xây dựng dạng định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên liên quan đến bội các không điểm.

### 3. Tổng quan về luận án

*a) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ nhất, chúng tôi đã:*

- Thiết lập điều kiện đủ liên quan đến giá trị khuyết tại  $\infty$  để  $L$ -hàm và hàm phân hình là trùng nhau (Định lý 1.2.1). Từ đó chỉ ra sự tồn tại của tập xác định duy nhất gồm 8 phần tử và tập xác định duy nhất liên quan đến số khuyết gồm 7 phần tử cho  $L$ -hàm và hàm phân hình.

- Xây dựng mới định lý duy nhất cho  $L$ -hàm và hàm phân hình với điều kiện đại số liên quan đến đạo hàm (Định lý 1.3.1).

Có thể thấy Định lý 1.2.1 đã cải tiến và tổng quát hóa một số kết quả gần đây của Khoai H. H., An V. H. và Phuong N. D. trong [31] và một số kết quả của Yuan Q.-Q., Li X.-M. và Yi H.-X. trong [62]. Từ Phần 2 của Định lý 1.2.1 ta thu được Định lý 2. Định lý 1.3.1 là cải tiến của Định lý 1.1 của Khoai H. H., An V. H. và Ninh L. Q. trong ([29]). Hệ quả 1.3.2 của Định lý 1.3.1 đã cải tiến Định lý 7 của Sahoo P. và Halder S. trong [50].

*b) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ hai:*

Cho  $f = (f_1 : \dots : f_{N+1})$  là ánh xạ chỉnh hình với  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  là biểu diễn rút gọn. Ánh xạ  $f$  được gọi là không suy biến tuyến tính mức 1 nếu và chỉ nếu với bất kì  $i, j : 1 \leq i < j \leq N + 1$ , ta có  $\frac{f_i}{f_j}$  là hàm phân hình khác hằng. Trong luận án này chúng tôi:

- Thiết lập được điều kiện đủ để hai ánh xạ chỉnh hình  $f, g$  trên  $\mathbb{C}$  không suy biến tuyến tính mức 1 với các biểu diễn rút gọn  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  và  $(g_1 : \dots : g_{N+1})$  có tính chất:  $f_i, g_i$  phụ thuộc tuyến tính khi hai ánh xạ  $f^v = (f_1^v : \dots : f_{N+1}^v)$ ,  $g^v = (g_1^v : \dots : g_{N+1}^v)$  chia sẻ các siêu mặt  $X, Y$ ,

ở đó  $v$  là số nguyên dương (Định lý 2.2.3).

- Thiết lập dạng siêu mặt xác định duy nhất kiểu Fermat-Yi cho ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1.

- Chỉ ra sự tồn tại của lớp siêu mặt xác định duy nhất cho một số lớp ánh xạ chỉnh hình. Cụ thể kí hiệu

$$\mathcal{M}_{L_1}^v(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})) := \{f^v : f \in \mathcal{M}_{L_1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))\}.$$

Khi đó, tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất có bậc  $13(2N-1)^2$  cho  $\mathcal{M}_{L_1}^1(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ , có bậc  $7(2N-1)^2$  cho  $\mathcal{M}_{L_1}^2(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ , có bậc  $4(2N-1)^2$  cho  $\mathcal{M}_{L_1}^8(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ .

*c) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ ba:*

- Xây dựng được dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên cho trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát (Định lý 3.2.1).

- Thiết lập được điều kiện đại số liên quan đến bội của các không điểm với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát để hai đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên đồng nhất bằng nhau (Định lý 3.2.2).

Chú ý rằng, trong Định lý 3.2.2, khi  $D_1, \dots, D_q$  là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát thì  $N = n$  và  $n_{\mathcal{D}} = n$ , khi đó bất đẳng thức (3.20) trong Định lý 3.2.2 trở thành bất đẳng thức (5), như vậy Định lý 3.2.2 là mở rộng kết quả của Cao T.-B. và Yi H.-X. ([10]). Ngoài ra, khi  $D_1, \dots, D_q$  là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát, điều kiện (3.20) sẽ suy ra  $q \geq 3n + 2$ , giống như kết quả của Smiley L. trong [53].

## 4. Phương pháp và công cụ nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi dùng các công cụ, kiến thức, kỹ thuật của giải tích phức, lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna, Nevanlinna-Cartan,

hình học đại số để giải quyết các vấn đề đặt ra. Cụ thể chúng tôi đã dùng các dạng khác của hai định lý cơ bản của lý thuyết Nevanlinna cho hàm và ánh xạ chỉnh hình trên mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$ , trên hình vành khuyên cùng các kỹ thuật ước lượng giữa hàm đếm, hàm xấp xỉ, hàm đặc trưng, định lý số khuyết, bổ đề kiểu Borel cho ánh xạ chỉnh hình rẽ nhánh.

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu cơ bản, truyền thống để giải quyết các vấn đề: trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu, các công trình đã có, chúng tôi phát hiện các vấn đề mở và sử dụng hoặc xây dựng các công cụ, phương pháp để giải quyết các vấn đề đặt ra.

## 5. Cấu trúc luận án

Luận án bao gồm phần mở đầu, ba chương nội dung, kết luận của luận án và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: *Vấn đề duy nhất đối với hàm phân hình và  $L$ -hàm chia sẻ tập hữu hạn*. Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày chi tiết các kết quả nghiên cứu liên quan đến vấn đề nghiên cứu thứ nhất: chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất cho  $L$ -hàm và hàm phân hình có liên quan đến giá trị khuyết và điều kiện đạo hàm chia sẻ giá trị. Các kết quả trong chương này được công bố trên bài báo số [AC1] và [AC2] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Chương 2 với tên *Siêu mặt xác định duy nhất đối với ánh xạ chỉnh hình*, chúng tôi tập trung giới thiệu chi tiết các kết quả của hướng nghiên cứu thứ hai thông qua việc thiết lập một số điều kiện đại số cho một hoặc hai siêu mặt xác định duy nhất ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1 từ  $\mathbb{C}$  vào  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ . Các kết quả trong chương này được công bố trên bài báo số [PAC1] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Chương 3: *Định lý duy nhất đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên liên quan đến bội các không điểm*. Chương này dành cho việc trình bày các kết quả của hướng nghiên cứu thứ ba. Cụ thể chúng tôi đã phát biểu và chứng minh dạng định lý cơ bản thứ hai, trên cơ sở đó chứng minh duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên liên quan đến bội các không điểm của đường cong kết hợp với các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát. Các kết quả chính trong chương này viết dựa trên bài báo số [PC1] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên hằng năm.
- Seminar đề tài NCKH cấp bộ B2024-TNA-19.

# Chương 1

## Vấn đề duy nhất đối với hàm phân hình và $L$ -hàm chia sẻ tập hữu hạn

Trong chương này chúng tôi sẽ giới thiệu một số kiến thức cơ sở về  $L$ -hàm và hàm phân hình, và chứng minh điều kiện đại số để  $L$ -hàm và hàm phân hình trùng nhau liên quan đến số khuyết tại  $\infty$  và liên quan đến đạo hàm. Các kết quả chính trong chương này viết dựa trên bài báo [AC1] và [AC2] trong Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án.

### 1.1. Kiến thức cơ sở

#### Khái niệm và một số tính chất về $L$ -hàm

Trong phần này chúng tôi xem xét các  $L$ -hàm trong lớp Selberg, tức là mỗi hàm phức trong lớp này được xác định bởi chuỗi Dirichlet có dạng

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

hội tụ tuyệt đối trong miền  $\operatorname{Re}(s) > 1$  thỏa mãn các tính chất sau:

- (i) Giả thuyết Ramanujan: với mọi số dương  $\varepsilon$ ,  $a(n) \ll n^\varepsilon$ , tức là tồn tại hằng số  $C$  sao cho  $|a(n)| \leq Cn^\varepsilon$ .
- (ii) Thác triển giải tích: tồn tại số nguyên không âm  $m$  sao cho

$$(s-1)^m L(s) \text{ là hàm nguyên bậc hữu hạn;}$$

(iii) Phương trình hàm: tồn tại các số thực dương  $Q$ ,  $\lambda_i$  và tồn tại số nguyên dương  $K$  và tồn tại các số phức  $\mu_i$ ,  $\omega$  với  $\operatorname{Re}\mu_i \geq 0$  và  $|\omega| = 1$  thỏa mãn phương trình

$$\Lambda_L(s) = \omega \overline{\Lambda_L(1 - \bar{s})},$$

trong đó

$$\Lambda_L(s) := L(s)Q^s \prod_{i=1}^K \Gamma(\lambda_i s + \mu_i)$$

và  $\Gamma(s)$  là hàm Gamma Euler.

(iv) Giả thuyết tích Euler: tồn tại tích Euler có dạng

$$L(s) = \prod_p L_p(s),$$

trong đó

$$L_p(s) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}}},$$

đối với các hệ số  $b(p^k)$  thỏa mãn  $b(p^k) \ll p^{k\theta}$  và số  $\theta < \frac{1}{2}$ , trong đó từng phần tử trong tích là ứng với số nguyên tố  $p$ .

Chú ý rằng, các hằng số trong phương trình hàm của  $L$ -hàm  $L$  là phụ thuộc vào  $L$ . Mặc dù các phương trình hàm của  $L$  là không duy nhất nhưng có những đại lượng bất biến, chẳng hạn bậc  $d_L$  xác định bởi

$$d_L = 2 \sum_{i=1}^K \lambda_i.$$

**Ví dụ 1.1.1.** Hàm Riemann zeta, ký hiệu  $\zeta(s)$  được xác định bởi chuỗi Dirichlet như sau:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

với  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Hàm này có khai triển tích Euler như sau:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ nguyên tố}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Hàm  $\zeta(s)$  có thể thác triển giải tích được ra toàn bộ mặt phẳng phức ngoại trừ cực điểm đơn  $s = 1$ . Đặt

$$\Lambda(s) := \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

thì  $\Lambda(s)$  thỏa mãn phương trình hàm đối xứng:

$$\Lambda(s) = \Lambda(1 - s).$$

Một số giá trị đặc biệt của hàm  $\zeta$ :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

**Ví dụ 1.1.2.** Giả sử  $q$  là số nguyên, ký tự *Dirichlet modulo*  $q$  là hàm số

$$\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C},$$

thỏa mãn ba điều kiện sau:

- *Tính tuần hoàn:*  $\chi(n + q) = \chi(n)$  với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ .
- *Tính nhân:*  $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$  với mọi  $m, n \in \mathbb{Z}$ .
- *Triệt tiêu tại các phần tử không nguyên tố cùng nhau với  $q$ :*

$$\chi(n) = \begin{cases} \neq 0 & \text{nếu } \gcd(n, q) = 1, \\ 0 & \text{nếu } \gcd(n, q) > 1. \end{cases}$$

Đối với ký tự Dirichlet  $\chi$ , khi đó hàm

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

là  $L$ -hàm Dirichlet, trong đó  $s$  là biến phức với  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

Ví dụ cụ thể về  $L$ -hàm Dirichlet như sau: ta lấy ký tự Dirichlet  $\chi$  modulo 4 xác định bởi:

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{nếu } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ 0 & \text{nếu } \gcd(n, 4) > 1. \end{cases}$$

Khi đó

$$L(s, \chi) = 1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - 7^{-s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Mỗi  $L$ -hàm Dirichlet xây dựng như thế này có tính chất sau:

- Mỗi  $L$ -hàm có thể biểu diễn thành tích Euler:

$$L(s, \chi) = \prod_{p \text{ nguyên tố}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Từ đây ta thấy mối quan hệ giữa  $L$ -hàm và phân bố của các số nguyên tố.

- Mỗi  $L$ -hàm  $L(s, \chi)$  có thể được khai triển giải tích trên toàn mặt phẳng phức, ngoại trừ trường hợp  $\chi = \chi_0$  là ký tự tầm thường

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \gcd(n, q) = 1, \\ 0 & \text{nếu } \gcd(n, q) > 1. \end{cases}$$

Khi đó  $L(s, \chi_0)$  có điểm kỳ dị đơn tại  $s = 1$ .

- Nếu  $\chi$  là ký tự không tầm thường, thì  $L(s, \chi)$  không có điểm kỳ dị tại  $s = 1$  và  $L(1, \chi) \neq 0$ .

Các mệnh đề sau là một số tính chất của  $L$ -hàm.

**Mệnh đề 1.1.1** ([23], Định lý, trang 2). *Giả sử  $L_1, \dots, L_N$  là các  $L$ -hàm khác hằng phân biệt. Khi đó  $L_1, \dots, L_N$  là độc lập tuyến tính trên  $\mathbb{C}$ .*

**Mệnh đề 1.1.2** ([29], Bổ đề 2.7, trang 269). *Giả sử  $P(z), Q(z)$  là hai đa thức khác hằng bậc  $n$  và giả sử  $f$  là hàm phân hình khác hằng với hữu hạn cực điểm trong mặt phẳng phức,  $L$  là  $L$ -hàm khác hằng. Giả sử rằng  $f$  và  $L$  thỏa mãn*

$$\frac{1}{Q(f)} = \frac{c}{P(L)} + c_1,$$

trong đó  $c, c_1 \in \mathbb{C}$  và  $c \neq 0$ . Khi đó  $c_1 = 0$ .

**Mệnh đề 1.1.3** ([29], Bổ đề 3.1, trang 270). *Giả sử  $L$  là  $L$ -hàm trong lớp Selberg mở rộng,  $f$  là hàm phân hình,  $a, b, d, u, v, t$  là các hằng số phức khác không,  $n$  và  $m$  là các số nguyên dương,  $n \geq 2m + 3$ . Đặt*

$$P(x) = ax^n + bx^{n-m} + d; \quad Q(y) = uy^n + vy^{n-m} + t.$$

1. Nếu  $P(L) = Q(f)$ , thì  $f = hL$ , trong đó  $h$  là hằng số, thỏa mãn  $h^n = a/u$ ,  $h^{n-m} = b/v$  và  $d = t$ .
2. Nếu  $(n, m) = 1$ ,  $a = u$ ,  $b = v$  và  $P(L) = Q(f)$ , thì  $f = L$  và  $d = t$ .
3. Nếu  $L_1, L_2$  là các  $L$ -hàm trong lớp Selberg mở rộng và  $P(L_1) = Q(L_2)$ , thì  $L_1 = L_2$  và  $P = Q$ .

### Các hàm Nevanlinna và một số tính chất cơ bản

Ta nhắc lại, đối với hàm phân hình  $f$  và  $a$  là số phức hữu hạn. Nếu  $f$  biểu diễn được dưới dạng

$$f(z) - a = (z - z_0)^\alpha h(z),$$

trong đó  $h(z)$  là hàm chỉnh hình trong lân cận của  $z_0$  và  $h(z_0) \neq 0$ , thì ta đặt  $\nu_f^a(z_0) = \alpha$  và gọi là bội của  $f - a$  tại không điểm  $z_0$ . Nếu  $a = 0$ , để đơn giản ta viết  $\nu_f(z_0)$  thay cho  $\nu_f^0(z_0)$ . Nếu  $f$  biểu diễn được dưới dạng

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^\alpha},$$

trong đó  $h(z)$  là hàm chỉnh hình trong lân cận của  $z_0$  và  $h(z_0) \neq 0$ , thì ta đặt  $\nu_f^\infty(z_0) = \alpha$  và gọi là bội của  $f$  tại cực điểm  $z_0$ .

Cho  $f$  là hàm phân hình khác hằng trong  $\mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  và  $k$  là số nguyên không âm hoặc vô cùng. Với mỗi  $\rho > 0$ , gọi  $n(\rho, f)$  là số cực điểm tính cả bội của hàm  $f$  trong đĩa  $D(0, \rho)$ ,  $\bar{n}(\rho, f)$  là số cực điểm không tính bội của hàm  $f$  trong đĩa  $D(0, \rho)$ . Hàm đếm tại các cực điểm tính cả bội

(tương ứng, không tính bội) của  $f$  trong đĩa  $D(0, \rho)$  được xác định như sau:

$$N(\rho, f) = \int_0^\rho \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log \rho,$$

$$(\text{tương ứng } \bar{N}(\rho, f) = \int_0^\rho \frac{\bar{n}(t, f) - \bar{n}(0, f)}{t} dt + \bar{n}(0, f) \log \rho).$$

Đối với  $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , ta gọi  $N(\rho, \frac{1}{f-a})$  (tương ứng  $\bar{N}(\rho, \frac{1}{f-a})$ ) là hàm đếm tại các không điểm của  $f - a$  hay là hàm đếm tại các  $a$ -điểm kể cả bội (tương ứng không kể bội) của  $f$ .

Hàm

$$m(\rho, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\theta})| d\theta$$

được gọi là hàm xấp xỉ của  $f$ , ở đó  $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$ . Tương tự, đối với giá trị  $a \in \mathbb{C}$ , ta có

$$m\left(\rho, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(\rho e^{i\theta}) - a} \right| d\theta.$$

Có thể thấy hàm  $m(\rho, \frac{1}{f-a})$  mô tả "mức độ gần" mà  $f(z)$  đạt giá trị  $a$  trên đường tròn  $|z| = \rho$ .

Ta gọi hàm

$$T(\rho, f) = m(\rho, f) + N(\rho, f)$$

là hàm đặc trưng (hay hàm đặc trưng Nevanlinna) của  $f$ . Các hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng đóng vai trò trung tâm trong lý thuyết Nevanlinna. Các định lý và mệnh đề sau đây là các định lý cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna cho các hàm phân hình:

**Định lý 1.1.4** (xem [59], Định lý cơ bản thứ nhất, Định lý 1.2, trang 8).

Giả sử hàm phân hình khác hằng  $f(z)$  trong  $\mathbb{C}$  và giả sử  $a \in \mathbb{C}$ . Khi đó

$$T\left(\rho, \frac{1}{f-a}\right) = T(\rho, f) + O(1),$$

trong đó  $O(1)$  là đại lượng bị chặn khi  $\rho \rightarrow \infty$ .

**Định lý 1.1.5** (xem [59], Định lý cơ bản thứ hai, Định lý 1.6', trang 22).

Giả sử hàm phân hình khác hằng  $f$  trên  $\mathbb{C}$  và giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_q$  là các điểm phân biệt của  $\mathbb{C}$ . Khi đó

$$(q-1)T(\rho, f) \leq \overline{N}(\rho, f) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f-a_i}\right) - N_0\left(\rho, \frac{1}{f'}\right) + S(\rho, f),$$

ở đó  $N_0(\rho, \frac{1}{f'})$  là hàm đếm các không điểm của đạo hàm  $f'$ , mà không là các không điểm của hàm  $(f-a_1)\dots(f-a_q)$  và  $S(\rho, f) = o(T(\rho, f))$  với mọi  $\rho$  nằm ngoài tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

**Mệnh đề 1.1.6** (xem [22], Định lý 2.4, trang 43). Giả sử hàm phân hình khác hằng  $f$  và các điểm phân biệt  $a_1, a_2, \dots, a_q$  trong  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Giả sử mỗi  $f-a_i$  có các không điểm với bội ít nhất là  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ . Khi đó

$$\sum_{i=1}^q \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \leq 2.$$

Mệnh đề sau là tính chất của các hàm Nevanlinna liên quan đến đạo hàm.

**Mệnh đề 1.1.7.** Đối với bất kỳ hàm phân hình khác hằng  $f$  sao cho  $f^{(k)}$  khác hằng, ta có

1/ (xem [19], Định lý 2.3, trang 99)

$$i) T(\rho, f^{(k)}) \leq (k+1)T(\rho, f) + S(\rho, f);$$

$$ii) S(\rho, f^{(k)}) = S(\rho, f).$$

2/ (xem [60], Bổ đề 3, trang 171; hoặc [63], Bổ đề 2.3, trang 5)

$$iii) N(\rho, \frac{1}{f'}) \leq N(\rho, \frac{1}{f}) + \overline{N}(\rho, f) + S(\rho, f).$$

Mệnh đề sau là tính chất của các hàm Nevanlinna của  $L$ -hàm.

**Mệnh đề 1.1.8** ([54], trang 150). *Giả sử  $L$ -hàm khác hằng là  $L$ . Khi đó*

*i)  $T(\rho, L) = \frac{d_L}{\pi} \rho \log \rho + O(\rho)$ , trong đó  $d_L = 2 \sum_{i=1}^K \lambda_i$  là bậc của  $L$ -hàm,  $K, \lambda_i$  là số nguyên dương và số thực dương tương ứng, trong phương trình hàm của  $L$ -hàm.*

*ii)  $N(\rho, L) = S(\rho, L)$ .*

Tiếp theo ta định nghĩa một số dạng hàm đếm đặc biệt sử dụng trong chứng minh các kết quả chính. Cho  $f$  là hàm phân hình khác hằng và  $k$  là số nguyên không âm. Ta gọi  $\overline{N}_{(k)}(\rho, f)$  là hàm đếm tại các cực điểm bội  $\geq k$  của  $f$ , trong đó mỗi cực điểm được tính chỉ một lần,  $\overline{N}_k(\rho, f)$  là hàm đếm tại các cực điểm bội  $\leq k$  của  $f$ , trong đó mỗi cực điểm được tính chỉ một lần. Với mỗi  $a \in \mathbb{C}$ , ta gọi  $\overline{N}_{(k)}(\rho, \frac{1}{f-a})$  là hàm đếm tại các không điểm bội  $\geq k$  của  $f-a$ , ở đó mỗi không điểm được tính chỉ một lần,  $\overline{N}_k(\rho, \frac{1}{f-a})$  là hàm đếm tại các không điểm bội  $\leq k$  của  $f-a$ , trong đó mỗi không điểm được tính chỉ một lần.

Cho  $f$  và  $g$  là hai hàm phân hình khác hằng, ta gọi  $\overline{N}(\rho, \frac{1}{f}; g \neq 0)$  là hàm đếm tại các không điểm của  $f$  mà không là không điểm của  $g$ , ở đó mỗi không điểm được tính chỉ một lần.

Cho  $f$  và  $g$  là hai hàm phân hình khác hằng. Giả sử  $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$  và  $\alpha$  là số nguyên không âm, ta gọi

$$N\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f = \alpha\right)$$

là hàm đếm tại các không điểm  $z$  của  $f$  thỏa mãn  $\nu_f(z) = \alpha$ , ta gọi

$$N\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f = \nu_g = \alpha\right)$$

là hàm đếm tại các không điểm chung  $z$  của  $f$  và  $g$ , thỏa mãn

$$\nu_f(z) = \nu_g(z) = \alpha.$$

Ta gọi

$$N\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f > \nu_g \geq \alpha\right)$$

là hàm đếm tại các không điểm chung  $z$  của  $f$  và  $g$ , thỏa mãn

$$\nu_f(z) > \nu_g(z) \geq \alpha.$$

Tương tự, ta xác định các hàm đếm  $\overline{N}(\rho, \frac{1}{g}; \nu_g > \nu_f \geq \alpha)$ ,  $N(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f \geq \alpha)$  và  $N(\rho, \frac{1}{g}; \nu_g \geq \alpha)$ .

Cho  $f, g$  là hai hàm phân hình khác hằng, đặt

$$F = \frac{1}{f}, \quad G = \frac{1}{g} \quad \text{và} \quad H = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}.$$

**Mệnh đề 1.1.9.** *Giả sử rằng  $H \not\equiv 0$ , nếu hai hàm phân hình khác hằng  $f, g$  thỏa mãn  $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$ . Khi đó*

*i) (xem [29], Bổ đề 2.4, trang 268) Ta có*

$$\begin{aligned} N(\rho, H) \leq & \overline{N}_{(2)}(\rho, f) + \overline{N}_{(2)}(\rho, g) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f'}; f \neq 0\right) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{g'}; g \neq 0\right) \\ & + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f > \nu_g \geq 1\right) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{g}; \nu_g > \nu_f \geq 1\right). \end{aligned}$$

Hơn nữa, nếu  $a$  là không điểm đơn chung của  $f$  và  $g$ , thì  $H(a) = 0$ .

*ii) Giả sử thêm*

$$\overline{E}_f(0, \nu_f = 1) \cap \overline{E}_g(0, \nu_g = 2) = \emptyset$$

và

$$\overline{E}_f(0, \nu_f = 2) \cap \overline{E}_g(0, \nu_g = 1) = \emptyset,$$

trong đó

$$\overline{E}_f(0, \nu_f = k) = \{z \in \mathbb{C} : \nu_f(z) = k\}.$$

Khi đó ta có

$$\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{g}\right) + 2\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f \geq 2\right) + 2\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{g}; \nu_g \geq 2\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq N(\rho, H) + \frac{1}{2} \left( N\left(\rho, \frac{1}{f}\right) + N\left(\rho, \frac{1}{g}\right) \right) + N\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f \geq 2\right) \\ &\quad + N\left(\rho, \frac{1}{g}; \nu_g \geq 2\right) + S(\rho, f) + S(\rho, g). \end{aligned}$$

*Chứng minh (ii).* Áp dụng ([19], trang 14) ta thu được:

$$N\left(\rho, \frac{1}{f}\right) = \sum_{0 < |a_i| < \rho} \log \frac{\rho}{|a_i|} + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log \rho,$$

trong đó  $a_i$  là các không điểm kể cả bội của  $f$  và

$$\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}\right) = \sum_{0 < |a_i| < \rho} \log \frac{\rho}{|a_i|} + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log \rho,$$

trong đó  $a_i$  là các không điểm không kể bội của  $f$ .

Từ đây, ta đặt

$$\begin{aligned} M &= \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{g}\right) + 2\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f \geq 2\right) + 2\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{g}; \nu_g \geq 2\right), \\ T &= N\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f = \nu_g = 1\right) + \frac{1}{2} \left( N\left(\rho, \frac{1}{f}\right) + N\left(\rho, \frac{1}{g}\right) \right) \\ &\quad + N\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f \geq 2\right) + N\left(\rho, \frac{1}{g}; \nu_g \geq 2\right). \end{aligned}$$

Trước tiên ta chứng minh rằng  $M \leq T$ . Thật vậy, ta gọi  $a$  là không điểm bội  $p$  của  $f$ . Từ  $\overline{E}_f(0) = \overline{E}_g(0)$ , kéo theo rằng  $a$  là không điểm bội  $q$  của  $g$ . Ta xem xét ba trường hợp sau:

*Trường hợp 1.* Giả sử rằng  $p = q$ .

Nếu  $p = q = 1$ , thì  $a$  được tính  $1 + 1 + 0 + 0 = 2$  lần trong  $M$  và được tính  $1 + \frac{1}{2}(1 + 1) = 2$  lần trong  $T$ .

Nếu  $p = q \geq 2$ , thì  $a$  được tính  $1 + 1 + 2 + 2 = 6$  lần trong  $M$  và được tính  $0 + \frac{1}{2}(p + p) + p + p = 3p \geq 6$  lần trong  $T$ .

*Trường hợp 2.* Giả sử rằng  $p > q$ .

Nếu  $p > q$  và  $q = 1$ , thì  $p \geq 3$  từ

$$\overline{E}_f(0, \nu_f = 2) \cap \overline{E}_g(0, \nu_g = 1) = \emptyset,$$

khi đó  $a$  được tính  $1 + 1 + 2 + 0 = 4$  lần trong  $M$  và do  $p \geq 3$  ta thấy rằng  $a$  được tính  $0 + \frac{1}{2}(p+1) + p + 0 = p + \frac{p+1}{2} \geq 5 > 4$  lần trong  $T$ .

Nếu  $p > q$  và  $q \geq 2$ , thì  $p \geq 3$  và  $a$  được tính  $1 + 1 + 2 + 2 = 6$  lần trong  $M$ . Do  $p \geq 3$  và  $q \geq 2$  nên  $p + q \geq 5$ , khi đó  $a$  được tính  $0 + \frac{1}{2}(p+q) + p + q = 0 + \frac{3(p+q)}{2} > 6$  lần trong  $T$ .

*Trường hợp 3.* Giả sử rằng  $q > p$ . Theo lý luận tương tự như trong Trường hợp 2 ta cũng suy ra được số lần  $a$  được tính trong  $M$  ít hơn hoặc cùng lắm là bằng số lần  $a$  được tính trong  $T$ .

Như vậy  $M \leq T$ . Chú ý rằng nếu  $a$  là không điểm đơn chung của  $f$  và  $g$ , khi đó  $H(a) = 0$ , ta có

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_f = \nu_g = 1\right) &\leq N\left(\rho, \frac{1}{H}\right) \leq T(\rho, H) + O(1) \\ &= N(\rho, H) + m(\rho, H) + O(1) \\ &\leq N(\rho, H) + m\left(\rho, \frac{F'''}{F'}\right) + m\left(\rho, \frac{G'''}{G'}\right) + O(1) \\ &\leq N(\rho, H) + S(\rho, f) + S(\rho, g). \end{aligned}$$

Mệnh đề 1.1.9 được chứng minh. □

Tiếp theo ta nhắc lại khái niệm về số khuyết. Đối với hàm phân hình  $f$  và giá trị  $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , các giá trị

$$\begin{aligned} \theta(a, f) &= 1 - \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{N\left(\rho, \frac{1}{f-a}\right)}{T(\rho, f)}, \\ \Theta(a, f) &= 1 - \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f-a}\right)}{T(\rho, f)}, \end{aligned}$$

với  $a \in \mathbb{C}$  và

$$\begin{aligned} \theta(\infty, f) &= 1 - \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{N(\rho, f)}{T(\rho, f)}, \\ \Theta(\infty, f) &= 1 - \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(\rho, f)}{T(\rho, f)}, \end{aligned}$$

với  $a = \infty$ , trong đó  $\rho$  nằm ngoài tập có độ đo Lebesgue hữu hạn, lần lượt được gọi là số khuyết kể cả bội và số khuyết không kể bội của hàm  $f$  tại điểm  $a$ . Rõ ràng

$$0 \leq \theta(a, f) \leq \Theta(a, f) \leq 1.$$

Cho  $f$  là hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$ . Giá trị  $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  được gọi là *giá trị bỏ được Picard* nếu

$$f(z) \neq a \quad \text{với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

Ta biết rằng, hàm phân hình khác hằng có thể có nhiều nhất hai giá trị bỏ được Picard trong  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Mệnh đề sau đây là tính chất về giá trị bỏ được Picard của  $L$ -hàm trong mặt phẳng phức.

**Mệnh đề 1.1.10** ([35], Bổ đề 2.3, trang 3800). *Giả sử  $L$ -hàm khác hằng là  $L$ , khi đó không tồn tại giá trị bỏ được Picard của  $L$  trong mặt phẳng phức.*

Bây giờ chúng tôi giới thiệu một số kí hiệu để sử dụng trong việc nghiên cứu về vấn đề duy nhất. Giả sử  $f$  là hàm phân hình và  $a \in \mathbb{C}$ . Ta gọi  $E_f(a)$  là tập các  $a$ -điểm của  $f$  ở đó mỗi  $a$ -điểm được tính với bội của nó, tức là

$$E_f(a) = \{(z, \nu_f^a(z)) : z \in \mathbb{C}, f(z) = a\}.$$

Tương tự, ta gọi  $\overline{E}_f(a)$  là tập các  $a$ -điểm của  $f$  trong đó mỗi  $a$ -điểm được tính chỉ một lần.

Đối với  $k$  là số nguyên dương, ta gọi  $E_f(a, k)$  là tập các  $a$ -điểm của  $f$  trong đó mỗi  $a$ -điểm  $z$  được tính  $\nu_f^a(z)$  lần nếu  $\nu_f^a(z) \leq k$  và  $k+1$  lần nếu  $\nu_f^a(z) > k$ . Tức là

$$E_f(a, k) = \left\{ (z, m) : f(z) = a, m = \begin{cases} \nu_f^a(z) & \text{nếu } \nu_f^a(z) \leq k, \\ k+1 & \text{nếu } \nu_f^a(z) > k. \end{cases} \right\}.$$

Đối với số nguyên dương  $\alpha$ , ta đặt

$$E_{f,\alpha}(a) = \{(z, \nu_f^a(z)) : f(z) = a, \nu_f^a(z) \leq \alpha\}.$$

Đối với tập con khác rỗng  $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , ta đặt

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} E_f(a).$$

Tương tự ta có các tập  $\overline{E}_f(S)$ ,  $E_f(S, k)$ ,  $E_{f,\alpha}(S)$ .

Hai hàm phân hình khác hằng  $f, g$  được nói là *chia sẻ  $S$  kể cả bội* (chia sẻ  $S$  CM) nếu  $E_f(S) = E_g(S)$ , *chia sẻ  $S$  không kể bội* (chia sẻ  $S$  IM) nếu  $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$  và *chia sẻ  $S$  với trọng  $k$*  nếu  $E_f(S, k) = E_g(S, k)$ .

Cho  $\mathcal{F}$  là tập con khác rỗng của  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ . Đối với bất kỳ hai hàm khác hằng  $f, g$  của  $\mathcal{F}$ , nếu điều kiện  $E_f(S) = E_g(S)$  (tương ứng  $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$ ) suy ra  $f = g$  thì  $S$  được gọi là tập xác định duy nhất tính bội (tương ứng không tính bội) đối với họ hàm  $\mathcal{F}$ . Tương tự, đối với bất kỳ hai hàm khác hằng  $f, g$  của  $\mathcal{F}$ , nếu điều kiện  $E_f(S, k) = E_g(S, k)$ , suy ra  $f = g$ , thì  $S$  được gọi là tập xác định duy nhất với trọng  $k$  đối với họ hàm  $\mathcal{F}$ . Rõ ràng

$$E_f(S) = E_f(S, \infty); \quad \overline{E}_f(S) = \overline{E}_f(S, 0).$$

Cho  $P(z)$  là đa thức với các hệ số phức. Đa thức  $P(z)$  được gọi là *đa thức duy nhất đối với hàm phân hình (nguyên)* nếu hai hàm phân hình (nguyên) khác hằng tùy ý  $f$  và  $g$ , thỏa mãn điều kiện  $P(f) = P(g)$  và kéo theo  $f = g$ . Đa thức  $P(z)$  được gọi là *đa thức duy nhất mạnh đối với hàm phân hình (nguyên)* nếu hai hàm phân hình (nguyên) khác hằng tùy ý  $f, g$  và hằng số khác không  $c$  tùy ý, thỏa mãn điều kiện  $P(f) = cP(g)$  và kéo theo  $f = g$ .

Xét đa thức  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  bậc  $q$  có dạng

$$P(z) = a(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_q), \quad (1.1)$$

trong đó đạo hàm của đa thức  $P(z)$  có  $k$  không điểm phân biệt  $d_1, d_2, \dots, d_k$  với các bội  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , tương ứng, khi đó

$$P'(z) = aq(z - d_1)^{q_1}(z - d_2)^{q_2} \dots (z - d_k)^{q_k}, \quad a \neq 0.$$

Số  $k$  được gọi là *chỉ số đạo hàm* của  $P(z)$ . Giả sử rằng:

$$P(d_i) \neq 0 \text{ đối với } 1 \leq i \leq k. \quad (1.2)$$

Chú ý rằng, điều kiện (1.2) suy ra  $P(z)$  chỉ có không điểm đơn. Chúng ta nhớ lại điều kiện sau được giới thiệu bởi Fujimoto H. (xem [18], trang 35):

$$P(d_i) \neq P(d_j) \text{ đối với } 1 \leq i < j \leq k, \quad k \geq 2. \quad (F)$$

Fujimoto H. ([17], Mệnh đề 7.1, trang 1200) đã chứng minh sau:

**Mệnh đề 1.1.11** ([17], Mệnh đề 7.1, trang 1200). *Giả sử  $a_1, \dots, a_q$  là các số phức phân biệt và đa thức duy nhất mạnh  $P(z) = a(z - a_1) \dots (z - a_q)$  thỏa mãn các điều kiện (1.2) and (F). Giả sử rằng  $q \geq 5$  và tồn tại  $f$  và  $g$  hai hàm phân hình khác hằng sao cho*

$$\frac{1}{P(f)} = \frac{c_0}{P(g)} + c_1,$$

*đối với các hằng số  $c_0 \neq 0$  và  $c_1$ . Nếu  $k \geq 3$  hoặc nếu  $k = 2$ ,  $\min\{q_1, q_2\} \geq 2$ , thì  $c_1 = 0$ .*

**Mệnh đề 1.1.12** ([18], Định lý 1.4, trang 35). *Giả sử  $a_1, \dots, a_q$  là các số phức phân biệt và đa thức  $P(z) = a(z - a_1) \dots (z - a_q)$  thỏa mãn các điều kiện (1.2) và (F). Khi đó  $P(z)$  là đa thức duy nhất nếu và chỉ nếu*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} q_i q_j > \sum_{i=1}^k q_i.$$

*Đặc biệt, bất đẳng thức trên luôn thỏa mãn mỗi khi  $k \geq 4$ . Khi  $k = 3$  và  $\max\{q_1, q_2, q_3\} \geq 2$ , hoặc khi  $k = 2$ ,  $\min\{q_1, q_2\} \geq 2$  và  $q_1 + q_2 \geq 5$ .*

**Mệnh đề 1.1.13** ([19], Định lý 4.1, trang 57). *Giả sử hàm nguyên  $f$  có bậc hữu hạn  $\rho$ . Nếu  $f$  không có không điểm, thì  $f(z) = e^{h(z)}$ , ở đó  $h(z)$  là đa thức có bậc nhỏ hơn  $\rho$ .*

**Mệnh đề 1.1.14** ([31], Bổ đề 8, trang 270). *Giả sử hàm phân hình khác hằng  $f$ . Khi đó*

$$\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{2}\overline{N}_1\left(\rho, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{2}N\left(\rho, \frac{1}{f}\right).$$

## 1.2. Định lý duy nhất liên quan đến giá trị khuyết

Kí hiệu  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  là tập các hàm phân hình trên  $\mathbb{C}$ . Đối với họ  $\mathcal{F}$  các tập con khác rỗng của  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  và  $t$  là số thực thỏa mãn  $0 \leq t \leq 1$ , kí hiệu

$$\mathcal{F}_f(\Theta(a, f) \geq t) = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) : \Theta(a, f) \geq t\},$$

$$\mathcal{F}_f(\Theta(a, f) \leq t) = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) : \Theta(a, f) \leq t\}.$$

Tương tự, ta định nghĩa được

$$\mathcal{F}_f(\Theta(a, f) > t), \mathcal{F}_f(\Theta(a, f) < t).$$

Định lý sau đây là điều kiện đại số liên quan đến số khuyết tại  $\infty$  để hàm phân hình và  $L$ -hàm đồng nhất bằng nhau.

**Định lý 1.2.1.** *Cho  $f$  là hàm phân hình khác hằng,  $L$  là  $L$ -hàm khác hằng. Giả sử  $a_1, \dots, a_q$  là các số phức phân biệt và đa thức duy nhất mạnh  $P(z) = a(z - a_1) \dots (z - a_q)$  thỏa mãn các điều kiện (1.2), điều kiện  $(F)$  và  $E_f(S) = E_L(S)$ , trong đó  $S = \{z : P(z) = 0\}$ . Giả sử rằng  $\min\{q_1, q_2\} \geq 2$  khi  $k = 2$  và một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

$$1) q \geq 2k + 3 \text{ và } f \in \mathcal{F}_f(\Theta(\infty, f) \geq t), 1 \geq t \geq \frac{1}{2};$$

$$2) q \geq 2k + 4 \text{ và } f \in \mathcal{F}_f(\Theta(\infty, f) \geq t), t < \frac{1}{2}.$$

*Khi đó  $f = L$ .*

Để chứng minh Định lý 1.2.1, trước hết ta cần một số mệnh đề sau đây.

**Mệnh đề 1.2.2.** *Với các giả thiết của Định lý 1.2.1, ta có*

- 1)  $(q-1)T(\rho, L) + S(\rho, L) \leq qT(\rho, f) + S(\rho, f),$
- 2)  $(q-2)T(\rho, f) + S(\rho, f) \leq qT(\rho, L) + S(\rho, L).$

*Chứng minh.* Áp dụng hai định lý cơ bản và chú ý rằng  $\overline{N}(\rho, L) = S(\rho, L)$  (từ Mệnh đề 1.1.8),  $E_L(S) = E_f(S)$ , ta thu được

$$(q-1)T(\rho, L) \leq \overline{N}(\rho, L) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{L-a_i}\right) + S(\rho, L),$$

trong đó  $a_1, \dots, a_n$  là các số phức phân biệt, từ đó suy ra

$$\begin{aligned} (q-1)T(\rho, L) + S(\rho, L) &\leq \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(\rho, f) \\ &\leq qT(\rho, f) + S(\rho, f). \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$(q-1)T(\rho, f) \leq \overline{N}(\rho, f) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f-a_i}\right) + S(\rho, f),$$

suy ra

$$(q-1)T(\rho, f) + S(\rho, f) \leq T(\rho, f) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{L-a_i}\right) + S(\rho, L)$$

và kéo theo

$$(q-2)T(\rho, f) + S(\rho, f) \leq qT(\rho, L) + S(\rho, L).$$

Kết hợp các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\begin{aligned} \frac{q-1}{q}T(\rho, L) + S(\rho, L) &\leq T(\rho, f) + S(\rho, f) \leq \frac{q}{q-2}T(\rho, L) + S(\rho, L), \\ \frac{q-2}{q}T(\rho, f) + S(\rho, f) &\leq T(\rho, L) + S(\rho, L) \leq \frac{q}{q-1}T(\rho, f) + S(\rho, f). \end{aligned}$$

Vậy, Mệnh đề 1.2.2 được chứng minh. □

Từ Mệnh đề 1.2.2 ta thu được

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{S(\rho, L)}{T(\rho, f)} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{S(\rho, f)}{T(\rho, L)} = 0.$$

Do đó  $S(\rho, L) = o(T(\rho, f))$  và  $S(\rho, f) = o(T(\rho, L))$ . Đặt

$$S(\rho) = S(\rho, L) + S(\rho, f).$$

Khi đó  $S(\rho) = o(T(\rho, L))$  và  $S(\rho) = o(T(\rho, f))$ . Từ đó

$$T(\rho, P(f)) = qT(\rho, f) + O(1)$$

và

$$T(\rho, P(L)) = qT(\rho, L) + O(1),$$

vì thế

$$S(\rho, P(f)) = S(\rho, f) = o(T(\rho, L))$$

và

$$S(\rho, P(L)) = S(\rho, L) = o(T(\rho, f)).$$

Đặt

$$F = \frac{1}{P(f)}, \quad L = \frac{1}{P(L)}, \quad H = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}.$$

Ta có mệnh đề sau:

**Mệnh đề 1.2.3.**  $H \equiv 0$  nếu một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- 1)  $q \geq 2k + 4 - 2\Theta(\infty, f)$  và  $\Theta(\infty, f) < 1$ .
- 2)  $q \geq 2k + 3$  và  $\Theta(\infty, f) = 1$ .

*Chứng minh.* Ta giả sử ngược lại rằng  $H \not\equiv 0$ .

**Khẳng định 1.** Ta có

i)  $(q - 1)T(\rho, L) \leq \overline{N}(\rho, \frac{1}{P(L)}) - N_o(\rho, \frac{1}{L'}) + S(\rho)$ , trong đó  $N_o(\rho, \frac{1}{L'})$

là hàm đếm các không điểm của  $L'$ , mà không là các không điểm của hàm  $(L - a_1)(L - a_2) \dots (L - a_q)$ .

ii)  $(q-1)T(\rho, f) \leq \overline{N}(\rho, f) + \overline{N}(\rho, \frac{1}{P(f)}) - N_o(\rho, \frac{1}{f'}) + S(\rho)$ , trong đó  $N_o(\rho, \frac{1}{f'})$  là hàm đếm các không điểm của  $f'$ , mà không là các không điểm của hàm  $(f - a_1) \dots (f - a_q)$ .

*Chứng minh.* i) Áp dụng định lý cơ bản thứ hai cho  $L$  và các giá trị  $a_1, a_2, \dots, a_q$  với chú ý rằng

$$N(\rho, L) = S(\rho, L), \quad \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{L - a_i}\right) = \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{P(L)}\right),$$

ta thu được

$$\begin{aligned} (q-1)T(\rho, L) &\leq \overline{N}(\rho, L) + \sum_{i=1}^q \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{L - a_i}\right) - N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) + S(\rho, L), \\ &\leq \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{P(L)}\right) - N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) + S(\rho). \end{aligned}$$

ii) Bất đẳng thức đối với  $f$  được chứng minh bằng lập luận tương tự.

**Khẳng định 2.** *Ta có*

$$\begin{aligned} N(\rho, H) &\leq kT(\rho, L) + kT(\rho, f) + \overline{N}(\rho, f) + N_o\left(\rho, \frac{1}{f'}\right) \\ &\quad + N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) + S(\rho). \end{aligned}$$

*Chứng minh.* Chú ý rằng, điều kiện

$$E_f(S) = E_L(S),$$

kéo theo

$$f^{-1}(S) = L^{-1}(S)$$

và

$$\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}; \nu_1 > \nu_2 \geq 1\right) = 0; \quad \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{L}; \nu_2 > \nu_1 \geq 1\right) = 0.$$

Do  $H$  chỉ có cực điểm đơn, nên từ Mệnh đề 1.1.9 ta có

$$\begin{aligned} N(\rho, H) &\leq \overline{N}_{(2)}(\rho, P(f)) + \overline{N}_{(2)}(\rho, P(L)) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{P'(f)}; P(f) \neq 0\right) \\ &\quad + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{P'(L)}; P(L) \neq 0\right) + S(\rho). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ta có

$$\overline{N}_{(2)}(\rho, P(L)) = \overline{N}(\rho, L) = S(\rho), \quad \overline{N}_{(2)}(\rho, P(f)) = \overline{N}(\rho, f).$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} &\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{[P(L)]'}; P(L) \neq 0\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{L - d_i}; (L - a_1) \dots (L - a_q) \neq 0\right) + N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{L - d_i}\right) + N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) \\ &\leq kT(\rho, L) + N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) + S(\rho). \end{aligned}$$

Do đó

$$\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{[P(L)]'}; P(L) \neq 0\right) \leq kT(\rho, L) + N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) + S(\rho).$$

Lập luận tương tự cho hàm  $f$  ta có

$$\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{[P(f)]'}; P(f) \neq 0\right) \leq kT(\rho, f) + N_o\left(\rho, \frac{1}{f'}\right) + S(\rho).$$

Kết hợp các lập luận trên vào (1.3) ta có chứng minh của Khẳng định 2.

**Khẳng định 3.** *Ta có*

$$\begin{aligned} i) \quad \overline{N}(\rho, \frac{1}{P(L)}) + \overline{N}(\rho, \frac{1}{P(f)}) &\leq \left(\frac{q}{2} + k\right)T(\rho, L) + \left(\frac{q}{2} + k\right)T(\rho, f) + \overline{N}(\rho, f) \\ &\quad + N_o(\rho, \frac{1}{L'}) + N_o(\rho, \frac{1}{f'}) + S(\rho). \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad (q - 2k - 2)T(\rho, L) + (q - 2k - 2)T(\rho, f) \leq 4\overline{N}(\rho, f) + S(\rho).$$

*Chứng minh.* i) Chú ý rằng từ Mệnh đề 1.1.9 ta thấy rằng, nếu  $a$  là không điểm đơn chung của  $P(f)$  và  $P(L)$  thì  $H(a) = 0$ . Do đó

$$\begin{aligned} N_{1)} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) &= N_{1)} \left( \rho, \frac{1}{P(f)} \right) \leq N \left( \rho, \frac{1}{H} \right) \leq T(\rho, H) + S(\rho, H) \\ &\leq N(\rho, H) + S(\rho). \end{aligned}$$

Từ bổ đề đạo hàm logarit ta có  $m(\rho, H) = o(T(\rho, H))$  và từ Mệnh đề 1.1.7,  $S(\rho, H) \leq S(\rho)$ . Từ đó, áp dụng Mệnh đề 1.1.14 và Khẳng định 2, ta thu được

$$\begin{aligned} &\overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(f)} \right) \\ &= \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(f)} \right) - N_{1)} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + N_{1)} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) \\ &= \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) - \frac{1}{2} N_{1)} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(f)} \right) - \frac{1}{2} N_{1)} \left( \rho, \frac{1}{P(f)} \right) \\ &\quad + N_{1)} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( N \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + N \left( \rho, \frac{1}{P(f)} \right) \right) + N(\rho, H) \\ &\leq \left( \frac{q}{2} + k \right) T(\rho, L) + \left( \frac{q}{2} + k \right) T(\rho, f) + \overline{N}(\rho, f) + N_o \left( \rho, \frac{1}{L'} \right) \\ &\quad + N_o \left( \rho, \frac{1}{f'} \right) + S(\rho). \end{aligned}$$

ii) Từ Khẳng định 1 và Phần i) của Khẳng định 3 ta thu được

$$\begin{aligned} (2q - 2)T(\rho, L) + (2q - 2)T(\rho, f) &\leq (q + 2k)T(\rho, L) + (q + 2k)T(\rho, f) \\ &\quad + 4\overline{N}(\rho, f) + S(\rho), \\ (q - 2k - 2)T(\rho, L) + (q - 2k - 2)T(\rho, f) &\leq 4\overline{N}(\rho, f) + S(\rho). \end{aligned}$$

Vậy, Khẳng định 3 được chứng minh.

Bây giờ ta áp dụng Mệnh đề 1.2.2 và Phần ii) của Khẳng định 3 để thu được mâu thuẫn và hoàn thành chứng minh  $H \equiv 0$ .

1)  $q \geq 2k + 4 - 2\Theta(\infty, f)$  và  $\Theta(\infty, f) < 1$ .

Xét hàm số  $\alpha(x)$  trên  $x \geq 2k + 4 - 2\Theta(\infty, f)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , trong đó

$$\alpha(x) = 2x - 4k - 9 + 4\Theta(\infty, f) + \frac{2k + 6 - 4\Theta(\infty, f)}{x}.$$

Ta có  $\alpha'(x) = 2 - \frac{2k + 6 - 4\Theta(\infty, f)}{x^2} > 0$  trên  $x \geq 2k + 4 - 2\Theta(\infty, f)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Kết hợp trên và  $q \geq 2k + 4 - 2\Theta(\infty, f)$  và  $\Theta(\infty, f) < 1$  ta thu được

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= 2q - 4k - 9 + 4\Theta(\infty, f) + \frac{2k + 6 - 4\Theta(\infty, f)}{q}, \\ \alpha(2k + 4 - 2\Theta(\infty, f)) &= \frac{2k + 6 - 4\Theta(\infty, f)}{2k + 4 - 2\Theta(\infty, f)} - 1 > 0, \\ \alpha(q) &\geq \alpha(2k + 4 - 2\Theta(\infty, f)) > 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Từ (1.4) ta có

$$\alpha(q) \geq \alpha(2k + 4 - 2\Theta(\infty, f)) > \varepsilon > 0, \tag{1.5}$$

trong đó  $\varepsilon$  là số dương nhỏ.

Áp dụng Phần ii) của Khẳng định 3 và Phần 1) của Mệnh đề 1.2.2 ta thu được

$$\begin{aligned} (q - 2k - 2)T(\rho, L) + (q - 2k - 2)T(\rho, f) &\leq 4\overline{N}(\rho, f) + S(\rho), \\ (q - 2k - 2)T(\rho, L) + (q - 2k - 2)T(\rho, f) &\leq 4 \left( 1 - \Theta(\infty, f) + \frac{\varepsilon}{4} \right) T(\rho, f) \\ &\quad + S(\rho), \end{aligned}$$

$$\left( 2q - 4k - 9 + 4\Theta(\infty, f) + \frac{2k + 6 - 4\Theta(\infty, f)}{q} - \frac{q - 1}{q}\varepsilon \right) T(\rho, L) \leq S(\rho),$$

điều này là mâu thuẫn với (1.5).

2)  $q \geq 2k + 3$  và  $\Theta(\infty, f) = 1$ .

Xét hàm số  $\beta(x)$  trên  $x \geq 2k + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , trong đó

$$\beta(x) = 2x - 4k - 5 + \frac{2k + 2}{x}.$$

Ta có  $\beta'(x) = 2 - \frac{2k + 2}{x^2} > 0$  trên  $x \geq 2k + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Kết hợp trên và  $q \geq 2k + 3$  ta thu được

$$\begin{aligned} \beta(q) &= 2q - 4k - 5 + \frac{2k + 2}{q}, \\ \beta(2k + 3) &= 1 + \frac{2k + 2}{2k + 3} > 1, \\ \beta(q) &\geq \beta(2k + 3) > 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Từ Phần ii) của Khẳng định 3 và  $\Theta(\infty, f) = 1$  và Mệnh đề 1.2.2 ta thu được  $\overline{N}(\rho, f) = S(\rho)$  và do đó

$$\begin{aligned} (q - 2k - 2)T(\rho, L) + (q - 2k - 2)T(\rho, f) &\leq S(\rho), \\ \left(2q - 4k - 5 + \frac{2k + 2}{q}\right)T(\rho, L) &\leq S(\rho). \end{aligned} \tag{1.7}$$

điều này là mâu thuẫn với (1.6).

Do đó,  $H \equiv 0$ . Vậy, Mệnh đề 1.2.3 được chứng minh.  $\square$

Bây giờ chúng ta chứng minh Định lý 1.2.1.

*Chứng minh.* Trước hết, ta chứng minh  $H \equiv 0$ .

1)  $q \geq 2k + 3$  và  $f \in \mathcal{F}_f$  ( $\Theta(\infty, f) \geq t$ ),  $1 \geq t \geq \frac{1}{2}$ .

Nếu  $t = 1$ , thì  $\Theta(\infty, f) = 1$  và từ Phần 2) của Mệnh đề 1.2.3, khi đó  $H \equiv 0$ .

Nếu  $1 > t \geq \frac{1}{2}$  và  $1 > \Theta(\infty, f) \geq \frac{1}{2}$ , thì

$$q \geq 2k + 3 \geq 2k + 4 - 2\Theta(\infty, f) > 2k + 2.$$

Do đó,  $H \equiv 0$  từ Phần 1) của Mệnh đề 1.2.3.

2)  $q \geq 2k + 4$  và  $f \in \mathcal{F}_f$  ( $\Theta(\infty, f) \geq t$ ),  $t < \frac{1}{2}$ .

Nếu  $\Theta(\infty, f) < \frac{1}{2}$ , thì  $0 \geq -2\Theta(\infty, f) > -1$ . Do đó

$$q \geq 2k + 4 \geq 2k + 4 - 2\Theta(\infty, f) > 2k + 3,$$

điều này suy ra rằng  $H \equiv 0$  từ Phần 1) của Mệnh đề 1.2.3.

Nếu  $\Theta(\infty, f) \geq \frac{1}{2}$ , thì  $H \equiv 0$  từ  $q \geq 2k + 4 > 2k + 3$  và 1).

Như vậy,  $H \equiv 0$ . Do đó  $\frac{1}{P(L)} = \frac{c}{P(f)} + c_1$  đối với các hằng số  $c \neq 0$  và  $c_1$ . Từ Mệnh đề 1.1.11 ta thu được  $c_1 = 0$ . Do đó, tồn tại hằng số  $c \neq 0$  sao cho  $P(f) = cP(L)$ . Do  $P(z)$  là đa thức duy nhất mạnh ta thu được  $f = L$  và Định lý 1.2.1 được chứng minh.  $\square$

**Chú ý 1.2.1.** Lấy các giá trị đặc biệt đối với  $t$  trong Định lý 1.2.1, ta nhận được các trường hợp quan tâm sau đối với  $k = 2$  và  $\Theta(\infty, f)$ :

i) *Tồn tại tập  $S$  gồm 7 phần tử sao cho hàm phân hình  $f$  và  $L$ -hàm  $L$  bất kỳ thỏa mãn  $E_f(S) = E_L(S)$  và  $\Theta(\infty, f) = 1$  là đồng nhất bằng nhau.*

Thực vậy, lấy  $k = 2$  và  $t = 1$  trong Định lý 1.2.1. Khi đó  $\Theta(\infty, f) = 1$  và áp dụng Định lý 1.2.1, Phần 1, ta thu được  $q \geq 7$ .

ii) *Tồn tại tập  $S$  gồm 8 phần tử sao cho hàm phân hình  $f$  và  $L$ -hàm  $L$  bất kỳ thỏa mãn  $E_f(S) = E_L(S)$  là đồng nhất bằng nhau.*

Thực vậy, lấy  $k = 2$  và  $t \leq 0$  trong Định lý 1.2.1. Khi đó  $\Theta(\infty, f) \geq 0$  và áp dụng Định lý 1.2.1, Phần 2, ta thu được  $q \geq 8$ .

### 1.3. Định lý duy nhất liên quan đến đạo hàm

Xem xét các đa thức  $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$  bậc  $n$  có dạng:

$$\begin{aligned} P(z) &= az^n + bz^{n-m} + c, \text{ trong đó } a, b, c \neq 0, \\ Q(z) &= uz^n + vz^{n-m} + t, \text{ trong đó } u, v, t \neq 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Giả sử rằng

$$\frac{a^{n-m}c^m}{b^n} \neq \frac{(-1)^n(n-m)^{n-m}m^m}{n^n}, \quad (1.9)$$

$$\frac{u^{n-m}t^m}{v^n} \neq \frac{(-1)^n(n-m)^{n-m}m^m}{n^n}. \quad (1.10)$$

Chú ý rằng đa thức  $P(z)$  (tương ứng  $Q(z)$ ) là đa thức bậc  $n$  và có  $n$  không điểm đơn phân biệt nếu và chỉ nếu điều kiện (1.9) (tương ứng (1.10)) được thỏa mãn (xem [34], Bổ đề 2.7, trang 151).

Kết quả sau đây của chúng tôi là vấn đề duy nhất cho hàm phân hình liên quan đến đạo hàm của các hàm phân hình.

**Định lý 1.3.1.** *Giả sử  $m, n$  là các số nguyên dương,  $n \geq 2m + 7$ ;  $P(z), Q(z)$  là các đa thức có dạng (1.8) thỏa mãn các điều kiện (1.9) và (1.10). Gọi  $S, T$  lần lượt là các tập không điểm của  $P, Q$ . Giả sử  $f$  là hàm phân hình khác hằng với hữu hạn cực điểm trong mặt phẳng phức và  $L$  là  $L$ -hàm. Khi đó ta có:*

1.  $L^{-1}(S) = f^{-1}(T)$  và  $E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0)$  nếu và chỉ nếu  $f = hL$  và  $hS = T$ , ở đó  $h$  là hằng số khác không thỏa mãn  $h^n = \frac{at}{cu}$  và  $h^m = \frac{av}{ub}$ .
2. Đặc biệt nếu  $f$  là  $L$ -hàm thì  $L^{-1}(S) = f^{-1}(T)$  và  $E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0)$  nếu và chỉ nếu  $f = L$  và  $\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{t}$ .

*Chứng minh.* Ta chứng minh (1). Ta nhắc lại

$$P(z) = az^n + bz^{n-m} + c, \quad Q(z) = uz^n + vz^{n-m} + t,$$

trong đó  $a, b, c, u, v, t \neq 0$ , khi đó

$$P(z) = a(z - a_1) \dots (z - a_n),$$

$$Q(z) = u(z - b_1) \dots (z - b_n),$$

$$P'(z) = Az^{n-m-1}(z - d_1) \dots (z - d_m), \quad A \neq 0, d_i \neq d_j,$$

$$Q'(z) = Bz^{n-m-1}(z - t_1) \dots (z - t_m), \quad B \neq 0, t_i \neq t_j.$$

Suy ra

$$P(L) = a(L - a_1) \dots (L - a_n),$$

$$\begin{aligned}
Q(f) &= u(f - b_1) \dots (f - b_n). \\
(P(L))' &= AL^{n-m-1}(L - d_1) \dots (L - d_m)L', \\
(Q(f))' &= Bf^{n-m-1}(f - t_1) \dots (f - t_m)f'.
\end{aligned}$$

Ta đặt

$$F = \frac{1}{P(L)}, \quad G = \frac{1}{Q(f)}, \quad \Phi = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}. \quad (1.11)$$

Từ đó

$$T(\rho, P(L)) = nT(\rho, L) + O(1)$$

và

$$T(\rho, Q(f)) = nT(\rho, f) + O(1),$$

vì thế  $S(\rho, P(L)) = S(\rho, L)$  và  $S(\rho, Q(f)) = S(\rho, f)$ .

*Điều kiện cần.* Từ Mệnh đề 1.2.2 ta có

$$(n-1)T(\rho, L) + S(\rho, L) \leq nT(\rho, f) + S(\rho, f). \quad (1.12)$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$(n-1)T(\rho, f) + S(\rho, f) \leq nT(\rho, L) + S(\rho, L). \quad (1.13)$$

Thật vậy, từ Mệnh đề 1.1.8 ta có

$$T(\rho, L) = \frac{d_L}{\pi} \rho \log \rho + O(\rho),$$

vì vậy  $\overline{N}(\rho, L) = S(\rho, L)$ . Mặt khác, ta có

$$\overline{N}(\rho, f) = \sum_{0 < |a_i| < \rho} \log \frac{\rho}{|a_i|} + \overline{n}(0, f) \log \rho,$$

trong đó  $a_i$  là các cực điểm không kể bội của  $f$  (xem [19], trang 14). Do  $f$  là hàm phân hình khác hằng với hữu hạn cực điểm nên từ đẳng thức trên

ta suy ra  $\overline{N}(\rho, f) = O(\log \rho)$  và do đó  $\overline{N}(\rho, f) = S(\rho, L)$ . Áp dụng hai định lý cơ bản với chú ý rằng  $\overline{E}_L(S) = \overline{E}_f(T)$ , ta có

$$(n-1)T(\rho, f) \leq \overline{N}(\rho, f) + \sum_{i=1}^n \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f-b_i}\right) + S(\rho, f),$$

suy ra

$$(n-1)T(\rho, f) + S(\rho, f) \leq \sum_{i=1}^n \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{L-a_i}\right) + S(\rho, L).$$

Do đó

$$\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{L-a_i}\right) \leq T(\rho, L) + S(\rho, L),$$

với mọi  $i = 1, \dots, n$ , kết hợp với bất đẳng thức trên ta có (1.13). Từ các bất đẳng thức (1.12) và (1.13)

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n}T(\rho, L) + S(\rho, L) &\leq T(\rho, f) + S(\rho, f) \leq \frac{n}{n-1}T(\rho, L) + S(\rho, L), \\ \frac{n-1}{n}T(\rho, f) + S(\rho, f) &\leq T(\rho, L) + S(\rho, L) \leq \frac{n}{n-1}T(\rho, f) + S(\rho, f). \end{aligned}$$

Từ hai bất đẳng thức này ta suy ra

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{S(\rho, L)}{T(\rho, f)} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{S(\rho, f)}{T(\rho, L)} = 0.$$

Do đó  $S(\rho, L) = o(T(\rho, f))$  và  $S(\rho, f) = o(T(\rho, L))$ . Như vậy

$$\overline{N}(\rho, f) = S(\rho, L)$$

và do đó

$$\overline{N}(\rho, f) = o(T(\rho, f)).$$

Ta tiếp tục chứng minh điều kiện cần. Đặt

$$S(\rho) = S(\rho, f) + S(\rho, L), \quad T(\rho) = T(\rho, f) + T(\rho, L). \quad (1.14)$$

**Khẳng định 1.**  $\Phi \equiv 0$ .

*Chứng minh.* Thật vậy, giả sử ngược lại  $\Phi \neq 0$ . Khi đó, từ (i) của Khẳng định 1 trong chứng minh của Định lý 1.2.1, ta có

$$(n-1)T(\rho, L) \leq \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{P(L)}\right) - N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) + S(\rho), \quad (1.15)$$

trong đó  $N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right)$  là hàm đếm các không điểm của  $L'$  mà không là các không điểm của hàm  $(L - a_1)(L - a_2) \dots (L - a_n)$ .

Ta xem xét bất đẳng thức tương tự cho hàm  $f$ . Áp dụng hai định lý cơ bản cho  $f$  và các giá trị  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , ta có

$$(n-1)T(\rho, f) \leq \overline{N}(\rho, f) + \sum_{i=1}^n \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f - b_i}\right) - N_o\left(\rho, \frac{1}{f'}\right) + S(\rho, f),$$

trong đó  $N_o\left(\rho, \frac{1}{f'}\right)$  là hàm đếm các không điểm của  $f'$  mà không là không điểm của  $(f - b_1) \dots (f - b_n)$ . Chú ý rằng,  $\overline{N}(\rho, f) = S(\rho, f) = S(\rho, L)$  nên từ bất đẳng thức trên ta có

$$(n-1)T(\rho, f) \leq \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{Q(f)}\right) - N_o\left(\rho, \frac{1}{f'}\right) + S(\rho). \quad (1.16)$$

Kết hợp hai bất đẳng thức (1.15) và (1.16), ta có

$$\begin{aligned} (n-1)T(\rho) &\leq \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{P(L)}\right) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{Q(f)}\right) \\ &\quad - N_o\left(\rho, \frac{1}{f'}\right) - N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) + S(\rho). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Bây giờ ta chứng minh

$$\begin{aligned} N(\rho, \Phi) &\leq (m+1)T(\rho) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2\right) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2\right) \\ &\quad + N_o\left(\rho, \frac{1}{f'}\right) + N_o\left(\rho, \frac{1}{L'}\right) + S(\rho). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Thật vậy, điều kiện  $L^{-1}(S) = f^{-1}(T)$  ta suy ra  $(P(L))^{-1}(0) = (Q(f))^{-1}(0)$ .

Kí hiệu  $\nu_{P(L)}(z) = \nu_1$ ,  $\nu_{Q(f)}(z) = \nu_2$ , áp dụng Mệnh đề 1.1.9, ta có

$$N(\rho, \Phi) \leq \overline{N}_{(2)}(\rho, P(L)) + \overline{N}_{(2)}(\rho, Q(f)) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{(P(L))'}; P(L) \neq 0\right)$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{(Q(f))'}; Q(f) \neq 0 \right) + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 > \nu_2 \geq 1 \right) \\
& + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 > \nu_1 \geq 1 \right) \\
& \leq \overline{N}_{(2)}(\rho, P(L)) + \overline{N}_{(2)}(\rho, Q(f)) + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{(P(L))'}; P(L) \neq 0 \right) \\
& + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{(Q(f))'}; Q(f) \neq 0 \right) + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) \\
& + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2 \right). \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Ta ước lượng các đại lượng ở vế phải bất đẳng thức (1.19). Ta thấy

$$\overline{N}_{(2)}(\rho, P(L)) = \overline{N}(\rho, L) = S(\rho), \quad \overline{N}_{(2)}(\rho, Q(f)) = \overline{N}(\rho, f) = S(\rho).$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}
& \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{(P(L))'}; P(L) \neq 0 \right) \\
& \leq \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{L} \right) + \sum_{i=1}^m \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{L - d_i}; (L - a_1) \dots (L - a_n) \neq 0 \right) \\
& \quad + N_o \left( \rho, \frac{1}{L'} \right) \\
& \leq \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{L} \right) + \sum_{i=1}^m \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{L - d_i} \right) + N_o \left( \rho, \frac{1}{L'} \right).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P'(L)}; P(L) \neq 0 \right) \leq (m+1)T(\rho, L) + N_o \left( \rho, \frac{1}{L'} \right) + S(\rho).$$

Tương tự

$$\overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q'(f)}; P(f) \neq 0 \right) \leq (m+1)T(\rho, f) + N_o \left( \rho, \frac{1}{f'} \right) + S(\rho).$$

Thay thế các đánh giá trên vào vế trái của (1.19) ta thu được (1.18).

Bây giờ ta chứng minh

$$\overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q(f)} \right) \leq \left( \frac{n}{2} + m + 2 \right) T(\rho) + N_o \left( \rho, \frac{1}{L'} \right)$$

$$+ N_o \left( \rho, \frac{1}{f'} \right) + S(\rho). \quad (1.20)$$

Thật vậy, ta nhắc lại kí hiệu  $\nu_{P(L)}(z) = \nu_1$ ,  $\nu_{Q(f)}(z) = \nu_2$ . Trước hết ta chứng minh

$$\overline{E}_{P(L)}(0, \nu_1 = 1) \cap \overline{E}_{Q(f)}(0, \nu_2 = 2) = \emptyset.$$

Giả sử ngược lại

$$\overline{E}_{P(L)}(0, \nu_1 = 1) \cap \overline{E}_{Q(f)}(0, \nu_2 = 2) \neq \emptyset.$$

Từ điều này và

$$P(L) = a(L - a_1) \dots (L - a_n), \quad Q(f) = u(f - b_1) \dots (f - b_n),$$

suy ra tồn tại  $a_i$ ,  $b_j$  và  $z_0$  sao cho

$$z_0 \in \overline{E}_L(a_i, \nu_{L-a_i} = 1) \cap \overline{E}_f(b_j, \nu_{f-b_j} = 2).$$

Do đó  $z_0 \in E_{f',1)}(0)$ . Vì  $E_{f',1)}(0) = E_{L',1)}(0)$  ta có  $z_0 \in E_{L',1)}(0)$ , mâu thuẫn với  $\nu_{L-a_i}(z_0) = 1$  và  $(L - a_i)' = L'$ . Vậy

$$\overline{E}_{P(L)}(0, \nu_1 = 1) \cap \overline{E}_{Q(f)}(0, \nu_2 = 2) = \emptyset.$$

Tương tự, ta có

$$\overline{E}_{P(L)}(0, \nu_1 = 2) \cap \overline{E}_{Q(f)}(0, \nu_2 = 1) = \emptyset.$$

Áp dụng Mệnh đề 1.1.9 cho các hàm  $P(L), Q(f)$  ta thu được

$$\begin{aligned} & \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q(f)} \right) + 2\overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) \\ & \quad + 2\overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2 \right) \\ & \leq N(\rho, \Phi) + \frac{1}{2} \left( N \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + N \left( \rho, \frac{1}{Q(f)} \right) \right) \\ & \quad + N \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) + N \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2 \right) + S(\rho). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Kết hợp hai bất đẳng thức (1.18) và (1.21) ta thu được

$$\begin{aligned}
& \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q(f)} \right) \\
& \leq (m+1)T(\rho) + \frac{1}{2} \left( N \left( \rho, \frac{1}{P(L)} \right) + N \left( \rho, \frac{1}{Q(f)} \right) \right) \\
& \quad + N \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) - \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) \\
& \quad + N \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2 \right) - \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2 \right) \\
& \quad + N_0 \left( \rho, \frac{1}{L'} \right) + N_0 \left( \rho, \frac{1}{f'} \right) + S(\rho). \tag{1.22}
\end{aligned}$$

Ta biết  $P(L) = a(L - a_1) \dots (L - a_n)$  nên nếu  $z_0$  là không điểm bội  $d \geq 2$  của  $P(L)$ , thì  $z_0$  là không điểm bội  $d \geq 2$  của  $L - a_i$  với chỉ số  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  và do đó,  $z_0$  là không điểm bội  $d - 1$  của  $L'$ . Do đó

$$N \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) - \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) \leq N \left( \rho, \frac{1}{L'} \right).$$

Từ đó và Mệnh đề 1.1.7 ta thu được

$$\begin{aligned}
& N \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) - \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) \\
& \leq N \left( \rho, \frac{1}{L} \right) + \overline{N}(\rho, L) + S(\rho, L) \leq T(\rho, L) + S(\rho, L).
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}
N \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2 \right) - \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2 \right) & \leq N \left( \rho, \frac{1}{f'} \right) \\
& \leq T(\rho, f) + S(\rho, f).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
& N \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) - \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{P(L)}; \nu_1 \geq 2 \right) + N \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2 \right) \\
& \quad - \overline{N} \left( \rho, \frac{1}{Q(f)}; \nu_2 \geq 2 \right) \leq T(\rho) + S(\rho). \tag{1.23}
\end{aligned}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức (1.22) và (1.23) và lưu ý rằng

$$N\left(\rho, \frac{1}{P(L)}\right) + N\left(\rho, \frac{1}{Q(f)}\right) \leq nT(\rho),$$

ta nhận được (1.20).

Từ (1.17) và (1.20) ta có

$$(n-1)T(\rho) \leq \left(\frac{n}{2} + m + 2\right)T(\rho) + S(\rho),$$

suy ra

$$(n-2m-6)T(\rho) \leq S(\rho),$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết  $n \geq 2m+7$ . Như vậy Khẳng định 1 được chứng minh.

Ta tiếp tục chứng minh điều kiện cần của (1) trong Định lý 1.3.1. Từ Khẳng định 1 ta có  $\Phi \equiv 0$ . Vì vậy

$$\frac{1}{Q(f)} = \frac{l}{P(L)} + c_1,$$

ở đó  $l$  và  $c_1$  là các hằng số,  $l \neq 0$ . Theo Mệnh đề 1.1.2 ta thu được  $c_1 = 0$ .

Điều này kéo theo  $P(L) = lQ(f)$  và suy ra

$$aL^n + bL^{n-m} + c = luf^n + lvf^{n-m} + lt. \quad (1.24)$$

Từ (1.24) và Mệnh đề 1.1.11 ta có

$$f = hL, \quad l = \frac{c}{t}, \quad h^n = \frac{a}{lu}, \quad h^m = \frac{lv}{b} \frac{a}{ul}.$$

Do đó  $h^n = \frac{at}{cu}$ ,  $h^m = \frac{av}{ub}$ .

Bây giờ ta chứng minh  $hS = T$ . Lấy  $a_i \in S$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Theo Mệnh đề 1.1.10, tồn tại  $z_0 \in \mathbb{C}$  sao cho  $L(z_0) - a_i = 0$ . Hơn nữa, từ  $P(L) = lQ(f)$  và biểu diễn của  $P, Q$  ta có

$$a(L - a_1) \dots (L - a_n) = lu(f - b_1) \dots (f - b_n). \quad (1.25)$$

Từ (1.25) ta suy ra  $L(z_0) - a_j \neq 0$  với  $i \neq j$  và tồn tại duy nhất  $b_k \in T$  sao cho  $f(z_0) - b_k = 0$ . Vì  $f = hL$  nên  $hL(z_0) - b_k = 0$  và do đó  $ha_i = b_k$ .

Do các tập  $S, T$  có đúng  $n$  phần tử nên  $hS = T$ ,

*Điều kiện đủ.* Ta nhắc lại biểu diễn của  $P$  và  $Q$ :

$$P(L) = aL^n + bL^{n-m} + c, \quad Q(f) = uf^n + vf^{n-m} + t.$$

Do  $f = hL$ ,  $h^n = \frac{at}{cu}$ ,  $h^m = \frac{av}{ub}$  nên ta có  $E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0)$  và

$$\begin{aligned} Q(f) &= uh^n L^n + vh^{n-m} L^{n-m} + t \\ &= \frac{at}{c} L^n + \frac{tb}{c} L^{n-m} + t. \end{aligned}$$

Suy ra  $tP(L) = cQ(f)$ , tức là

$$at(L - a_1) \dots (L - a_n) = cu(f - b_1) \dots (f - b_n). \quad (1.26)$$

điều này kéo theo  $L^{-1}(S) = f^{-1}(T)$  và điều kiện đủ được chứng minh.

Ta chứng minh (2).

*Điều kiện cần.* Từ chứng minh của Phần (1) ta nhận được  $f = hL$ , ở đó  $h$  là hằng số khác không thỏa mãn  $h^n = \frac{at}{cu}$ ,  $h^m = \frac{av}{ub}$ . Do  $f$  là  $L$ -hàm nên từ Mệnh đề 1.1.1 ta suy ra  $f = L$ . Do đó  $h = 1$  và

$$\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{t},$$

*Điều kiện đủ.* Chứng minh hoàn toàn tương tự như Phần (1).

Như vậy, Định lý 1.3.1 được chứng minh.  $\square$

Trường hợp đặc biệt của Định lý 1.3.1 khi ta chọn  $P(z) = Q(z)$ , ta sẽ có kết quả sau đây:

**Hệ quả 1.3.2.** *Giả sử  $m, n$  là các số nguyên không âm sao cho  $(n, m) = 1$  và  $n \geq 2m + 7$ ; Giả sử đa thức  $P(z)$  có dạng (1.8) thỏa mãn (1.9). Ký hiệu  $S$  là tập các không điểm của  $P$ . Khi đó đối với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm  $f$  và  $L$ -hàm  $L$ , điều kiện  $L^{-1}(S) = f^{-1}(S)$  và  $E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0)$  xảy ra khi và chỉ khi  $f = L$ .*

*Chứng minh.* Thực vậy, áp dụng Định lý 1.3.1 với  $Q(z) = P(z)$ ,  $T = S$ , ta nhận được  $f = hL$  và  $hS = S$ , ở đó  $h$  là hằng số khác không thỏa mãn  $h^n = 1$  và  $h^m = 1$ . Từ  $(n, m) = 1$  ta thu được  $h = 1$ . Vậy  $f = L$ .  $\square$

Cho  $f$  là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm và cho  $L$  là  $L$ -hàm khác hằng,  $S, T$  là tập các không điểm của đa thức  $P(z)$  và  $Q(z)$ , tương ứng.

**Ví dụ 1.3.1.** Cho

$$P(z) = z^{11} - \frac{11}{9}z^9 + 1, \quad S = \{a_1, \dots, a_{11}\},$$

$$Q(z) = z^{11} - \frac{11}{9}2^2z^9 + 2^{11}, \quad T = \{b_1, \dots, b_{11}\}.$$

$$\text{Ta thấy } a = u = 1, b = -\frac{11}{9}, c = 1, v = -\frac{11}{9}2^2, t = 2^{11},$$

$$\frac{9^{11}}{11^{11}} \neq \frac{9^9 2^2}{11^{11}}, \quad 11 = 2 \cdot 2 + 7.$$

Do đó các đa thức  $P(z)$  và  $Q(z)$  thỏa mãn các điều kiện (1.9), (1.10). Đối với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm  $f$  và  $L$ -hàm khác hằng  $L$  thỏa mãn  $L^{-1}(S) = f^{-1}(T)$  và  $E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0)$ , chúng ta áp dụng Định lý 1.3.1 với  $n = 11$ ,  $m = 2$ ,  $a = u = 1$ ,  $b = -\frac{11}{9}$ ,  $c = 1$ ,  $v = -\frac{11}{9}2^2$ ,  $t = 2^{11}$ , ta thu được

$$f = hL, \quad hS = T, \quad \text{trong đó } h^{11} = \frac{at}{cu} = 2^{11}, \quad h^2 = \frac{av}{ub} = 2^2.$$

Dễ thấy  $h = 2$  thỏa mãn điều kiện.

Ngược lại, nếu  $S = \{a_1, \dots, a_{11}\}$  là tập nghiệm của  $P(z)$  nên

$$(z - a_1) \dots (z - a_{11}) = z^{11} - \frac{11}{9}z^9 + 1.$$

Khi đó, ta kiểm tra được

$$(z - 2a_1) \dots (z - 2a_{11}) = z^{11} - \frac{11}{9}2^2z^9 + 2^{11} = Q(z).$$

Suy ra tập nghiệm của đa thức  $Q(z)$  là  $T = \{2a_1, \dots, 2a_{11}\} = 2S$ . Nếu đặt  $h = 2$  thì các đa thức  $P(z)$  và  $Q(z)$  thỏa mãn điều kiện

$$\frac{at}{cu} = 2^{11}, \quad h^2 = \frac{av}{ub} = 2^2.$$

Do đó, nếu hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm  $f$  và  $L$ -hàm khác hằng  $L$  thỏa mãn  $f = 2L$  thì  $L^{-1}(S) = f^{-1}(T)$  và  $E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0)$ .

**Ví dụ 1.3.2.** Cho

$$P(z) = z^9 - \frac{9}{8}z^8 + 1.$$

Khi đó, ta kiểm tra được đa thức  $P(z)$  thỏa mãn điều kiện (1.9). Áp dụng Hệ quả 1.3.2 với  $n = 9$ ,  $m = 1$  và chú ý rằng  $(9, 1) = 1$ , ta suy ra đối với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm  $f$  và  $L$ -hàm khác hằng  $L$ , điều kiện

$$L^{-1}(S) = f^{-1}(S), \quad E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0),$$

xảy ra khi và chỉ khi  $f = L$ .

**Chú ý 1.3.3.** i) Định lý 1.3.1 là cải tiến của Định lý 1.1 của Khoai H. H., An V. H. và Ninh L. Q. trong [29].

ii) Trong [50] (Định lý 7) các tác giả đã chứng tỏ sự tồn tại của các tập con  $S_P \subset \mathbb{C}$  của 14 phần tử sao cho đối với hàm phân hình khác hằng  $f$  với hữu hạn cực điểm và  $L$ -hàm  $L$ , điều kiện  $L^{-1}(S_P) = f^{-1}(S_P)$  và  $L^{-1}(c) = f^{-1}(c)$  và  $c \notin S_P$ , kéo theo  $f = L$ . Hệ quả 1.3.2 chỉ cần tập  $S$  gồm có 9 phần tử (chẳng hạn tập các không điểm của đa thức  $P(z)$  trong Ví dụ 1.3.2).

# Kết luận Chương 1

Trong Chương 1, vấn đề duy nhất đối với  $L$ -hàm đã được nghiên cứu. Chú ý rằng, một  $L$  hàm luôn được thác triển giải tích tới một hàm phân hình trên mặt phẳng phức tức là tới một đường cong chỉnh hình từ  $\mathbb{C}$  tới  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Do đó, vấn đề duy nhất đối với  $L$ -hàm liên quan mật thiết đến vấn đề duy nhất đối với đường cong chỉnh hình từ  $\mathbb{C}$  tới  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ . Như là sự phát triển tự nhiên từ chiều 1 lên chiều cao, vấn đề này tiếp tục được nghiên cứu trong các chương tiếp theo.

Trong chương này chúng tôi đã chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất cho  $L$ -hàm và hàm phân hình liên quan đến giá trị khuyết và điều kiện đạo hàm chia sẻ giá trị. Các kết quả trong chương này được công bố trên bài báo số [AC1] và [AC2] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Trong chương này chúng tôi đã thực hiện một số nội dung như sau:

1. Tổng hợp một số kiến thức về  $L$ -hàm, các hàm Nevanlinna cho hàm phân hình và một số tính chất của các hàm này.
2. Phát biểu và chứng minh điều kiện đại số (Định lý 1.2.1) liên quan đến giá trị khuyết tại  $\infty$  để  $L$ -hàm và hàm phân hình là trùng nhau. Từ đó chỉ ra sự tồn tại của tập xác định duy nhất gồm 8 phần tử và tập xác định duy nhất liên quan đến số khuyết gồm 7 phần tử cho  $L$ -hàm và hàm phân hình.
3. Phát biểu và chứng minh định lý duy nhất (Định lý 1.3.1) liên quan đến đạo hàm đối với  $L$ -hàm và hàm phân hình và xây dựng một số ví dụ minh họa cho định lý này.

## Chương 2

# Siêu mặt xác định duy nhất đối với ánh xạ chỉnh hình

Trong chương này chúng tôi sẽ giới thiệu một số kiến thức cơ bản về phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính, không suy biến tuyến tính mức 1 và chứng minh điều kiện đại số để hai và một siêu mặt xác định duy nhất đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1. Các kết quả chính trong chương này viết dựa trên bài báo [PAC1] trong Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án.

### 2.1. Kiến thức cơ bản về phân bố giá trị cho đường cong

Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu một số kiến thức cơ sở về phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình, chứng minh một số mệnh đề cần thiết cho việc chứng minh kết quả chính.

#### Các hàm Nevanlinna-Cartan và hai định lý cơ bản

Cho  $f = (f_1 : \dots : f_{N+1})$  là ánh xạ chỉnh hình từ  $\mathbb{C}$  tới  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  (hay còn gọi là đường cong chỉnh hình), ở đó  $f_1, \dots, f_{N+1}$  là các hàm nguyên trên  $\mathbb{C}$ . Nếu  $f_1, \dots, f_{N+1}$  không có không điểm chung trên  $\mathbb{C}$  thì ta gọi  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  là biểu diễn rút gọn của  $f$ .

Cho ánh xạ  $f = (f_1 : \dots : f_{N+1}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ , ở đó  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  là

biểu diễn rút gọn của  $f$ . Ánh xạ  $f$  được gọi là *không suy biến tuyến tính* nếu ảnh của  $f$  không nằm trong siêu phẳng nào của  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ , tức là các hàm  $f_1, \dots, f_{N+1}$  độc lập tuyến tính trên  $\mathbb{C}$ . Ánh xạ  $f$  được gọi là *không suy biến tuyến tính mức 1* nếu  $f_i/f_j$  là các hàm phân hình khác hằng với mọi cặp  $i, j : 1 \leq i < j \leq N + 1$ .

Ta dễ dàng kiểm tra được, nếu  $f$  là không suy biến tuyến tính, thì  $f$  cũng là không suy biến tuyến tính mức 1. Ví dụ sau đây cho thấy chiều ngược lại chưa chắc đúng.

**Ví dụ 2.1.1.** Xét ánh xạ chỉnh hình

$$f = (f_1 : f_2 : f_3) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),$$

trong đó  $f_1 = z - 1$ ,  $f_2 = z + 1$ ,  $f_3 = z$  là biểu diễn rút gọn của  $f$ . Xét siêu phẳng  $H$  trong  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  được xác định bởi phương trình

$$P(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 - 2z_3 = 0.$$

Rõ ràng rằng  $P(f_1, f_2, f_3) \equiv 0$ , do đó  $f$  là suy biến tuyến tính. Tuy nhiên,  $f_i/f_j$  là các hàm phân hình khác hằng với mọi  $1 \leq i < j \leq 3$ . Do đó  $f$  không suy biến tuyến tính mức 1.

Giả sử  $f$  là hàm phân hình, giả sử  $f = f_1/f_2$ , trong đó  $f_1, f_2$  là các hàm nguyên không có không điểm chung. Ánh xạ

$$\bar{f} = (f_1 : f_2) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

được gọi là *ánh xạ liên kết* với  $f$ . Dễ thấy  $\bar{f}$  không suy biến tuyến tính khi và chỉ khi nó là không suy biến tuyến tính mức 1.

Bây giờ ta gọi  $\mathcal{M}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$  là tập các ánh xạ chỉnh hình,  $\mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$  là tập các ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1,  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$  là tập các ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính từ  $\mathbb{C}$  tới  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ .

Khi đó ta có

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})) \subset \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})).$$

Cho  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$  với biểu diễn rút gọn  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  và  $v$  là số tự nhiên không âm, ta định nghĩa

$$f^v = (f_1^v : \dots : f_{N+1}^v) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}),$$

thì  $f^v$  sẽ xác định ánh xạ chỉnh hình từ  $\mathbb{C}$  vào  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ . Dễ dàng thấy rằng  $f \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$  nếu và chỉ nếu  $f^v \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ .

Cho  $f$  là ánh xạ chỉnh hình, hàm đặc trưng (hay còn gọi là hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan) của  $f$  được xác định bởi

$$T_f(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(\rho e^{i\theta})\| d\theta,$$

trong đó  $\|f(z)\| = \max\{|f_1(z)|, \dots, |f_{N+1}(z)|\}$ . Lưu ý rằng hàm đặc trưng  $T_f(\rho)$  là độc lập với cách chọn các biểu rút gọn của  $f$ , sai khác hằng số.

Gọi  $D$  là siêu mặt bậc  $d$  trong  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  sao cho ảnh của  $f$  không nằm trong  $D$ . Kí hiệu  $Q$  là đa thức thuần nhất bậc  $d$  xác định  $D$ . Hàm xấp xỉ của  $f$  được xác định bởi

$$m_f(\rho, D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(\rho e^{i\theta})\|^d}{|Q \circ f(\rho e^{i\theta})|} d\theta,$$

với  $Q \circ f = Q(f_1, \dots, f_{N+1})$ . Hàm xấp xỉ  $m_f(\rho, D)$  độc lập, sai khác hằng số với cách chọn biểu diễn rút gọn của  $f$  và cách chọn đa thức  $Q$ . Gọi  $n_f(\rho, D)$  là số các không điểm tính cả bội của  $Q \circ f$  trong đĩa  $|z| \leq \rho$ . Hàm đếm  $N_f(\rho, D)$  được xác định bởi

$$N_f(\rho, D) = \int_0^\rho \frac{n_f(t, D) - n_f(0, D)}{t} dt + n_f(0, D) \log \rho.$$

Với mỗi số tự nhiên không âm  $M$ , ta ký hiệu  $n_f^M(\rho, D)$  là số các không điểm của  $Q \circ f$  trong đĩa  $|z| \leq \rho$ , ở đó mỗi không điểm được đếm bằng bội của nó nếu bội nhỏ hơn  $M$  và đếm  $M$  lần trong trường hợp khác. Hàm đếm bội cắt cụt mức  $M$  được xác định bởi

$$N_f^M(\rho, D) = \int_0^\rho \frac{n_f^M(t, D) - n_f^M(0, D)}{t} dt + n_f^M(0, D) \log \rho.$$

Mệnh đề sau là định lý cơ bản thứ nhất đối với siêu mặt.

**Mệnh đề 2.1.1** (xem [4], trang 776; [49], trang 216). *Giả sử  $f$  là ánh xạ chỉnh hình từ  $\mathbb{C}$  vào  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ,  $D$  là siêu mặt sao cho ảnh của  $f$  không nằm trong  $D$ . Khi đó, với mọi  $\rho > 0$ ,*

$$m_f(\rho, D) + N_f(\rho, D) = dT_f(\rho) + O(1),$$

ở đó  $O(1)$  là hằng số không phụ thuộc vào  $\rho$ .

Ta nhắc lại, tập các siêu mặt  $\{D_1, \dots, D_q\}$  trong  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  được gọi là ở vị trí tổng quát nếu  $q > N$  và với mọi bộ  $N+1$  chỉ số phân biệt  $i_1, \dots, i_{N+1} \in \{1, \dots, q\}$ , ta có

$$\bigcap_{k=1}^{N+1} \text{supp}(D_{i_k}) = \emptyset. \quad (2.1)$$

Với mỗi  $i = 1, \dots, q$ , gọi  $Q_i$  là đa thức thuần nhất xác định siêu mặt  $D_i$ , khi đó điều kiện (2.1) tương đương với

$$\{z \in \mathbb{C}^{N+1} : Q_{i_1}(z) = \dots = Q_{i_{N+1}}(z) = 0\} = \emptyset.$$

Mệnh đề sau đây là định lý cơ bản thứ hai đối với siêu phẳng.

**Mệnh đề 2.1.2** ([15], Mệnh đề 6.2, trang 254). *Giả sử  $f$  là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính từ  $\mathbb{C}$  vào  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  và  $H_1, \dots, H_q$  là các*

siêu phẳng trong  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát. Khi đó

$$(q - N - 1)T_f(\rho) \leq \sum_{i=1}^q N_f^N(H_i, \rho) + S(\rho, f),$$

ở đó  $S(\rho, f) = o(T(\rho, f))$  với mọi  $\rho > 0$ , ngoại trừ tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

### Các kết quả bổ trợ

**Mệnh đề 2.1.3** ([36], Bổ đề 1.4, trang 342). Giả sử  $f_1, \dots, f_{N+1}$  là các hàm nguyên khác không trên  $\mathbb{C}$ , thỏa mãn

$$f_1^d + f_2^d + \dots + f_{N+1}^d = 0 \quad \text{với } d \geq N^2.$$

Khi đó tồn tại phân hoạch các chỉ số  $\{1, \dots, N+1\} = \bigcup I_v$ , sao cho

- (i) Mỗi  $I_v$  chứa ít nhất 2 chỉ số,
- (ii)  $f_i = c_{ij}f_j$ , với  $c_{ij}$  là hằng số khác không đối với  $j, i \in I_v$  với mọi  $v$ ,
- (iii)  $\sum_{j \in I_v} f_j^d = 0$  với mọi  $v$ .

**Mệnh đề 2.1.4** ([26], Bổ đề 2.5, trang 541). Giả sử  $n, n_1, n_2, \dots, n_q$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_q, c \in \mathbb{C}$ ,  $c \neq 0$  và  $q > 2 + \sum_{i=1}^q \frac{n_i}{n}$ . Khi đó phương trình hàm

$$(f - a_1)^{n_1}(f - a_2)^{n_2} \dots (f - a_q)^{n_q} = cg^n,$$

không có nghiệm phân hình khác hằng  $(f, g)$ .

**Mệnh đề 2.1.5.** Giả sử  $n, p, v$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $(n, p) = 1$ ,  $n + p \geq 4$  và  $f_1, f_2, g_1, g_2$  là các hàm nguyên không đồng thời bằng không sao cho  $f = \frac{f_1}{f_2}$  và  $g = \frac{g_1}{g_2}$  là các hàm phân hình khác hằng. Khi đó, phương trình

$$f^{vn}(f - a_1)(f - a_2) \dots (f - a_{vp}) = cg^{v(n+p)}, \quad (a_i, c \neq 0, a_i \neq a_j),$$

không có nghiệm phân hình khác hằng  $(f, g)$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $(f, g)$  là nghiệm phân hình khác hằng của phương trình

$$f^{vn}(f - a_1)(f - a_2) \dots (f - a_{vp}) = cg^{v(n+p)}.$$

Ta thấy rằng, nếu  $z_0 \in \mathbb{C}$  là không điểm của  $f$ , thì  $z_0$  cũng là không điểm của  $g$  và

$$n\nu_f^0(z_0) = (n+p)\nu_g^0(z_0).$$

Vì  $(n, p) = 1$ , nên bội của mỗi không điểm của  $f$  phải là bội của  $n+p$ . Do đó,

$$\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{n+p}T(\rho, f) + O(1).$$

Tương tự,

$$\overline{N}(\rho, f) \leq \frac{1}{n+p}T(\rho, f) + O(1).$$

Hơn nữa, nếu  $z_0$  là không điểm của  $f - a_i$  với  $1 \leq i \leq vp$ , thì  $z_0$  cũng là không điểm của  $g$  và

$$\nu_f^{a_i}(z_0) = v(n+p)\nu_g^0(z_0) \geq v(n+p).$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f - a_i}\right) &\leq \frac{1}{v(n+p)}N\left(\rho, \frac{1}{f - a_i}\right) \\ &\leq \frac{1}{v(n+p)}T(\rho, f) + O(1). \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 1.1.5 cho  $f$  với các giá trị  $0, a_1, \dots, a_{vp}$  và sử dụng các bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned} vpT(\rho, f) &\leq \overline{N}(\rho, f) + \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f}\right) + \sum_{i=1}^{vp} \overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f - a_i}\right) + S(\rho, f) \\ &\leq \frac{2}{n+p}T(\rho, f) + \sum_{i=1}^{vp} \frac{1}{v(n+p)}T(\rho, f) + S(\rho, f) \\ &= \left(\frac{2}{n+p} + \frac{p}{n+p}\right)T(\rho, f) + S(\rho, f) \end{aligned}$$

$$= \frac{p+2}{n+p} T(\rho, f) + S(\rho, f).$$

Ta thu được

$$\left( vp - \frac{p+2}{n+p} \right) T(\rho, f) \leq S(\rho, f)$$

và kéo theo  $vp < \frac{p+2}{n+p}$ .

Mặt khác, vì  $n+p \geq 4$ ,  $v \geq 1$ ,  $vp \geq p$  và

$$p > \frac{p+2}{4} \geq \frac{p+2}{n+p},$$

nên  $vp > \frac{p+2}{n+p}$  mâu thuẫn. Như vậy Mệnh đề 2.1.5 được chứng minh.  $\square$

Cho  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  là ánh xạ chỉnh hình và  $D$  là siêu mặt xác định bởi đa thức thuần nhất  $Q$  trong  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ . Ta nói  $f$  rẽ nhánh ít nhất  $v$  trên  $D$  nếu các không điểm của  $Q(f)$  có bậc ít nhất  $v$ . Nếu  $Q(f)$  không có không điểm thì ta nói  $f$  rẽ nhánh bậc  $\infty$  trên  $D$ . Trong [52], Siu Y.-T. và Yeung S.-K. đã chứng minh kết quả sau trong trường hợp  $v_i = 1, i = 1, \dots, N+1$ , ở đây chúng tôi chứng minh đối với trường hợp tổng quát hơn.

**Mệnh đề 2.1.6.** Cho  $z_i^{d-q_i} D_i(z_1, z_2, \dots, z_{N+1})$ ,  $1 \leq i \leq N+1$ , là các đa thức thuần nhất bậc  $d$  xác định các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ . Giả sử tồn tại ánh xạ chỉnh hình  $f$  từ  $\mathbb{C}$  vào  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  với biểu diễn rút gọn  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  sao cho ảnh của  $f$  nằm trong siêu mặt xác định bởi

$$\sum_{i=1}^{N+1} z_i^{d-q_i} D_i(z_1, z_2, \dots, z_{N+1}) = 0,$$

thỏa mãn

$$f_i^{d-q_i} D_i(f_1, \dots, f_{N+1}) \not\equiv 0, \quad i = 1, \dots, N+1.$$

Ký hiệu  $H_i$  là siêu phẳng xác định bởi  $z_i = 0$ , với mỗi  $i = 1, \dots, N+1$ .

Gọi  $v_1, \dots, v_k$  là các số nguyên dương và  $v_{k+1}, \dots, v_{N+1}$  là  $\infty$  sao cho  $f$

rẽ nhánh ít nhất bậc  $v_i$  trên  $H_i$ , với  $i = 1, 2, \dots, N + 1$ . Giả sử

$$d \geq 1 + (N - 1) \sum_{i=1}^k \frac{1}{v_i} + \sum_{i=1}^{N+1} q_i,$$

khi  $N > 1$ . Khi đó, các đa thức

$$z_1^{d-q_1} D_1(z_1, z_2, \dots, z_{N+1}), \dots, z_N^{d-q_N} D_N(z_1, z_2, \dots, z_{N+1})$$

là phụ thuộc tuyến tính trên ảnh của  $f$ .

*Chứng minh.* Giả sử phản chứng rằng các biểu thức

$$f_1^{d-q_1} D_1(f_1, \dots, f_{N+1}), \dots, f_N^{d-q_N} D_N(f_1, \dots, f_{N+1})$$

là độc lập tuyến tính trên  $\mathbb{C}$ .

Vì các đa thức  $z_i^{d-q_i} D_i(z_1, z_2, \dots, z_{N+1})$ , với  $i = 1, 2, \dots, N + 1$ , xác định các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong không gian xạ ảnh  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  và

$$\sum_{i=1}^{N+1} f_i^{d-q_i} D_i(f_1, f_2, \dots, f_{N+1}) = 0,$$

ta suy ra

$$F = \left( f_1^{d-q_1} D_1(f_1, \dots, f_{N+1}) : \dots : f_N^{d-q_N} D_N(f_1, \dots, f_{N+1}) \right)$$

là biểu diễn rút gọn của ánh xạ chỉnh hình khác hằng  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C})$ .

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng

$$dT_f(\rho) = T_F(\rho) + O(1).$$

Đặt

$$R_i(z_1, \dots, z_{N+1}) = z_i^{d-q_i} D_i(z_1, \dots, z_{N+1}), \quad i = 1, \dots, N + 1.$$

Từ giả thiết về vị trí tổng quát và hệ quả từ Định lý Nullstellensatz của Hilbert trong [57] suy ra rằng, với mỗi số tự nhiên dương  $k$ ,  $1 \leq k \leq N + 1$ , tồn tại số tự nhiên dương  $m_k \geq d$  sao cho

$$z_k^{m_k} = \sum_{i=1}^{N+1} a_{ik}(z_1, \dots, z_{N+1}) R_i(z_1, \dots, z_{N+1}),$$

ở đó  $a_{ik}$  là các đa thức thuần nhất bậc  $m_k - d$ , hệ số thuộc  $\mathbb{C}$ . Do đó,

$$f_k^{m_k} = \sum_{i=1}^{N+1} a_{ik}(f_1, \dots, f_{N+1}) R_i(f_1, \dots, f_{N+1}), \quad k = 1, \dots, N+1.$$

Kéo theo

$$|f_k(z)|^{m_k} \leq b \|f(z)\|^{m_k-d} \max \{ |f_1(z)^{d-q_1} D_1(f_1(z), \dots, f_{N+1}(z))|, \dots, \\ |f_{N+1}(z)^{d-q_{N+1}} D_{N+1}(f_1(z), \dots, f_{N+1}(z))| \},$$

trong đó  $b > 0$  là hằng số phụ thuộc vào các hệ số của  $a_{ik}$  và  $D_i$ . Vì vậy, nếu  $f_k \neq 0$  thì

$$T_{f_k^{m_k}}(\rho) = m_k T_{f_k}(\rho) + O(1) \\ \leq (m_k - d) T_f(\rho) + \max_{1 \leq i \leq N+1} T_{R_i(f_1, \dots, f_{N+1})}(\rho) + O(1).$$

Vì  $f = (f_1 : \dots : f_{N+1})$  là biểu diễn rút gọn của ánh xạ chỉnh hình  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ , nên tồn tại  $k$  sao cho  $f_k \neq 0$ . Do đó,

$$dT_f(\rho) \leq \max_{1 \leq i \leq N+1} T_{R_i(f_1, \dots, f_{N+1})}(\rho) + O(1). \quad (2.2)$$

Mặt khác,

$$T_{R_i(f_1, \dots, f_{N+1})}(\rho) = T_{f_i^{d-q_i} D_i(f_1, \dots, f_{N+1})}(\rho) \leq d T_f(\rho) + O(1), \quad (2.3)$$

với mọi  $i = 1, \dots, N+1$ . Từ (2.2) và (2.3) suy ra

$$dT_f(\rho) = \max_{1 \leq i \leq N+1} T_{R_i(f_1, \dots, f_{N+1})}(\rho) + O(1) = T_F(\rho) + O(1).$$

Bây giờ, ta xét các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong  $\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C})$  :

$$L_1 : z_1 = 0, \dots, L_N : z_N = 0, \quad L_{N+1} : z_1 + z_2 + \dots + z_N = 0.$$

*Trường hợp 1:*  $v_i \neq \infty, i = 1, \dots, N+1$ .

Áp dụng các Định lý 1.1.5, Mệnh đề 2.1.1, 2.1.2 và chú ý rằng

$$N_F^{N-1}(L_{N+1}, \rho) = N^{N-1} \left( \rho, \frac{1}{f_{N+1}^{d-q_{N+1}} D_{N+1}(f_1, \dots, f_{N+1})} \right),$$

kết hợp với giả thiết

$$d \geq 1 + (N-1) \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{v_i} + \sum_{i=1}^{N+1} q_i, \quad d - q_i > 1,$$

ta có

$$\begin{aligned} dT_f(\rho) &= T_F(\rho) + O(1) \leq \sum_{i=1}^{N+1} N_F^{N-1}(L_i, \rho) + S(\rho, f) \\ &\leq \sum_{i=1}^N N^{N-1} \left( \rho, \frac{1}{f_i^{d-q_i}} \right) + \sum_{i=1}^N N \left( \rho, \frac{1}{D_i(f_1, f_2, \dots, f_{N+1})} \right) \\ &\quad + N^{N-1} \left( \rho, \frac{1}{f_N^{d-q_{N+1}} D_{N+1}(f_1, f_2, \dots, f_{N+1})} \right) + S(\rho, f) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N+1} N^{N-1} \left( \rho, \frac{1}{f_i^{d-q_i}} \right) + \sum_{i=1}^{N+1} q_i T_f(\rho) + S(\rho, f) \\ &\leq (N-1) \sum_{i=1}^{N+1} N^1 \left( \rho, \frac{1}{f_i^{d-q_i}} \right) + \sum_{i=1}^{N+1} q_i T_f(\rho) + S(\rho, f), \\ &\leq (N-1) \sum_{i=1}^{N+1} \frac{N \left( \rho, \frac{1}{f_i} \right)}{v_i} + \sum_{i=1}^{N+1} q_i T_f(\rho) + S(\rho, f), \end{aligned}$$

suy ra

$$dT_f(\rho) \leq \left( (N-1) \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{v_i} + \sum_{i=1}^{N+1} q_i \right) T_f(\rho) + S(\rho, f)$$

và

$$\left( d - (N-1) \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{v_i} - \sum_{i=1}^{N+1} q_i \right) T_f(\rho) \leq S(\rho, f).$$

Vì  $d \geq 1 + (N-1) \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{v_i} + \sum_{i=1}^{N+1} q_i$ , từ đây có mâu thuẫn xảy ra.

*Trường hợp 2:*  $v_i \neq \infty$  với  $i = 1, \dots, k$ ,  $v_i = \infty$  với  $i = k+1, \dots, N+1$ .

Lập luận tương tự như Trường hợp 1 với chú ý

$$N^1(\rho, 1/f_i) = 0, \quad i = k+1, \dots, N+1$$

và áp dụng các Định lý 1.1.5, Mệnh đề 2.1.1 và 2.1.2, ta thu được

$$\left( d - (N - 1) \sum_{i=1}^k \frac{1}{v_i} - \sum_{i=1}^{N+1} q_i \right) T_f(\rho) \leq S(\rho, f).$$

Điều này mâu thuẫn với

$$d \geq 1 + (N - 1) \sum_{i=1}^k \frac{1}{v_i} + \sum_{i=1}^{N+1} q_i.$$

Vậy, mâu thuẫn xảy ra trong cả hai trường hợp, tức là điều giả sử là sai. Nói cách khác

$$z_1^{d-q_1} D_1(z_1, \dots, z_{N+1}), \dots, z_N^{d-q_N} D_N(z_1, \dots, z_{N+1})$$

là phụ thuộc trên ảnh của  $f$  và Mệnh đề 2.1.6 được chứng minh.  $\square$

## 2.2. Siêu mặt xác định duy nhất đối với đường cong chỉnh hình

Trong phần này chúng tôi sẽ chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất đối với đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1. Đầu tiên chúng tôi giới thiệu siêu mặt kiểu Fermat-Yi.

Cho  $d$  là số nguyên dương,  $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, N$  là các hằng số khác 0 thỏa mãn

$$d \geq (2N - 1)^2, \quad b_i^d d_i^d \neq b_l^d d_j^d \text{ với } i \neq j, i \neq l, \text{ khi } N \geq 2. \quad (2.4)$$

Với các số tự nhiên không âm  $p, n$ , ta đặt

$$\begin{aligned} P_i(z_i, z_{N+1}) &= z_i^{n+p} + a_i z_i^n z_{N+1}^p + b_i z_{N+1}^{n+p}, \\ Q_i(z_i, z_{N+1}) &= z_i^{n+p} + c_i z_i^n z_{N+1}^p + d_i z_{N+1}^{n+p}, \end{aligned}$$

với  $i = 1, 2, \dots, N$ . Đặt

$$P(z_1, \dots, z_{N+1}) = P_1^d(z_1, z_{N+1}) + \dots + P_N^d(z_N, z_{N+1}), \quad (2.5)$$

$$Q(z_1, \dots, z_{N+1}) = Q_1^d(z_1, z_{N+1}) + \dots + Q_N^d(z_N, z_{N+1}). \quad (2.6)$$

Bây giờ chúng ta chứng minh hai mệnh đề chìa khóa. Mệnh đề 2.2.1 đã được Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. chứng minh trong [26] cho trường hợp  $v = 1$ , dùng để chứng minh Mệnh đề 2.2.2.

**Mệnh đề 2.2.1.** *Cho  $n, p, v$  là các số tự nhiên không âm thỏa mãn  $(n, p) = 1$  hoặc  $vp \geq 4$  và  $c, d, e, u, s, t \in \mathbb{C}$  là các hằng số khác 0. Giả sử  $\frac{f_1}{f_2}$  và  $\frac{g_1}{g_2}$  là các hàm phân hình khác hằng thỏa mãn*

$$cf_1^{v(n+p)} + df_1^{vn}f_2^{vp} + ef_2^{v(n+p)} = ug_1^{v(n+p)} + sg_1^{vn}g_2^{vp} + tg_2^{v(n+p)}. \quad (2.7)$$

*Giả sử thêm rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:*

$$n \geq p + 1 + \frac{8}{v} \quad \text{và} \quad (2.8)$$

$$v \geq 2 \quad \text{nếu} \quad p = 1. \quad (2.9)$$

*Khi đó ta có*

$$f_1 = hg_1, \quad f_2 = lg_2,$$

*với  $h, l$  là các hằng số thỏa mãn*

$$h^{v(n+p)} = \frac{u}{c}, \quad h^{vn}l^{vp} = \frac{s}{d}, \quad l^{v(n+p)} = \frac{t}{e}.$$

*Chứng minh.* Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng  $f_1, f_2$  không có không điểm chung và  $g_1, g_2$  cũng không có không điểm chung. Từ (2.7) ta có

$$ef_2^{v(n+p)} + f_1^{vn}(cf_1^{vp} + df_2^{vp}) - tg_2^{v(n+p)} - g_1^{vn}(ug_1^{vp} + sg_2^{vp}) = 0. \quad (2.10)$$

**Khẳng định 1.** *Tồn tại các hằng số  $C_1, C_2, C_3$  sao cho  $(C_1, C_2, C_3) \neq (0, 0, 0)$  và*

$$C_1f_2^{v(n+p)} + C_2f_1^{vn}(cf_1^{vp} + df_2^{vp}) + C_3g_2^{v(n+p)} = 0.$$

*Chứng minh.* Đặt  $F = (f_2^v : f_1^v : g_2^v : g_1^v)$ , thì  $F$  là ánh xạ chỉnh hình từ  $\mathbb{C}$  vào  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ .

Ta sẽ kiểm tra giả thiết của Mệnh đề 2.1.6 với  $N = 3$ , ánh xạ chỉnh hình  $F$  và các đa thức thuần nhất bậc  $n + p$ :

$$\begin{aligned} P_1(z_1, z_2, z_3, z_4) &= ez_1^{n+p}, & P_2(z_1, z_2, z_3, z_4) &= z_2^n(cz_2^p + dz_1^p), \\ P_3(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -tz_3^{n+p}, & P_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -z_4^n(uz_4^p + sz_3^p), \end{aligned}$$

với  $d = n + p$ ,  $q_1 = q_3 = 0$ ,  $q_2 = q_4 = p$ ,  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v$ . Dễ thấy rằng  $P_1, P_2, P_3, P_4$  xác định các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Rõ ràng với mỗi  $i = 1, 2, 3, 4$ , ta có  $P_i(f_2^v, f_1^v, g_2^v, g_1^v) \neq 0$ . Từ (2.10) ta có

$$\sum_{i=1}^4 P_i(f_2^v, f_1^v, g_2^v, g_1^v) = 0.$$

Ký hiệu  $H_i$  là các siêu phẳng xác định bởi  $z_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  trong  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Rõ ràng  $F$  rẽ nhánh ít nhất  $v$  lần trên mỗi  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Từ (2.8) nên

$$n + p \geq 2p + 1 + \frac{8}{v} = 1 + 2 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{v} + \sum_{i=1}^4 q_i.$$

Như vậy, mọi giả thiết của Mệnh đề 2.1.6 được thỏa mãn và ta suy ra kết luận của Khẳng định 1 từ mệnh đề này.

**Khẳng định 2.** Ta có  $ef_2^{v(n+p)} = tg_2^{v(n+p)}$ .

*Chứng minh.* Từ Khẳng định 1 ta có

$$C_1 f_2^{v(n+p)} + C_2 f_1^{vn}(cf_1^{vp} + df_2^{vp}) + C_3 g_2^{v(n+p)} = 0, \quad (2.11)$$

trong đó  $C_1, C_2, C_3$  là các hằng số sao cho  $(C_1, C_2, C_3) \neq (0, 0, 0)$ . Ta xét các trường hợp có thể sau:

*Trường hợp 1.*  $C_3 = 0$ . Khi đó từ (2.11) suy ra

$$C_1 f_2^{v(n+p)} + C_2 f_1^{vn}(cf_1^{vp} + df_2^{vp}) = 0. \quad (2.12)$$

Vì  $f_2$  là hàm chỉnh hình khác 0 nên  $C_2 \neq 0$ . Nếu  $C_1 = 0$  thì từ (2.12) suy ra  $\frac{f_1}{f_2}$  là hằng số, mâu thuẫn. Vậy  $C_1, C_2 \neq 0$  và từ đó suy ra  $\frac{f_1}{f_2}$  là hằng số. Mâu thuẫn, do đó  $C_3 \neq 0$ .

*Trường hợp 2.*  $C_2 = 0$ . Khi đó (2.11) trở thành

$$C_1 f_2^{v(n+p)} + C_3 g_2^{v(n+p)} = 0. \quad (2.13)$$

Vì  $f_2, g_2$  là các hàm chỉnh hình khác 0 nên  $C_1 \neq 0, C_3 \neq 0$ . Từ đó suy ra

$$g_2^{v(n+p)} = -\frac{C_1}{C_3} f_2^{v(n+p)},$$

do đó  $g_2^v = C f_2^v$ , với  $C^{n+p} = -\frac{C_1}{C_3}$ . Vì vậy từ (2.7), ta thu được

$$(e - C^{n+p}t) f_2^{v(n+p)} + f_1^{vn}(c f_1^{vp} + d f_2^{vp}) - g_1^{vn}(u g_1^{vp} + s C^p f_2^{vp}) = 0. \quad (2.14)$$

Bây giờ ta chứng minh  $e - C^{n+p}t = 0$ . Thật vậy, giả sử  $e - C^{n+p}t \neq 0$ , áp dụng lý luận như Khẳng định 1 đối với ánh xạ chỉnh hình  $F = (f_2^v : f_1^v : g_1^v)$  và các đa thức thuần nhất bậc  $n + p$

$$(e - C^{n+p}t) z_1^{n+p}, \quad z_2^n(c z_2^p + d z_1^p), \quad -z_3^n(u z_3^p + s C^p z_1^p),$$

kéo theo tồn tại  $C'_1, C'_2, (C'_1, C'_2) \neq (0, 0)$ , sao cho

$$C'_1(e - C^{n+p}t) f_2^{v(n+p)} + C'_2 f_1^{vn}(c f_1^{vp} + d f_2^{vp}) = 0.$$

Theo lý luận tương tự như trong Trường hợp 1, ta cũng suy ra mâu thuẫn.

Do đó  $e - C^{n+p}t = 0$ , tức là

$$e f_2^{v(n+p)} = t g_2^{v(n+p)}. \quad (2.15)$$

*Trường hợp 3.*  $C_1 = 0$ . Theo (2.11) ta có

$$C_2 f_1^{vn}(c f_1^{vp} + d f_2^{vp}) + C_3 g_2^{v(n+p)} = 0.$$

Suy ra

$$C_2 f_1^{vn}(c f_1^{vp} + d f_2^{vp}) = C'_3 g_2^{v(n+p)}. \quad (2.16)$$

Vì  $g_2$  là hàm nguyên không đồng nhất bằng 0 và  $\frac{f_1}{f_2}$  không phải là hằng số, nên từ (2.16) ta suy ra  $C_2 \neq 0$ ,  $C'_3 \neq 0$ . Từ đó và  $f_2$  là hàm nguyên khác 0, cùng với (2.16), ta có:

$$C_2 \left( \frac{f_1}{f_2} \right)^{vn} \left( c \left( \frac{f_1}{f_2} \right)^{vp} + d \right) = C'_3 \left( \frac{g_2}{f_2} \right)^{v(n+p)}. \quad (2.17)$$

Đặt  $f = \frac{f_1}{f_2}$ ,  $h = \frac{g_2}{f_2}$ . Vì  $\frac{f_1}{f_2}$  không phải là hằng số, nên từ (2.17) ta cũng có  $\frac{g_2}{f_2}$  không phải là hằng số.

Đặt thêm  $C_4 = \frac{d}{c} \neq 0$ ,  $C'_4 = \frac{C'_3}{C_2 c} \neq 0$ , thì từ (2.17) ta thu được

$$f^{vn}(f^{vp} + C_4) = C'_4 h^{v(n+p)}.$$

Điều này suy ra

$$f^{vn}(f - a_1)(f - a_2) \dots (f - a_{vp}) = C h^{v(n+p)}, \quad C \neq 0, \quad (2.18)$$

đối với các hằng số phân biệt  $a_1, \dots, a_{vp}$  sao cho  $a_j^{vp} = -C_4$  với mọi  $j = 1, \dots, vp$ .

Nếu  $(n, p) = 1$ , từ (2.8) ta có

$$n + p \geq 2p + 1 + \frac{8}{v}, \quad n + p \geq 4.$$

Áp dụng Mệnh đề 2.1.5 cho phương trình hàm (2.18), ta thu được phương trình (2.18) không có nghiệm phân hình khác hằng. Đây là dẫn đến mâu thuẫn.

Nếu  $vp \geq 4$ , thì áp dụng Mệnh đề 2.1.4 cho (2.18) với  $q = vp + 1$ ,  $n = v(n + p)$ ,  $n_1 = vn$ ,  $n_2 = n_3 = \dots = n_q = 1$ , ta cũng suy ra phương trình hàm (2.18) không có nghiệm phân hình khác hằng. Đây cũng là dẫn đến mâu thuẫn. Vậy  $C_1 \neq 0$ .

*Trường hợp 4.*  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 \neq 0$ ,  $C_3 \neq 0$ . Từ (2.11) và theo lý luận tương tự như trong chứng minh của Khẳng định 1 đối với ánh xạ chỉnh hình

$F = (f_2^v : f_1^v : g_2^v)$  và các đa thức thuần nhất bậc  $n + p$ :

$$C_1 z_1^{n+p}, \quad C_2 z_2^n (c z_2^p + d z_1^p), \quad C_3 z_3^{n+p},$$

ta suy ra tồn tại các hằng số  $A_1, A_2$ , với  $(A_1, A_2) \neq (0, 0)$ , sao cho

$$A_1 f_2^{v(n+p)} + A_2 f_1^{vn} (c f_1^{vp} + d f_2^{vp}) = 0.$$

Từ đó, bằng lập luận tương tự như trong Trường hợp 1, ta suy ra mâu thuẫn.

Vậy chỉ còn khả năng duy nhất là (2.15), tức là  $e f_2^{v(n+p)} = t g_2^{v(n+p)}$  và Khẳng định 2 được chứng minh.

Từ Khẳng định 2, ta có  $f_2 = l g_2$ , trong đó  $l^{v(n+p)} = \frac{t}{e}$ . Để hoàn thành chứng minh mệnh đề, ta cần chứng minh rằng  $f_1 = h g_1, f_2 = l g_2$ , với  $h, l$  là các hằng số thỏa mãn

$$h^{v(n+p)} = \frac{u}{c}, \quad h^{vn} l^{vp} = \frac{s}{d}, \quad l^{v(n+p)} = \frac{t}{e}.$$

Thật vậy, từ Khẳng định 2, ta có  $e f_2^{v(n+p)} = t g_2^{v(n+p)}$ , nên từ (2.7) ta có

$$\frac{c}{e} f^{v(n+p)} + \frac{d}{e} f^{vn} = \frac{u}{t} g^{v(n+p)} + \frac{s}{t} g^{vn}, \quad (2.19)$$

với  $f = \frac{f_1}{f_2}, g = \frac{g_1}{g_2}$ . Để thuận tiện ta kí hiệu  $H = \frac{f}{g}$  và  $\alpha = \frac{eu}{ct} \neq 0, \beta = \frac{se}{dt} \neq 0$ . Khi đó từ (2.19) ta có

$$\frac{c}{e} g^{vp} \left( H^{v(n+p)} - \frac{eu}{ct} \right) = -\frac{d}{e} \left( H^{vn} - \frac{se}{dt} \right),$$

tức là

$$g^{vp} (H^{v(n+p)} - \alpha) = -\frac{d}{c} (H^{vn} - \beta),$$

suy ra

$$g^{vp} = -\frac{d}{c} \frac{H^{vn} - \beta}{H^{v(n+p)} - \alpha}. \quad (2.20)$$

**Khẳng định 3.**  $H$  là hằng số.

*Chứng minh.* Giả sử ngược lại rằng  $H$  không phải là hằng số. Ta xét các trường hợp sau:

*Trường hợp 5.*  $(n, p) = 1$ .

*Trường hợp con 5.1.*  $H^{v(n+p)} - \alpha$  và  $H^{vn} - \beta$  không có không điểm chung.

Từ (2.19) và (2.20) ta có

$$T(\rho, g) = T(\rho, f) + O(1),$$

kéo theo  $S(\rho, f) = S(\rho, g)$  và

$$T(\rho, g) = \frac{n+p}{p}T(\rho, H) + S(\rho, g),$$

nên  $S(\rho, g) = S(\rho, H)$ . Đặt

$$S(\rho) = S(\rho, f) = S(\rho, g) = S(\rho, H).$$

Ta biết phương trình  $z^{vn} - \beta = 0$  có  $vn$  không điểm đơn  $\beta_1, \dots, \beta_{vn}$  và phương trình  $z^{v(n+p)} - \alpha = 0$  có  $v(n+p)$  không điểm đơn  $\alpha_1, \dots, \alpha_{v(n+p)}$ . Điều này suy ra

$$H^{vn} - \beta = (H - \beta_1) \dots (H - \beta_{vn})$$

và

$$H^{v(n+p)} - \alpha = (H - \alpha_1) \dots (H - \alpha_{v(n+p)}).$$

Từ đó và (2.20), ta có

$$g^{vp} = -\frac{d}{c} \frac{(H - \beta_1) \dots (H - \beta_{vn})}{(H - \alpha_1) \dots (H - \alpha_{v(n+p)})}.$$

Điều này cho thấy mỗi không điểm của  $H - \alpha_i$  và  $H - \beta_j$  đều có bội lớn hơn hoặc bằng  $vp$ . Áp dụng Mệnh đề 1.1.6 cho các giá trị  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{vn}$ ,

$\alpha_1, \dots, \alpha_{v(n+p)}$ , ta thu được

$$\sum_{i=1}^{v(2n+p)} \left(1 - \frac{1}{vp}\right) \leq 2,$$

tức là

$$(2n+p)(vp-1) \leq 2p. \quad (2.21)$$

Nếu  $p = 1$ , thì  $v \geq 2$  từ (2.8). Kết hợp với  $n \geq p + 1 + \frac{8}{v}$ , ta có

$$(2n+p)(vp-1) \geq 2n+1 > 2 = 2p,$$

mâu thuẫn với bất đẳng thức (2.21). Nếu  $p \geq 2$ , thì

$$(2n+p)(vp-1) \geq 2n+p > 2p,$$

cũng mâu thuẫn với (2.21).

*Trường hợp con 5.2.*  $H^{v(n+p)} - \alpha$  và  $H^{vn} - \beta$  có không điểm chung.

Giả sử  $z_0$  là không điểm chung của  $H^{v(n+p)} - \alpha$  và  $H^{vn} - \beta$ , tức là

$$H^{v(n+p)}(z_0) = \alpha, \quad H^{vn}(z_0) = \beta.$$

Từ (2.20), ta có

$$g^{vp} = -\frac{\beta d}{\alpha c} \frac{\left(\frac{H}{H(z_0)}\right)^{vn} - 1}{\left(\frac{H}{H(z_0)}\right)^{v(n+p)} - 1}. \quad (2.22)$$

Vì  $(n, p) = 1$ , nên các nghiệm của  $z^{vn} - 1 = 0$  khác với các nghiệm của  $z^{v(n+p)} - 1 = 0$ , ngoại trừ nghiệm  $z^v = 1$ . Phương trình  $z^{vn} - 1 = 0$  có  $v(n-1)$  nghiệm đơn  $\beta_1, \dots, \beta_{v(n-1)}$  và phương trình  $z^{v(n+p)} - 1 = 0$  có  $v(n+p-1)$  nghiệm đơn  $\alpha_1, \dots, \alpha_{v(n+p-1)}$  sao cho  $\beta_i \neq \alpha_j$ . Từ đó và (2.22), ta có

$$g^{vp} = -\frac{\beta d}{\alpha c} \frac{(H_1 - \beta_1) \dots (H_1 - \beta_{v(n-1)})}{(H_1 - \alpha_1) \dots (H_1 - \alpha_{v(n+p-1)})},$$

với  $H_1 = \frac{H}{H(z_0)}$ .

Áp dụng Mệnh đề 1.1.6 cho các giá trị  $\beta_1, \dots, \beta_{v(n-1)}, \alpha_1, \dots, \alpha_{v(n+p-1)}$ , ta có

$$\sum_{i=1}^{v(2n+p-2)} \left(1 - \frac{1}{vp}\right) \leq 2,$$

tức là

$$(2n + p - 2)(vp - 1) \leq 2p. \quad (2.23)$$

Nếu  $p = 1$ , từ (2.9) ta có  $v \geq 2$ . Với  $n \geq p + 1 + \frac{8}{v}$ , suy ra

$$(2n + p - 2)(vp - 1) \geq 2n - 1 > 2 = 2p,$$

mâu thuẫn với (2.23). Nếu  $p \geq 2$ , thì

$$(2n + p - 2)(vp - 1) \geq 2n + p - 2 > 2p,$$

cũng mâu thuẫn với (2.23).

*Trường hợp 6.  $vp \geq 4$ .*

Phương trình  $z^{vn} - \beta = 0$  có  $vn$  nghiệm đơn, phương trình  $z^{v(n+p)} - \alpha = 0$  có  $v(n+p)$  nghiệm đơn. Hai phương trình này có tối đa  $vn$  nghiệm chung. Do đó,  $z^{v(n+p)} - \alpha = 0$  có ít nhất  $vp$  nghiệm phân biệt không trùng với nghiệm của  $z^{vn} - \beta = 0$ . Gọi các nghiệm đó là  $r_1, r_2, \dots, r_{vp}$ .

Từ (2.20), các không điểm của  $H - r_j$  ( $j = 1, \dots, vp$ ) đều có bội  $\geq vp$ . Do đó kết hợp với Mệnh đề 1.1.6, ta có

$$vp \left(1 - \frac{1}{vp}\right) \leq 2,$$

suy ra  $vp \leq 3$ . Đây là mâu thuẫn với giả thiết  $vp \geq 4$ .

Kết hợp các kết luận của các trường hợp, suy ra  $H$  là hằng số và Khẳng định 3 được chứng minh.

Ta tiếp tục chứng minh mệnh đề. Từ Khẳng định 3, ta có  $f = Hg$  với  $H$  là hằng số, điều này dẫn tới  $f_1 = hg_1$  vì  $f_2 = lg_2$  theo Khẳng định 2. Từ (2.7) và vì  $\frac{f_1}{f_2}$  và  $\frac{g_1}{g_2}$  là các hàm khác hằng, ta suy ra rằng

$$f_1 = hg_1, \quad f_2 = lg_2,$$

với  $h, l$  là các hằng số thỏa mãn

$$h^{v(n+p)} = \frac{u}{c}, \quad h^{vn}l^{vp} = \frac{s}{d}, \quad l^{v(n+p)} = \frac{t}{e}.$$

Như vậy Mệnh đề 2.2.1 được chứng minh.  $\square$

Mệnh đề sau là tính chất của các đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1 kết hợp với hai siêu mặt kiểu Fermat-Yi.

**Mệnh đề 2.2.2.** *Giả sử  $n, p, v$  là các số tự nhiên không âm thỏa mãn  $(n, p) = 1$  hoặc  $vp \geq 4$ . Giả sử điều kiện (2.4) được thỏa mãn. Gọi  $P, Q$  là các đa thức lần lượt được xác định trong (2.5) và (2.6) và  $f, g \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$  thỏa mãn*

$$P(f_1^v, f_2^v, \dots, f_{N+1}^v) = Q(g_1^v, g_2^v, \dots, g_{N+1}^v), \quad (2.24)$$

trong đó  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  và  $(g_1 : \dots : g_{N+1})$  lần lượt là các biểu diễn rút gọn của  $f$  và  $g$ . Giả sử thêm các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$n \geq p + 1 + \frac{8}{v} \quad \text{và} \quad (2.25)$$

$$v \geq 2 \quad \text{nếu} \quad p = 1. \quad (2.26)$$

Khi đó, ta có

$$f_i = h_i g_i, \quad f_{N+1} = h_{N+1} g_{N+1},$$

với  $h_i, h_{N+1}$  là các hằng số thỏa mãn các điều kiện:

$$h_i^{v(n+p)} = \frac{1}{B_i}, \quad h_i^{vn} h_{N+1}^{vp} = \frac{c_i}{B_i a_i}, \quad h_{N+1}^{v(n+p)} = \frac{d_i}{B_i b_i}, \quad B_i^d = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

*Chứng minh.* Trước tiên, ta chứng minh rằng  $P_i^d(f_i^v, f_{N+1}^v) \not\equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Thật vậy, giả sử  $P_i^d(f_i^v, f_{N+1}^v) \equiv 0$  với mỗi  $i \in \{1, \dots, N\}$ , thì

$$f_i^{v(n+p)} + a_i f_i^{vn} f_{N+1}^{vp} + b_i f_{N+1}^{v(n+p)} = 0. \quad (2.27)$$

Nếu  $f_{N+1} \equiv 0$  thì  $f_i \equiv 0$ , mâu thuẫn với điều kiện  $f \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ . Nếu  $f_{N+1} \not\equiv 0$ , thì  $f_i \not\equiv 0$  và từ (2.27) suy ra rằng  $\frac{f_i}{f_{N+1}}$  là hằng số, mâu thuẫn với giả thiết ánh xạ  $f$  khác hằng và suy biến tuyến tính mức 1. Do đó

$$P_i^d(f_i^v, f_{N+1}^v) \not\equiv 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Tương tự, ta có  $Q_i^d(g_i^v, g_{N+1}^v) \not\equiv 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Từ (2.24) suy ra

$$\begin{aligned} & P_1^d(f_1^v, f_{N+1}^v) + P_2^d(f_2^v, f_{N+1}^v) + \dots + P_N^d(f_N^v, f_{N+1}^v) \\ & - Q_1^d(g_1^v, g_{N+1}^v) - Q_2^d(g_2^v, g_{N+1}^v) - \dots - Q_N^d(g_N^v, g_{N+1}^v) = 0. \end{aligned}$$

Áp dụng Mệnh đề 2.1.3 đối với các hàm chỉnh hình

$$P_1(f_1^v, f_{N+1}^v), \dots, P_N(f_N^v, f_{N+1}^v), \quad Q_1(f_1^v, f_{N+1}^v), \dots, Q_N(f_N^v, f_{N+1}^v),$$

với  $d \geq (2N - 1)^2$ , suy ra rằng đối với bất kỳ  $i = 1, \dots, N$ ,  $P_i(f_i^v, f_{N+1}^v)$  thỏa mãn một trong ba khả năng sau:

(i) Tồn tại  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  với  $j \neq i$  sao cho

$$a_{ij} P_i(f_i^v, f_{N+1}^v) = P_j(f_j^v, f_{N+1}^v), \quad a_{ij} \neq 0.$$

(ii) Tồn tại  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  sao cho

$$b_{ij} P_i(f_i^v, f_{N+1}^v) = Q_j(g_j^v, g_{N+1}^v), \quad b_{ij} \neq 0.$$

(iii) Tồn tại  $j, t \in \{1, 2, \dots, N\}$  với  $j \neq t$  sao cho

$$c_{ij} P_i(f_i^v, f_{N+1}^v) = Q_j(g_j^v, g_{N+1}^v), \quad c_{ij} \neq 0,$$

$$c_{jt}Q_j(g_j^v, g_{N+1}^v) = Q_t(g_t^v, g_{N+1}^v), \quad c_{jt} \neq 0.$$

Nếu  $P_i(f_i^v, f_{N+1}^v)$  thỏa mãn (i), ta có  $f_i = h_{ij}f_j$  với  $h_{ij}^{v(n+p)} = \frac{1}{a_{ij}}$  theo Mệnh đề 2.2.1, điều này mâu thuẫn với giả thiết ánh xạ  $f$  khác hằng và suy biến tuyến tính mức 1. Nếu  $P_i(f_i^v, f_{N+1}^v)$  thỏa mãn (iii), ta cũng dẫn đến mâu thuẫn bằng cách lập luận tương tự như (i). Vậy  $P_i(f_i^v, f_{N+1}^v)$  phải thỏa mãn (ii).

Do đó, đối với bất kỳ  $i = 1, \dots, N$ , tồn tại duy nhất  $j \in \{1, \dots, N\}$  sao cho

$$b_{ij}P_i(f_i^v, f_{N+1}^v) = Q_j(g_j^v, g_{N+1}^v), \quad b_{ij} \neq 0$$

và

$$P_i^d(f_i^v, f_{N+1}^v) + Q_j^d(g_j^v, g_{N+1}^v) = 0.$$

Suy ra

$$(1 - b_{ij}^d)P_i^d(f_i^v, f_{N+1}^v) = 0.$$

Vì  $P_i^d(f_i^v, f_{N+1}^v) \neq 0$ , nên

$$b_{ij}^d = 1. \tag{2.28}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh  $i = j$ . Giả sử ngược lại rằng  $i \neq j$ . Khi đó tồn tại  $l \neq i$  sao cho

$$d_{li}P_l(f_l^v, f_{N+1}^v) = Q_i(g_i^v, g_{N+1}^v), \quad d_{li}^d = 1. \tag{2.29}$$

Từ (2.28) và (2.29), áp dụng Mệnh đề 2.2.1 ta suy ra rằng

$$b_{ij}b_i f_{N+1}^{v(n+p)} = d_j g_{N+1}^{v(n+p)}$$

và

$$d_{li}b_l f_{N+1}^{v(n+p)} = d_i g_{N+1}^{v(n+p)}.$$

Suy ra

$$\frac{b_{ij}b_i}{d_{li}b_l} = \frac{d_j}{d_i},$$

nên

$$\frac{b_{ij}^d b_i^d}{d_{li}^d b_l^d} = \frac{d_j^d}{d_i^d}.$$

Vì  $b_{ij}^d = 1$  và  $d_{li}^d = 1$  nên suy ra

$$\frac{b_i^d}{b_l^d} = \frac{d_j^d}{d_i^d},$$

do đó  $b_i^d d_i^d = d_j^d b_l^d$ , mâu thuẫn với giả thiết  $b_i^d d_i^d \neq d_j^d b_l^d$  với  $i \neq j$  và  $i \neq l$ .

Như vậy  $i = j$ , tức là với mỗi  $i = 1, \dots, N$ , ta có

$$B_i P_i(f_i^v, f_{N+1}^v) = Q_i(g_i^v, g_{N+1}^v),$$

với  $B_i^d = 1$ . Áp dụng Mệnh đề 2.2.1 đối với  $\frac{f_i^v}{f_{N+1}^v}$  và  $\frac{g_i^v}{g_{N+1}^v}$  ta thu được

$$f_i = h_i g_i, \quad f_{N+1} = h_{N+1} g_{N+1},$$

trong đó  $h_i, h_{N+1}$  là các hằng số thỏa mãn

$$h_i^{v(n+p)} = \frac{1}{B_i}, \quad h_i^{vn} h_{N+1}^{vp} = \frac{c_i}{B_i a_i}, \quad h_{N+1}^{v(n+p)} = \frac{d_i}{B_i b_i}, \quad B_i^d = 1,$$

với  $i = 1, \dots, N$ . Vì vậy, Mệnh đề 2.2.2 được chứng minh.  $\square$

Bây giờ chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh các kết quả về vấn đề duy nhất đối với đường cong chỉnh hình phức không suy biến tuyến tính mức 1. Cho  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  là ánh xạ chỉnh hình và  $D$  là siêu mặt xác định bởi đa thức thuần nhất  $Q$  bậc  $d$ . Hàm bội  $\nu_{f,D} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{N}$  tại các không điểm giao của ảnh  $f$  với  $D$  được xác định bởi:

$$\nu_{f,D}(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } Q \circ f(z) \neq 0, \\ m & \text{nếu } Q \circ f(z) = 0 \text{ với bội } m. \end{cases}$$

Kí hiệu

$$E_f(D) = \{(z, \nu_{f,D}(z)) : z \in \mathbb{C}\}.$$

**Định lý 2.2.3.** Cho  $n, p, v$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $(n, p) = 1$  hoặc  $vp \geq 4$ . Giả sử điều kiện (2.4) được thỏa mãn. Gọi  $P, Q$  là các đa thức lần lượt được xác định trong (2.5) và (2.6) và  $X, Y$  là các siêu mặt lần lượt được xác định bởi  $P(z_1, \dots, z_{N+1}) = 0$  và  $Q(z_1, \dots, z_{N+1}) = 0$ . Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn

$$n \geq p + 1 + \frac{8}{v} \quad \text{và} \quad (2.30)$$

$$v \geq 2 \quad \text{nếu} \quad p = 1. \quad (2.31)$$

Khi đó nếu  $f, g \in \mathcal{M}_{L^1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$  thỏa mãn  $E_{f^v}(X) = E_{g^v}(Y)$  thì

$$f_i = h h_i g_i, \quad f_{N+1} = h h_{N+1} g_{N+1},$$

trong đó  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  và  $(g_1 : \dots : g_{N+1})$  lần lượt là các biểu diễn rút gọn của  $f$  và  $g$ ,  $h$  là hàm nguyên không có không điểm,  $h_i, i = 1, \dots, N$  và  $h_{N+1}$  là các hằng số thỏa mãn

$$h_i^{v(n+p)} = \frac{1}{B_i}, \quad h_i^{vn} h_{N+1}^{vp} = \frac{c_i}{B_i a_i}, \quad h_{N+1}^{v(n+p)} = \frac{d_i}{B_i b_i}, \quad B_i^d = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

*Chứng minh.* Do  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  và  $(g_1 : \dots : g_{N+1})$  là các biểu diễn rút gọn của  $f$  và  $g$ , tương ứng, nên  $(f_1^v : \dots : f_{N+1}^v)$  và  $(g_1^v : \dots : g_{N+1}^v)$  lần lượt là các biểu diễn rút gọn của  $f^v$  và  $g^v$ .

Vì  $E_{f^v}(X) = E_{g^v}(Y)$ , nên dễ dàng thấy rằng tồn tại hàm nguyên  $\alpha$  sao cho

$$P(f_1^v, f_2^v, \dots, f_{N+1}^v) = e^\alpha Q(g_1^v, g_2^v, \dots, g_{N+1}^v).$$

Đặt  $h = e^{\frac{\alpha}{v(n+p)d}}$ , khi đó  $h$  là hàm nguyên không có không điểm, do đó

$$((h g_1)^v, \dots, (h g_{N+1})^v)$$

là biểu diễn rút gọn của  $g^v$  và

$$P(f_1^v, f_2^v, \dots, f_{N+1}^v) = Q((h g_1)^v, \dots, (h g_{N+1})^v).$$

Áp dụng Mệnh đề 2.2.2, ta thu được

$$f_i = hh_i g_i, \quad f_{N+1} = hh_{N+1} g_{N+1},$$

với  $h_i, h_{N+1}$  là các hằng số thỏa mãn các điều kiện:

$$h_i^{v(n+p)} = \frac{1}{B_i}, \quad h_i^{vn} h_{N+1}^{vp} = \frac{c_i}{B_i a_i}, \quad h_{N+1}^{v(n+p)} = \frac{d_i}{B_i b_i}, \quad B_i^d = 1,$$

với  $i = 1, \dots, N$ . Do đó, Định lý 2.2.3 được chứng minh.  $\square$

**Chú ý 2.2.1.** i) Định lý 2.2.3 cho ta điều kiện cần để điều kiện

$$E_{f^v}(X) = E_{g^v}(Y)$$

được thỏa mãn.

ii) Dễ dàng nhận thấy rằng Định lý 2.2.3 suy ra Định lý 3.1 của Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. trong [26]. Thật vậy, ta biết rằng nếu  $f$  (tương ứng  $g$ ) là hàm phân hình trên  $\mathbb{C}$  thì ta có thể viết  $f = \frac{f_1}{f_2}$  (tương ứng  $g = \frac{g_1}{g_2}$ ), trong đó  $f_1, f_2$  (tương ứng  $g_1, g_2$ ) là các hàm chỉnh hình trên  $\mathbb{C}$  không có không điểm chung. Khi đó  $f, g$  trong Định lý 3.1 của Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. trong [26] là hai ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1 từ  $\mathbb{C}$  tới  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  với  $f = (f_1 : f_2)$  và  $g = (g_1 : g_2)$  là các biểu diễn rút gọn của  $f$  và  $g$ , tương ứng. Khi đó ta lấy  $N = 1, v = 1, (n, p) = 1$  hoặc  $p \geq 4$  trong Định lý 2.2.3, ta sẽ thu được kết luận của Định lý 3.1 của Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. trong [26].

Tiếp theo, chúng ta xem xét một số ứng dụng của Định lý 2.2.3. Năm 2000, Shirosaki M. (xem [51]) đã đưa ra lớp các siêu mặt có bậc tối thiểu  $13(2N - 1)^2$  xác định các ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính từ  $\mathbb{C}$  vào  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ . Cụ thể, tác giả đã đưa ra câu trả lời khẳng định cho câu hỏi: *Có thể tìm được siêu mặt  $X$  sao cho với mọi cặp ánh xạ chỉnh hình  $f, g$  từ  $\mathbb{C}$  tới  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  thỏa mãn  $E_f(X) = E_g(X)$  thì  $f$  và  $g$  trùng nhau không ?*

Kể từ đó, đã có nhiều kết quả đã đạt được liên quan đến chủ đề này và các vấn đề liên quan (xem [8], [28], [30], [55], [40], [41], [42] và các tài liệu khác). Dựa vào Định lý 2.2.3, chúng tôi đưa ra câu trả lời cho câu hỏi trên cho lớp ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1.

Giả sử  $d$  là số nguyên dương,  $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, N$  là các hằng số khác 0 thỏa mãn

$$d \geq (2N - 1)^2, \quad b_i^{2d} \neq b_j^d b_l^d \text{ với } i \neq j, i \neq l \text{ khi } N \geq 2. \quad (2.32)$$

Với các số tự nhiên không âm  $p, n$ , ta đặt

$$P_i(z_i, z_{N+1}) = z_i^{n+p} + a_i z_i^n z_{N+1}^p + b_i z_{N+1}^{n+p},$$

với  $i = 1, 2, \dots, N$ . Đặt

$$P(z_1, \dots, z_{N+1}) = P_1^d(z_1, z_{N+1}) + \dots + P_N^d(z_N, z_{N+1}).$$

Gọi  $X$  là siêu mặt xác định bởi

$$P(z_1, \dots, z_{N+1}) = 0. \quad (2.33)$$

**Định lý 2.2.4.** *Cho  $n, p, v$  là các số nguyên dương sao cho  $(n, p) = 1$ . Cho  $X$  là siêu mặt được xác định như trong (2.33) với điều kiện (2.32). Gọi  $f, g \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$  thỏa mãn  $E_{f^v}(X) = E_{g^v}(X)$ . Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

$$n \geq p + 1 + \frac{8}{v} \text{ và} \quad (2.34)$$

$$v \geq 2 \text{ nếu } p = 1. \quad (2.35)$$

Khi đó  $f^v = g^v$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $(f_1 : \dots : f_{N+1})$  và  $(g_1 : \dots : g_{N+1})$  lần lượt là các biểu diễn rút gọn của  $f$  và  $g$ . Lấy  $X = Y$  trong Định lý 2.2.3, ta thu được

$$f_i = h h_i g_i, \quad f_{N+1} = h h_{N+1} g_{N+1},$$

ở đó  $h$  là hàm chỉnh hình không có không điểm, còn  $h_i, h_{N+1}$  là các hằng số thỏa mãn các điều kiện:

$$h_i^{v(n+p)} = \frac{1}{B_i}, \quad h_i^{vn} h_{N+1}^{vp} = \frac{1}{B_i}, \quad h_{N+1}^{v(n+p)} = \frac{1}{B_i}, \quad B_i^d = 1,$$

với  $i = 1, \dots, N$ . Suy ra, với mỗi  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\left( \frac{h_i^v}{h_{N+1}^v} \right)^p = 1, \quad \left( \frac{h_i^v}{h_{N+1}^v} \right)^n = 1.$$

Vì  $(n, p) = 1$  nên suy ra  $h_i^v = h_{N+1}^v$  với mọi  $i = 1, \dots, N$ . Do đó,

$$\frac{f_i^v}{f_{N+1}^v} = \frac{g_i^v}{g_{N+1}^v}.$$

Suy ra

$$\frac{f_i^v}{g_i^v} = \frac{f_{N+1}^v}{g_{N+1}^v} \quad \text{với mọi } i = 1, \dots, N.$$

Vậy  $f^v = g^v$  và Định lý 2.2.4 được chứng minh.  $\square$

Định lý 2.2.4 cho ta điều kiện đại số cho lớp siêu mặt xác định duy nhất lũy thừa của ánh xạ chỉnh hình. Dễ thấy rằng Định lý 1.5 của Khoai H. H., An V. H. và Lai N. X. trong [27] là hệ quả của Định lý 2.2.4 khi ta lấy  $N = 1, n = 6, p = 1, v \geq 2$ .

Cho  $D$  là siêu mặt, nếu điều kiện  $E_f(D) = E_g(D)$  kéo theo  $f = g$  đối với bất kỳ hai ánh xạ chỉnh hình  $f, g$  sao cho ảnh của  $f, g$  không chứa trong  $D$ , thì  $D$  được gọi là *siêu mặt xác định duy nhất tính cả bội đối với các ánh xạ chỉnh hình*. Hệ quả sau đây cho thấy sự tồn tại siêu mặt xác định duy nhất của một số lớp ánh xạ chỉnh hình.

**Hệ quả 2.2.5.** *Kí hiệu*

$$\mathcal{M}_{L1}^v(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})) := \{f^v : f \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))\}.$$

*Khi đó, ta có:*

i) Tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất có bậc  $13(2N - 1)^2$  cho lớp các ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1 từ  $\mathbb{C}$  vào  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ .

ii) Tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất có bậc  $7(2N - 1)^2$  cho các ánh xạ chỉnh hình thuộc  $\mathcal{M}_{L1}^2(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ .

iii) Tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất có bậc  $4(2N - 1)^2$  cho các ánh xạ chỉnh hình thuộc  $\mathcal{M}_{L1}^8(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ .

Bây giờ ta xem xét một số ví dụ của Định lý 2.2.4.

**Ví dụ 2.2.2.** Với mỗi  $i = 1, 2$ , ta đặt

$$P_i(x, y) = x^{13} - \frac{4}{11}13x^{11}y^2 + iy^{13}$$

và đặt

$$P(z_1, z_2, z_3) = P_1^9(z_1, z_3) + P_2^9(z_2, z_3).$$

Gọi  $X$  là siêu mặt trong  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  được xác định bởi  $P(z_1, z_2, z_3) = 0$ . Ta thấy rằng  $d = 9$  và  $P(z_1, z_2, z_3)$  thỏa mãn (2.32). Ta dễ dàng kiểm tra rằng  $X$  thỏa mãn Định lý 2.2.4 với  $N = 2$ ,  $n = 11$ ,  $p = 2$ ,  $v = 1$ . Vì vậy,  $X$  là siêu mặt xác định duy nhất có bậc 13.9 cho các ánh xạ chỉnh hình thuộc  $\mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ .

**Ví dụ 2.2.3.** Với mỗi  $i = 1, 2$ , ta đặt

$$P_i(x, y) = x^7 - \frac{7}{6}x^6y + iy^7$$

và đặt

$$P(z_1, z_2, z_3) = P_1^9(z_1, z_3) + P_2^9(z_2, z_3).$$

Gọi  $X$  là siêu mặt trong  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  được xác định bởi  $P(z_1, z_2, z_3) = 0$ . Ta dễ dàng kiểm tra rằng  $X$  thỏa mãn Định lý 2.2.4 với  $v = 2$ . Vì vậy,  $X$  là siêu mặt xác định duy nhất có bậc 7.9 cho các ánh xạ chỉnh hình thuộc  $\mathcal{M}_{L1}^2(\mathbb{C}, \mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ .

Bây giờ, ta xét  $Y(z) = z^7 - \frac{7}{6}z^6 + 1$ . Khi đó,  $Y(z)$  là đa thức bậc 7 và  $Y'(z) = 7z^5(z - 1) = 0$  cho thấy  $z = 0, z = 1$  và  $Y(0) \neq 0, Y(1) \neq 0$ . Do đó,  $Y(z)$  không có các nghiệm bội. Đặt

$$S = \{z \in \mathbb{C} : Y(z) = 0\}.$$

Gọi  $f, g$  là các hàm phân hình sao cho  $E_{f^2}(S) = E_{g^2}(S)$ . Kí hiệu  $f = f_1/f_2$ ,  $g = g_1/g_2$ , ở đó  $f_1, f_2$  là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung và  $g_1, g_2$  cũng là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung. Đặt  $\hat{f} = (f_1 : f_2)$  và  $\hat{g} = (g_1 : g_2)$ , khi đó  $\hat{f}$  và  $\hat{g}$  là các ánh xạ chỉnh hình từ  $\mathbb{C}$  tới  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Gọi  $X$  là siêu mặt được xác định bởi  $P(z_1, z_2) = 0$ , trong đó  $P(z_1, z_2) = z_1^7 - \frac{7}{6}z_1^6z_2 + z_2^7$ . Dễ dàng kiểm tra được điều kiện  $E_{f^2}(S) = E_{g^2}(S)$  suy ra  $E_{\hat{f}^2}(X) = E_{\hat{g}^2}(X)$ . Áp dụng Định lý 2.2.4 với  $N = 2, v = 1$ , ta có  $f^2 = g^2$ .

**Ví dụ 2.2.4.** Đặt

$$P_i(x, y) = x^4 - \frac{4}{3}x^3y + iy^4,$$

với  $i = 1, 2$ . Đặt

$$P(z_1, z_2, z_3) = P_1^9(z_1, z_3) + P_2^9(z_2, z_3).$$

Gọi  $X$  là siêu mặt trong  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  xác định bởi  $P(z_1, z_2, z_3) = 0$ . Dễ dàng kiểm tra rằng  $X$  thỏa mãn Định lý 2.2.4 với  $v = 8$ . Vì vậy,  $X$  là siêu mặt xác định duy nhất có bậc 4.9 cho các ánh xạ chỉnh hình thuộc  $\mathcal{M}_{L^1}^8(\mathbb{C}, \mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ .

Kí hiệu  $Y(z) = z^4 - \frac{4}{3}z^3 + 1$ . Khi đó,  $Y(z)$  là đa thức bậc 4 và  $Y'(z) = 4z^2(z - 1) = 0$  có các không điểm là  $z = 0, z = 1$ . Do  $Y(0) \neq 0, Y(1) \neq 0$  nên  $Y(z)$  không có không điểm bội. Đặt

$$S = \{z \in \mathbb{C} : Y(z) = 0\}.$$

Gọi  $f, g$  là các hàm phân hình thỏa mãn  $E_{f^8}(S) = E_{g^8}(S)$ . Theo lý luận tương tự như trong Ví dụ 2.2.3, ta có  $f^8 = g^8$ .

## Kết luận Chương 2

Trong chương này chúng tôi đã thiết lập một số điều kiện đại số cho một hoặc hai siêu mặt xác định duy nhất đối với ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1 từ  $\mathbb{C}$  vào  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ . Các kết quả trong chương này được công bố trên bài báo số [PAC1] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Ngoài việc giới thiệu một số kiến thức cơ bản về đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính, không suy biến tuyến tính mức 1, trong chương này chúng tôi đã thực hiện một số nội dung nghiên cứu sau:

1. Phát biểu và chứng minh hai mệnh đề chìa khóa (Mệnh đề 2.2.1 và 2.2.2) về tính chất của hàm phân hình và đường cong chỉnh hình kết hợp với siêu mặt kiểu Fermat-Yi.

2. Phát biểu và chứng minh điều kiện đại số (Định lý 2.2.3) để hai siêu mặt xác định duy nhất đối với đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1, mở rộng của Định lý 3.1 của Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. trong [26] cho trường hợp đường cong.

3. Phát biểu và chứng minh điều kiện đại số (Định lý 2.2.4) để một siêu mặt xác định duy nhất đối với đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1. Từ đó chỉ ra sự tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất cho các lớp đường cong chỉnh hình và xây dựng một số ví dụ minh họa.

## Chương 3

# Định lý duy nhất đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên liên quan đến bội các không điểm

Trong chương này chúng tôi sẽ giới thiệu một số kiến thức cơ bản về phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, chứng minh dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên ở vị trí dưới tổng quát và dạng định lý duy nhất cho siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát - có điều kiện đại số liên quan đến bội các không điểm để hai đường cong trùng nhau trên hình vành khuyên. Các kết quả chính trong chương này viết dựa trên bài báo [PC1] trong Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án.

### 3.1. Các hàm Nevanlinna-Cartan và tính chất

Trong phần này chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và một số kết quả liên quan đến việc chứng minh định lý duy nhất. Trước tiên ta nhắc lại hình vành khuyên trong mặt phẳng phức.

Cho  $R > 1$  là số thực không âm hoặc bằng  $\infty$ , tập hợp

$$\mathbb{A}_R = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < R \right\}, \quad (3.1)$$

là hình vành khuyên trên  $\mathbb{C}$ . Ta dễ dàng thấy rằng hình vành khuyên

$$\mathbb{A}_{R_1, R_2} = \{R_1 < |z - z_0| < R_2\}, \quad (3.2)$$

trong đó  $R_1 < R_2$  là các số thực dương, có thể biến thành  $\mathbb{A}_R$  thông qua phép biến đổi

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{R_2 \cdot R_1}}(z - z_0),$$

với  $R = \sqrt{R_2/R_1}$ . Hình vành khuyên  $|z - z_0| \leq \infty$  thành  $\mathbb{A}_\infty$  thông qua phép biến đổi

$$w(z) = z - z_0.$$

Do đó trong chương này chúng tôi sẽ nghiên cứu về vấn đề duy nhất đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên  $\mathbb{A}_R$ , trong đó  $R > 1$  là số thực không âm hoặc bằng  $\infty$ .

Với mỗi số thực  $\rho : 1 < \rho < R$ , kí hiệu

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{1, \rho} &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\rho} < |z| \leq 1 \right\}, \quad \mathbb{A}_{2, \rho} = \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \rho \}, \\ \mathbb{A}_\rho &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\rho} < |z| < \rho \right\}. \end{aligned}$$

Cho hàm phân hình  $f$  trên  $\mathbb{A}_R$ ,  $\tau \in \mathbb{C}$ , ta đặt

$$\begin{aligned} m(\rho, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\theta})| d\theta; \\ m\left(\rho, \frac{1}{f - \tau}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\theta}) - \tau|} d\theta. \end{aligned}$$

Kí hiệu

$$m_0(\rho, f) = m(\rho, f) + m(\rho^{-1}, f)$$

và

$$m_0\left(\rho, \frac{1}{f - \tau}\right) = m\left(\rho, \frac{1}{f - \tau}\right) + m\left(\rho^{-1}, \frac{1}{f - \tau}\right).$$

Ta gọi  $n_1(\rho, \infty)$  và  $n_2(\rho, \infty)$  là số các cực điểm của  $f$  lần lượt trong  $\mathbb{A}_{1,\rho}$  và  $\mathbb{A}_{2,\rho}$ . Ta gọi  $n_1(\rho, \frac{1}{f-\tau})$  và  $n_2(\rho, \frac{1}{f-\tau})$  là số các không điểm của  $f - \tau$  lần lượt trong  $\mathbb{A}_{1,\rho}$  và  $\mathbb{A}_{2,\rho}$ . Đặt

$$N_1\left(\rho, \frac{1}{f-\tau}\right) = \int_{1/\rho}^1 \frac{n_1\left(t, \frac{1}{f-\tau}\right)}{t} dt,$$

$$N_2\left(\rho, \frac{1}{f-\tau}\right) = \int_1^\rho \frac{n_2\left(t, \frac{1}{f-\tau}\right)}{t} dt$$

và

$$N_1(\rho, f) = N_1(\rho, \infty) = \int_{1/\rho}^1 \frac{n_1(t, \infty)}{t} dt,$$

$$N_2(\rho, f) = N_2(\rho, \infty) = \int_1^\rho \frac{n_2(t, \infty)}{t} dt.$$

Kí hiệu

$$N_0\left(\rho, \frac{1}{f-\tau}\right) = N_1\left(\rho, \frac{1}{f-\tau}\right) + N_2\left(\rho, \frac{1}{f-\tau}\right)$$

$$N_0(\rho, f) = N_1(\rho, f) + N_2(\rho, f).$$

Hàm

$$T_0(\rho, f) = m_0(\rho, f) + N_0(\rho, f) - 2m(1, f)$$

được gọi là *hàm đặc trưng Nevanlinna* của  $f$ . Dễ kiểm tra được các hàm  $m_0(\rho, f)$ ,  $N_0(\rho, f)$ ,  $T_0(\rho, f)$  dương, liên tục, lồi và không giảm theo  $\log \rho$ . Năm 2005, Khrystianyn A. Y. và Kondratyuk A. A. chứng minh kết quả sau là dạng của định lý Jensen đối với hàm phân hình trên hình vành khuyên.

**Mệnh đề 3.1.1** ([32], Định lý 1, trang 21). *Giả sử hàm phân hình khác hằng  $f$  trên hình vành khuyên  $\mathbb{A}_R$ . Khi đó, với mỗi  $\rho \in (1, R)$ , ta có*

$$N_0\left(\rho, \frac{1}{f}\right) - N_0(\rho, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho^{-1} e^{i\theta})| d\theta \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Kết quả sau đây là dạng định lý cơ bản thứ nhất đối với hàm phân hình trên hình vành khuyên được chứng minh bởi Khrystianyn A. Y. và Kondratyuk A. A. vào năm 2005.

**Mệnh đề 3.1.2** ([32], Định lý 2, trang 21). *Giả sử hàm phân hình khác hằng  $f$  trên hình vành khuyên  $\mathbb{A}_R$ . Khi đó với mỗi  $\rho \in (1, R)$ , ta có*

$$T_0\left(\rho, \frac{1}{f - \tau}\right) = T_0(\rho, f) + O(1),$$

với mọi hằng số  $\tau \in \mathbb{C}$ .

Trong cách viết các bất đẳng thức về sau trong quan hệ giữa các hàm Nevanlinna của hàm phân hình hoặc đường cong chỉnh hình, kí hiệu “ $\|$ ” được hiểu là bất đẳng thức đúng đối với  $\rho \in (1, \infty)$  nằm ngoài tập  $\mathbb{A}'_\rho$  thỏa mãn  $\int_{\mathbb{A}'_\rho} \rho^{\lambda-1} d\rho < \infty$ , với  $R = \infty$  và trong trường hợp  $R < \infty$  thì bất đẳng thức đúng đối với  $\rho \in (1, R)$  nằm ngoài tập  $\mathbb{A}'_\rho$  thỏa mãn  $\int_{\mathbb{A}'_\rho} \frac{1}{(R - \rho)^{\lambda+1}} d\rho < \infty$ , ở đó  $\lambda \geq 0$ . Năm 2005, Khrystianyn A. Y. và Kondratyuk A. A. chứng minh dạng bổ đề đạo hàm logarit đối với hàm phân hình trên hình vành khuyên như sau.

**Mệnh đề 3.1.3** ([33], Định lý 1, trang 57). *Giả sử hàm phân hình  $f$  trên  $\mathbb{A}_R$  và  $\lambda \geq 0$ . Khi đó với mỗi  $\rho \in (1, R)$ , ta có*

(i) Nếu  $R = \infty$ ,

$$\| m_0\left(\rho, \frac{f'}{f}\right) = O(\log \rho + \log T_0(\rho, f)).$$

(ii) Nếu  $R < \infty$ ,

$$\| m_0 \left( \rho, \frac{f'}{f} \right) = O \left( \log \frac{1}{R - \rho} + \log T_0(\rho, f) \right).$$

Tiếp theo ta nghiên cứu một số khái niệm và kết quả về phân bố giá trị đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. Ta nhắc lại ánh xạ

$$f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

được gọi là đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, trong đó  $f_0, \dots, f_n$  là các hàm chỉnh hình trên  $\mathbb{A}_R$  có ít nhất một hàm không đồng nhất bằng không. Ta gọi  $(f_0, \dots, f_n)$  là *biểu diễn* của đường cong  $f$ . Nếu các hàm  $f_0, \dots, f_n$  không có không điểm chung trên  $\mathbb{A}_R$  thì ta gọi  $(f_0, \dots, f_n)$  là *biểu diễn rút gọn* của  $f$ .

Đường cong chỉnh hình  $f : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  được gọi là *suy biến tuyến tính* (tương ứng *suy biến đại số*) nếu ảnh của  $f$  chứa trong đa tạp tuyến tính thực sự (tương ứng đa tạp đại số thực sự) nào đó của không gian xạ ảnh  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .

Giả sử  $f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là đường cong chỉnh hình trên  $\mathbb{A}_R$  và  $(f_0, \dots, f_n)$  là biểu diễn rút gọn của  $f$ , tức là các hàm  $f_0, \dots, f_n$  chỉnh hình không có không điểm chung trên  $\mathbb{A}_R$ . Với mỗi  $1 < \rho < R$ , hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan  $T_f(\rho)$  của  $f$  được xác định bởi

$$T_f(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(\rho e^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(\rho^{-1} e^{i\theta})\| d\theta,$$

ở đó  $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \dots, |f_n(z)|\}$ . Định nghĩa này độc lập với cách chọn biểu diễn rút gọn của hàm  $f$ , sai khác hằng số. Ta đặt

$$O_f(\rho) = \begin{cases} O(\log \rho + \log T_f(\rho)) & \text{nếu } R = \infty, \\ O \left( \log \frac{1}{R - \rho} + \log T_f(\rho) \right) & \text{nếu } R < \infty. \end{cases}$$

Cho  $D$  là siêu mặt bậc  $d$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và  $Q$  là đa thức thuần nhất bậc  $d$  xác định  $D$  trong  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ , ta giả sử

$$Q(z_0, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \dots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó  $n_d = \binom{n+d}{n} - 1$  và  $i_{k0} + \dots + i_{kn} = d$  với  $k = 0, \dots, n_d$ , khi đó ta kí hiệu

$$(f, D) = Q(f) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k f_0^{i_{k0}} \dots f_n^{i_{kn}}.$$

Nếu  $Q(f) \neq 0$ , ta gọi  $(f, D)$  là tự do.

Bây giờ ta định nghĩa hàm xấp xỉ. Dưới điều kiện  $(f, D)$  tự do, hàm

$$m_f(\rho, D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(\rho e^{i\theta})\|^d}{|(f, D)(\rho e^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(\rho^{-1} e^{i\theta})\|^d}{|(f, D)(\rho^{-1} e^{i\theta})|} d\theta$$

là hàm xấp xỉ của hàm  $f$  kết hợp với siêu mặt  $D$ , ở đó  $1 < \rho < R$ . Định nghĩa này độc lập với cách chọn biểu diễn rút gọn của hàm  $f$ , có thể sai khác hằng số.

Tiếp theo ta định nghĩa các dạng hàm đếm. Đối với đường cong  $f$  và siêu mặt  $D$  sao cho  $(f, D)$  tự do, ta kí hiệu  $\nu_{(f,D)}$  là ánh xạ từ  $\mathbb{A}_R$  vào  $\mathbb{Z}$  ở đó  $\nu_{(f,D)}(z)$  là bội các không điểm của  $(f, D)$  tại  $z$ , tức là  $\nu_{(f,D)}(z) = \text{ord}_{(f,D)}(z)$ . Với các số nguyên  $k, d$ , ta đặt

$$\nu_{(f,D), \leq k}^d = \begin{cases} \min\{d, \nu_{(f,D)}\} & \text{nếu } 0 < \nu_{(f,D)} \leq k, \\ 0 & \text{trong trường hợp khác} \end{cases}$$

là bội cắt cụt bởi  $d$  và chỉ xem xét tại các bội  $\leq k$ .

Với mỗi  $\rho : 1 < \rho < R$ , ta gọi  $n_{1,f}(\rho, D)$  và  $n_{2,f}(\rho, D)$  là số các không điểm tính bội của  $Q \circ f(z)$  lần lượt trong  $\mathbb{A}_{1,\rho}$  và  $\mathbb{A}_{2,\rho}$ . Hàm đếm tại các không điểm của  $f$  kết hợp với siêu mặt  $D$  được xác định bởi

$$N_{1,f}(\rho, D) = \int_{\rho^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}(t, D)}{t} dt, \quad N_{2,f}(\rho, D) = \int_1^{\rho} \frac{n_{2,f}(t, D)}{t} dt,$$

hàm đếm tại các cực điểm  $f$  kết hợp với siêu mặt  $D$  được xác định bởi

$$N_f(\rho, D) = N_{1,f}(\rho, D) + N_{2,f}(\rho, D).$$

Giả sử  $\Delta$  là số nguyên không âm, ta gọi  $n_{1,f}^\Delta(\rho, D)$  và  $n_{2,f}^\Delta(\rho, D)$  là số các không điểm với bội cắt bởi  $\Delta$  của  $Q \circ f(z)$  lần lượt trong  $\mathbb{A}_{1,\rho}$  và  $\mathbb{A}_{2,\rho}$ , trong đó mỗi không điểm được tính bằng số bội của nó nếu bội đó nhỏ hơn  $\Delta$  và bằng  $\Delta$  trong trường hợp khác, tức là

$$n_{1,f}^\Delta(\rho, D) = \sum_{z \in \mathbb{A}_{1,\rho}, Q \circ f(z)=0} \min\{\text{ord}_{Q \circ f}(z), \Delta\},$$

$$n_{2,f}^\Delta(\rho, D) = \sum_{z \in \mathbb{A}_{2,\rho}, Q \circ f(z)=0} \min\{\text{ord}_{Q \circ f}(z), \Delta\}.$$

Hàm đếm bội cắt bởi của hàm  $f$  được xác định bởi

$$N_{1,f}^\Delta(\rho, D) = \int_{\rho^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}^\Delta(t, D)}{t} dt, \quad N_{2,f}^\Delta(\rho, D) = \int_1^\rho \frac{n_{2,f}^\Delta(t, D)}{t} dt$$

và

$$N_f^\Delta(\rho, D) = N_{1,f}^\Delta(\rho, D) + N_{2,f}^\Delta(\rho, D).$$

Cho  $k, \Delta$  là số nguyên không âm, ta kí hiệu  $n_{1,f,\leq k}^\Delta(\rho, D)$  (tương ứng  $n_{1,f,\geq k}^\Delta(\rho, D)$ ) là số các không điểm có bội  $\leq k$  (tương ứng  $\geq k$ ) của  $Q \circ f(z)$  trong  $\mathbb{A}_{1,\rho}$ ;  $n_{2,f,\leq k}^\Delta(\rho, D)$  (tương ứng  $n_{2,f,\geq k}^\Delta(\rho, D)$ ) là số các không điểm có bội  $\leq k$  (tương ứng  $\geq k$ ) của  $Q \circ f(z)$  trong  $\mathbb{A}_{2,\rho}$ , ở đó mỗi không điểm được lấy bằng số bội của nó nếu bội nhỏ hơn hay bằng  $\Delta$  và  $\Delta$  lần trong các trường hợp bội lớn hơn  $\Delta$ . Hàm đếm được xác định bởi

$$N_{1,f,\leq k}^\Delta(\rho, D) = \int_{\rho^{-1}}^1 \frac{n_{1,f,\leq k}^\Delta(t, D)}{t} dt, \quad N_{2,f,\leq k}^\Delta(\rho, D) = \int_1^\rho \frac{n_{2,f,\leq k}^\Delta(t, D)}{t} dt;$$

$$N_{1,f,\geq k}^\Delta(\rho, D) = \int_{\rho^{-1}}^1 \frac{n_{1,f,\geq k}^\Delta(t, D)}{t} dt, \quad N_{2,f,\geq k}^\Delta(\rho, D) = \int_1^\rho \frac{n_{2,f,\geq k}^\Delta(t, D)}{t} dt$$

và đặt

$$\begin{aligned} N_{f, \leq k}^\Delta(\rho, D) &= N_{1, f, \leq k}^\Delta(\rho, D) + N_{2, f, \leq k}^\Delta(\rho, D); \\ N_{f, \geq k}^\Delta(\rho, D) &= N_{1, f, \geq k}^\Delta(\rho, D) + N_{2, f, \geq k}^\Delta(\rho, D). \end{aligned}$$

Mệnh đề sau đây được gọi là định lý cơ bản thứ nhất đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên cho trường hợp siêu mặt, được Phuong H. T. và Vilaisavan L. chứng minh vào năm 2021.

**Mệnh đề 3.1.4** ([47], Bổ đề 2.3, trang 27). *Giả sử  $f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là đường cong chỉnh hình và  $D$  là siêu mặt bậc  $d$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sao cho ảnh của  $f$  không chứa trong  $D$ . Khi đó, với mỗi  $\rho : 1 < \rho < R$ , ta có*

$$m_f(\rho, D) + N_f(\rho, D) = dT_f(\rho) + O(1).$$

Tiếp theo ta nhắc lại kết quả liên quan đến Wronskian của các hàm phân hình. Giả sử  $f_0, \dots, f_n$  là các hàm phân hình, ta nhắc lại

$$W(f_0, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdot & f_n \\ f_0' & f_1' & \cdot & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n)} & f_1^{(n)} & \cdot & f_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

được gọi là Wronskian của các hàm  $f_0, \dots, f_n$ . Năm 2024, Phuong H. T. và Padaphet I. đã chứng minh

**Mệnh đề 3.1.5** ([46], Bổ đề 2.5, trang 1564). *Giả sử  $f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính, trong đó các hàm  $f_0, \dots, f_n$  không có không điểm chung. Khi đó với mỗi  $1 < \rho < R$ , ta có*

$$\| m_0 \left( \rho, \frac{W(f_0, \dots, f_n)}{f_0 \dots f_n} \right) = O_f(\rho). \quad (3.3)$$

Bây giờ ta giả sử  $D_1, \dots, D_q$  là các siêu mặt trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và  $N \geq n$  là số tự nhiên không âm, ta nhắc lại họ các siêu mặt  $D_1, \dots, D_q$  được gọi là

ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát (đối với  $\mathbb{A}_R$ ) nếu  $q > N$  và với mọi cách chọn các chỉ số  $i_1, \dots, i_{N+1} \in \{1, \dots, q\}$ , ta luôn có

$$\bigcap_{k=1}^{N+1} \text{supp}(D_{i_k}) \cap \mathbb{A}_R = \emptyset.$$

Nếu  $N = n$ , họ các siêu mặt  $\mathcal{D}$  được gọi là ở vị trí tổng quát.

Giả sử các siêu mặt  $D_1, \dots, D_q$  cùng bậc  $d$ . Đối với bất kỳ  $j = 1, \dots, q$ , ta gọi  $Q_j(z_0, \dots, z_n)$  là đa thức thuần nhất bậc  $d$  xác định  $D_j$ , Khi đó, đối với bất kỳ tập con  $R \subset \{1, \dots, q\}$ , ta đặt

$$\text{rank}\{D_j\}_{j \in R} = \text{rank}\{Q_j\}_{j \in R}.$$

**Mệnh đề 3.1.6** ([3], Bổ đề 4.2, trang 197). *Giả sử  $D_1, \dots, D_q$  là các siêu mặt cùng bậc  $d$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Ta đặt  $M = \binom{n+d}{n} - 1$ . Khi đó tồn tại  $(M-n)$  siêu mặt  $T_1, \dots, T_{M-n}$  bậc  $d$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  thỏa mãn đối với bất kỳ tập con  $R \subset \{1, \dots, q\}$  với*

$$\#R = \text{rank}\{D_j\}_{j \in R} = n + 1,$$

*khi đó  $\text{rank}\{\{D_j\}_{j \in R} \cup \{T_j\}_{j=1}^{M-n}\} = M + 1$ , trong đó  $\#R$  là kí hiệu số các phần tử của  $R$ .*

**Mệnh đề 3.1.7** ([3], Bổ đề 3.3, trang 195). *Cho  $D_1, \dots, D_q$  ( $q > 2N - n + 1$ ) là các siêu mặt cùng bậc  $d$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát. Khi đó tồn tại các hằng số hữu tỷ không âm  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , thỏa mãn năm điều kiện sau:*

(i)  $0 < w_i \leq 1$ , với mọi  $i \in \{1, \dots, q\}$ .

(ii) Đặt  $\tilde{w} = \max\{w_1, \dots, w_q\}$ , khi đó ta có

$$\sum_{j=1}^q w_j = \tilde{w}(q - 2N + n - 1) + n + 1.$$

(iii)  $\frac{n+1}{2N-n+1} \leq \tilde{w} \leq \frac{n}{N}$ .

(iv) Với mỗi  $R \subset \{1, \dots, q\}$  và  $\#R = N + 1$  khi đó  $\sum_{j \in R} w_j \leq n + 1$ .

(v) Gọi  $E_i \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, q$ , là các số tùy ý cho trước. Với  $R \subset \{1, \dots, q\}$  thỏa mãn  $\#R = N + 1$ , tồn tại tập con  $R^o \subset R$  thỏa mãn  $\#R^o = \text{rank}\{D_j\}_{j \in R^o} = n + 1$  và

$$\prod_{i \in R} E_i^{w_i} \leq \prod_{i \in R^o} E_i.$$

### 3.2. Định lý duy nhất

Để chứng minh định lý duy nhất, trước hết ta chứng minh dạng định lý cơ bản thứ hai đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên cho trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát.

**Định lý 3.2.1.** Cho  $f : \mathbb{A}_R \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và  $D_1, \dots, D_q$  là các siêu mặt bậc  $d_j$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát ( $N \geq n$ ). Kí hiệu  $d$  là bội số chung nhỏ nhất của các  $d_j$  và đặt  $M = \binom{n+d}{n} - 1$ . Giả sử  $q \geq \frac{(M+1)(2N-n+1)}{n+1}$ , khi đó với mỗi  $\rho : 1 < \rho < R$ , ta có

$$\left\| \left( q - \frac{(M+1)(2N-n+1)}{n+1} \right) T_f(\rho) \leq \sum_{j=1}^q \frac{1}{d} N_f^M(\rho, D_j) + O_f(\rho) \right\| \quad (3.4)$$

*Chứng minh.* Gọi  $(f_0, \dots, f_n)$  là biểu diễn rút gọn của  $f$ , tức là các hàm  $f_0, \dots, f_n$  là chỉnh hình và không có không điểm chung trên  $\mathbb{A}_R$ . Với mỗi  $j = 1, \dots, q$ , gọi  $Q_j$  là đa thức thuần nhất bậc  $d_j$  xác định siêu mặt  $D_j$  trong  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ .

Trước tiên ta xem xét trường hợp  $d_1 = d_2 = \dots = d_q = d$ . Gọi  $w_1, \dots, w_q$  là các số hữu tỷ thỏa mãn Mệnh đề 3.1.7 đối với các siêu mặt  $D_1, \dots, D_q$ . Gọi  $S_1, \dots, S_{M-n}$  là các siêu mặt trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  thỏa mãn Mệnh đề 3.1.6 và gọi  $P_j$  ( $1 \leq j \leq M-n$ ) là các đa thức thuần nhất bậc  $d$  xác

định các siêu mặt  $S_j$  trong  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ . Gọi  $\mathcal{I}_d$  là tập các bộ  $(n+1)$ -chỉ số bậc  $d$ . Từ  $\#\mathcal{I}_d = M$  nên ta có thể viết  $\mathcal{I}_d = \{I_0, \dots, I_M\}$ . Khi đó, đối với bất kỳ  $j = 0, \dots, M$ , ta viết

$$F_j = f^{I_j} = f_0^{i_{j0}} \dots f_n^{i_{jn}},$$

trong đó  $I_j = (i_{j0}, \dots, i_{jn}) \in \mathcal{I}_d$ . Vì  $f$  là đường cong chỉnh hình không suy biến đại số nên  $F_0, \dots, F_M$  là độc lập tuyến tính trên  $\mathbb{C}$ . Suy ra

$$W_F = W(F_0, \dots, F_M) \neq 0.$$

**Khẳng định 1.** *Tồn tại hằng số không âm  $\Delta \geq 1$  sao cho với mỗi tập con tùy ý  $\{l_1, \dots, l_{N+1}\} \subset \{1, \dots, q\}$ , ta có*

$$\|f(z)\|^d \leq \Delta \max_{j=1, \dots, N+1} |Q_{l_j}(f)(z)|, \quad (3.5)$$

với mỗi  $z \in \mathbb{A}_R$ .

*Chứng minh.* Thật vậy, gọi

$$\mathcal{R} = \{l_1, \dots, l_{N+1}\} \subset \{1, \dots, q\}$$

là tập con bất kì, từ Mệnh đề 3.1.7 ta thấy tồn tại tập con

$$\mathcal{R}^o = \{t_1, \dots, t_{n+1}\} \subset \mathcal{R},$$

thỏa mãn

$$\#\mathcal{R}^o = n+1 = \text{rank}\{D_j\}_{j \in \mathcal{R}^o}.$$

Do đó với mỗi số tự nhiên  $k \in \{0, \dots, n\}$ , theo Định lý Nullstellensatz của Hilbert trong [57], tồn tại số tự nhiên  $d_k \geq d$  và dạng tuyến tính thuần nhất  $L_{ji}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ ,  $i = 0, \dots, n$ , với các hệ số thuộc  $\mathbb{C}$  thỏa mãn

$$z_k^{d_k} = \sum_{j=1}^{n+1} L_{jk}(z_0, \dots, z_n) Q_{t_j}(z_0, \dots, z_n). \quad (3.6)$$

Dễ thấy rằng bậc của  $L_{ji}$  là  $d_k - d$  với mỗi  $j = 1, \dots, n+1, i = 0, \dots, n$ , do đó tồn tại hằng số  $\Delta_{\mathcal{R}}$  chỉ phụ thuộc vào các hệ số của  $L_{jk}$ , tức là chỉ phụ thuộc vào các hệ số của các đa thức  $Q_1, \dots, Q_q$  thỏa mãn

$$|L_{jk}(f_0(z), \dots, f_n(z))| \leq \Delta_{\mathcal{R}} \|f(z)\|^{d_k-d}, \quad (3.7)$$

với mỗi  $z \in \mathbb{A}_R$ . Do đó từ (3.6), ta có

$$\begin{aligned} |f_k(z)|^{d_k} &\leq \Delta_{\mathcal{R}} \|f(z)\|^{d_k-d} \max\{|Q_{t_j}(f)(z)|, j = 1, \dots, n+1\} \\ &\leq \Delta_{\mathcal{R}} \|f(z)\|^{d_k-d} \max\{|Q_{l_j}(f)(z)|, j = 1, \dots, N+1\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Chú ý rằng (3.8) đúng với mọi  $k = 0, \dots, n$ , nên ta có

$$\|f(z)\|^d \leq \Delta_{\mathcal{R}} \max\{|Q_{l_j}(f)(z)|, j = 1, \dots, N+1\}. \quad (3.9)$$

Đặt

$$\Delta = \max\{1, \max_{\mathcal{R}=\{i_1, \dots, i_{N+1}\} \subset \{1, \dots, q\}} \Delta_{\mathcal{R}}\},$$

khi đó  $\Delta$  chỉ phụ thuộc vào các hệ số của  $Q_1, \dots, Q_q$ . Từ (3.9) ta có (3.5), do đó Khẳng định 1 được chứng minh.

Ta tiếp tục chứng minh định lý. Với số thực  $\rho : 1 < \rho < R$ , gọi  $x \in \mathbb{A}_R$ ,  $|x| = \rho$  là điểm cố định, khi đó tồn tại các chỉ số, ta sắp xếp lại nếu cần  $\{l_1, \dots, l_q\}$  của  $\{1, \dots, q\}$  thỏa mãn

$$|Q_{l_1}(f)(x)| \leq |Q_{l_2}(f)(x)| \leq \dots \leq |Q_{l_q}(f)(x)|. \quad (3.10)$$

Ta đặt  $\mathcal{R} = \{l_1, \dots, l_{N+1}\}$  và  $\mathcal{Q} = \{1, \dots, q\} \setminus \mathcal{R}$ . Từ Mệnh đề 3.1.7, khi đó tồn tại tập con  $\mathcal{R}^o = \{t_1, \dots, t_{n+1}\} \subset \mathcal{R}$  thỏa mãn  $\#\mathcal{R}^o = n+1 = \text{rank}\{D_j\}_{j \in \mathcal{R}^o}$ . Đặt

$$W_{\mathcal{R}} = W(Q_{t_1}(f), \dots, Q_{t_{n+1}}(f), P_1(f), \dots, P_{M-n}(f)).$$

Từ Mệnh đề 3.1.6 ta có

$$\text{rank}\{Q_{t_1}, \dots, Q_{t_{n+1}}, P_1, \dots, P_{M-n}\} = M+1,$$

điều này kéo theo tồn tại hằng số  $C_1 \neq 0$  thỏa mãn

$$W_{\mathcal{R}} = C_1 W_F. \quad (3.11)$$

Từ bậc của các  $P_j(z)$  bằng  $d$  với mọi  $j = 1, \dots, M - n$ , nên tồn tại hằng số  $\beta_j$  chỉ phụ thuộc vào các hệ số của  $P_j$  sao cho

$$|P_j(f_0(z), \dots, f_n(z))| \leq \beta_j \|f(z)\|^d,$$

với mọi  $z \in \mathbb{A}_R$ . Đặt  $\beta = \max_{j=1, \dots, M-n} \beta_j$  khi đó ta có

$$|P_j(f_0(z), \dots, f_n(z))| = |P_j(f)(z)| \leq \beta \|f(z)\|^d, \quad (3.12)$$

với mỗi  $j = 1, \dots, M - n$  và với mọi  $z \in \mathbb{A}_R$ .

Từ Mệnh đề 3.1.7, (3.5) trong Khẳng định 1, (3.11) và (3.12) ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\|f(x)\|^{d(\sum_{j=1}^q w_j)} |W_F(x)|}{|Q_1(f)(x)|^{w_1} \dots |Q_q(f)(x)|^{w_q}} \\ &= |W_F(x)| \prod_{j \in \mathcal{R}} \left( \frac{\|f(x)\|^d}{|Q_j(f)(x)|} \right)^{w_j} \prod_{j \in \mathcal{Q}} \left( \frac{\|f(x)\|^d}{|Q_j(f)(x)|} \right)^{w_j} \\ &\leq \Delta^{q-N-1} \cdot |W_F(x)| \prod_{j \in \mathcal{R}} \left( \frac{\|f(x)\|^d}{|Q_j(f)(z)|} \right)^{w_j} \\ &\leq \Delta^{q-N-1} \cdot |W_F(x)| \prod_{j \in \mathcal{R}^o} \frac{\|f(x)\|^d}{|Q_j(f)(x)|} \\ &\leq \frac{\Delta^{q-N-1} \beta^{M-n}}{|C_1|} \frac{|W_{\mathcal{R}}(x)| \|f(x)\|^{d(M+1)}}{\prod_{j \in \mathcal{R}^o} |Q_j(f)(x)| \prod_{j=1}^{M-n} |P_j(f)(x)|}. \end{aligned}$$

Điều đó kéo theo

$$\begin{aligned} & \log \frac{\|f(x)\|^{d(\sum_{j=1}^q w_j)} |W_F(x)|}{|Q_1(f)(z)|^{w_1} \dots |Q_q(f)(x)|^{w_q}} \\ & \leq d(M+1) \log \|f(x)\| + S(x) + \log C, \end{aligned} \quad (3.13)$$

trong đó  $C = \Delta^{q-N-1} \beta^{M-n} / |C_1|$  và

$$S(x) = \sum_{\mathcal{R} \subset \{1, \dots, q\}} \log^+ \frac{|W_{\mathcal{R}}(x)|}{\prod_{j \in \mathcal{R}^o} |Q_j(f)(x)| \prod_{j=1}^{M-n} |P_j(f)(x)|}.$$

Theo lý luận tương tự như trên đối với  $y \in \mathbb{A}_R : |y| = 1/r$ , ta có

$$\begin{aligned} \log \frac{\|f(y)\|^{d(\sum_{j=1}^q w_j)} |W_F(y)|}{|Q_1(f)(y)|^{w_1} \dots |Q_q(f)(y)|^{w_q}} \\ \leq d(M+1) \log \|f(y)\| + S(y) + \log C. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Lấy tích phân hai vế của các bất đẳng thức (3.13), (3.14) và cộng vế với vế, từ Mệnh đề 3.1.1 và Mệnh đề 3.1.7 ta có

$$\begin{aligned} d \left( q - 2N + n - 1 - \frac{M-n}{\tilde{w}} \right) T_f(\rho) \\ \leq \sum_{j=1}^q \frac{w_j}{\tilde{w}} N_f(\rho, D_j) - \frac{1}{\tilde{w}} N_0 \left( \rho, \frac{1}{W_F} \right) \\ + \frac{1}{\tilde{w}} \int_0^{2\pi} (S(\rho e^{i\theta}) + S(\rho^{-1} e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} + O(1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Từ Mệnh đề 3.1.5 ta có

$$\begin{aligned} \parallel \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S(\rho e^{i\theta}) + S(\rho^{-1} e^{i\theta})) d\theta \\ = \sum_{\mathcal{R} \subset \{1, \dots, q\}} m_0 \left( \rho, \frac{W_{\mathcal{R}}}{\prod_{j \in \mathcal{R}} |Q_j(f)| \prod_{j=1}^{M-n} |P_j(f)|} \right) = O_f(\rho). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bây giờ ta ước lượng  $\sum_{j=1}^q w_j N_f(\rho, D_j) - N_0(\rho, \frac{1}{W_F})$ . Với mỗi  $z_0 \in \mathbb{A}_{1,\rho}$ , tồn tại số nguyên  $\beta_j \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq q$  và các hàm chỉnh hình  $g_j$  không triệt tiêu trong lân cận  $U$  của  $z_0$  thỏa mãn

$$Q_j(f)(z) = (z - z_0)^{\beta_j} g_j,$$

với  $j = 1, \dots, q$ , trong đó  $\beta_j = 0$  nếu  $Q_j(f)$  không triệt tiêu tại  $z_0$ . Do các siêu mặt  $D_1, \dots, D_q$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát nên tồn tại nhiều nhất là  $N$  chỉ số  $j \in \{1, \dots, q\}$  thỏa mãn  $\beta_j > 0$ . Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết  $\beta_j > 0$  với  $1 \leq j \leq k \leq N$  và  $\beta_j = 0$  với  $j > k$ .

Đặt  $\mathcal{R} = \{1, \dots, N+1\}$ , khi đó từ Mệnh đề 3.1.7, tồn tại tập con  $R^o = \{t_1, \dots, t_{n+1}\} \subset \mathcal{R}$  thỏa mãn  $\text{rank}\{D_j, j \in R^o\} = n+1$ . Đặt

$$W_{\mathcal{R}} = W(Q_{t_1}, \dots, Q_{t_{n+1}}, P_1, \dots, P_{M-n}).$$

Khi đó tồn tại hằng số  $C_2 \neq 0$  thỏa mãn  $W_F = C_2 \cdot W_{\mathcal{R}}$ . Từ đó suy ra  $W_F$  triệt tiêu tại  $z_0$  với bậc ít nhất là

$$\sum_{j \in R^o} \max\{0, \beta_j - M\} \leq \sum_{j=1}^q \max\{0, \beta_j - M\}.$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q w_j (N_{1,f}(\rho, D_j) - N_{1,f}^M(\rho, D_j)) &\leq \sum_{j=1}^q \tilde{w} (N_{1,f}(\rho, D_j) - N_{1,f}^M(\rho, D_j)) \\ &\leq \tilde{w} N_1 \left( \rho, \frac{1}{W_F} \right) \leq N_1 \left( \rho, \frac{1}{W_F} \right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{j=1}^q w_j N_{1,f}(\rho, D_j) - N_1 \left( \rho, \frac{1}{W_F} \right) \leq \sum_{j=1}^q w_j N_{1,f}^M(\rho, D_j).$$

Theo lý luận tương tự ta có

$$\sum_{j=1}^q w_j N_{2,f}(\rho, D_j) - N_2 \left( \rho, \frac{1}{W_F} \right) \leq \sum_{j=1}^q w_j N_{2,f}^M(\rho, D_j).$$

Suy ra

$$\sum_{j=1}^q w_j N_f(\rho, D_j) - N_0 \left( \rho, \frac{1}{W_F} \right) \leq \sum_{j=1}^q w_j N_f^M(\rho, D_j). \quad (3.17)$$

Kết hợp (3.15), (3.16) và (3.17) ta có

$$\begin{aligned} & \parallel d \left( q - 2N + n - 1 - \frac{M - n}{\tilde{w}} \right) T_f(\rho) \\ & \leq \sum_{j=1}^q \frac{w_j}{\tilde{w}} N_f^M(\rho, D_j) + O_f(\rho) \leq \sum_{j=1}^q N_f^M(\rho, D_j) + O_f(\rho). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Lưu ý rằng  $\tilde{w} \geq \frac{n+1}{2N-n+1}$ , nên từ (3.18) ta thu được (3.4).

Ta tiếp tục xem xét trường hợp  $d_1, \dots, d_q$  không đồng nhất bằng nhau. Đối với bất kỳ  $j \in \{1, \dots, q\}$ , ta đặt  $Q_j^* = Q_j^{d/d_j}$ , ở đó  $d$  là bội chung nhỏ nhất của các  $d_1, \dots, d_q$ . Khi đó  $Q_1^*, \dots, Q_q^*$  là các đa thức có cùng bậc  $d$ . Đối với bất kỳ  $j = 1, \dots, q$ , ta gọi  $D_j^*$  là siêu mặt xác định bởi  $Q_j^*$ . Từ bất đẳng thức (3.18) với chú ý  $\tilde{w} \geq \frac{n+1}{2N-n+1}$  ta có

$$\parallel d \left( q - \frac{(M+1)(2N-n+1)}{n+1} \right) T_f(\rho) \leq \sum_{j=1}^q N_f^M(\rho, D_j^*) + O_f(\rho). \quad (3.19)$$

Lưu ý rằng nếu  $z \in \mathbb{A}_R$  là không điểm bội  $k$  của  $Q_j(f)$  thì  $z$  cũng là không điểm bội  $kd/d_j$  của  $Q_j^{d/d_j}(f)$ . Điều này ta thu được

$$\begin{aligned} N_f^M(\rho, D_j^*) &= N_{1,f}^M(\rho, D_j^*) + N_{2,f}^M(\rho, D_j^*) \\ &\leq \frac{d}{d_j} N_{1,f}^M(\rho, D_j) + \frac{d}{d_j} N_{2,f}^M(\rho, D_j) = \frac{d}{d_j} N_f^M(\rho, D_j). \end{aligned}$$

Do đó ta có (3.4) từ (3.19) và Định lý 3.2.1 được chứng minh.  $\square$

Bây giờ chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh định lý duy nhất. Giả sử  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$  là họ các siêu mặt trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , ở đó  $D_j$  có bậc  $d_j$  với  $j = 1, \dots, q$ . Gọi  $d_{\mathcal{D}}$  là bội chung nhỏ nhất của các  $d_1, \dots, d_q$  và đặt

$$n_{\mathcal{D}} = \binom{n + d_{\mathcal{D}}}{n} - 1.$$

**Định lý 3.2.2.** Giả sử  $f$  và  $g$  là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ hình vành khuyên  $\mathbb{A}_R$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  thỏa mãn  $O_f(\rho) = o(T_f(\rho))$  và  $O_g(\rho) = o(T_g(\rho))$ . Gọi  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$  là họ các siêu mặt ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  thỏa mãn  $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$  với mọi  $i \neq j \in \{1, \dots, q\}$ . Giả sử  $k_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ) là các số tự nhiên dương hoặc  $\infty$  thỏa mãn  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_q \geq n_{\mathcal{D}}$ ,

$$\nu_{(f, D_j), \leq k_j}^1 = \nu_{(g, D_j), \leq k_j}^1, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

và  $f(z) = g(z)$  với mọi  $z \in \bigcup_{j=1}^q \{z \in \mathbb{A}_R : 0 < \nu_{(f, D_j)} \leq k_j\}$ . Nếu

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^q \frac{k_j}{k_j + 1} &> \frac{qn_{\mathcal{D}} - q}{n_{\mathcal{D}}} + \frac{(n_{\mathcal{D}} + 1)(2N - n + 1)}{(n + 1)n_{\mathcal{D}}} \\ &\quad - (n_{\mathcal{D}} - 1) \left( \frac{1}{k_2 + 1} + \frac{1}{k_1 + 1} \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

thì  $f \equiv g$ .

*Chứng minh.* Ta giả sử ngược lại rằng  $f \not\equiv g$ . Gọi  $(f_0, \dots, f_n)$  và  $(g_0, \dots, g_n)$  là các biểu diễn rút gọn của  $f$  và  $g$ . Từ điều kiện  $f \neq g$ , tồn tại hai chỉ số  $\alpha, \beta \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\alpha \neq \beta$  thỏa mãn  $f_{\alpha}g_{\beta} \neq f_{\beta}g_{\alpha}$ . Ta đặt

$$\Phi = f_{\alpha}g_{\beta} - f_{\beta}g_{\alpha}.$$

Khi đó  $\Phi \not\equiv 0$ . Bây giờ với mỗi  $z \in \mathbb{A}_R$ , ta có

$$\begin{aligned} \log |\Phi(z)| &= \log |(f_{\alpha}g_{\beta} - f_{\beta}g_{\alpha})(z)| \\ &\leq \log(2 \cdot \max\{|f_{\alpha}(z)g_{\beta}(z)|, |f_{\beta}(z)g_{\alpha}(z)|\}) \\ &= \max\{\log |f_{\alpha}(z)| + \log |g_{\beta}(z)|, \log |f_{\beta}(z)| + \log |g_{\alpha}(z)|\} \\ &\quad + \log 2 \\ &\leq \max\{\log |f_{\alpha}(z)|, \log |f_{\beta}(z)|\} \\ &\quad + \max\{\log |g_{\alpha}(z)|, \log |g_{\beta}(z)|\} + \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log \max\{|f_\alpha(z)|, |f_\beta(z)|\} + \log \max\{|g_\alpha(z)|, |g_\beta(z)|\} + \log 2 \\
&\leq \log \|f(z)\| + \log \|g(z)\| + \log 2.
\end{aligned}$$

Do đó từ Mệnh đề 3.1.1 ta có

$$\begin{aligned}
N_0\left(\rho, \frac{1}{\Phi}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\Phi(\rho e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\Phi(\rho^{-1} e^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(\rho e^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(\rho^{-1} e^{i\theta})\| d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|g(\rho e^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|g(\rho^{-1} e^{i\theta})\| d\theta + O(1) \\
&= T_f(\rho) + T_g(\rho) + O(1) = T(\rho) + O(1), \tag{3.21}
\end{aligned}$$

với mỗi  $\rho : 1 < \rho < R$ , trong đó  $T(\rho) = T_f(\rho) + T_g(\rho)$ .

Gọi  $Q_j, 1 \leq j \leq q$  là các đa thức thuần nhất bậc  $d_j$  xác định  $D_j$  trong  $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ . Đối với bất kỳ  $j = 1, 2, \dots, q$ , ta đặt  $Q_j^* = Q_j^{d_{\mathcal{D}}/d_j}$  khi đó  $Q_1^*, \dots, Q_q^*$  là các đa thức cùng bậc  $d_{\mathcal{D}}$ . Gọi  $D_j^*$  là siêu mặt xác định bởi  $Q_j^*$  với  $j = 1, \dots, q$ . Chú ý rằng ta luôn có thể giả thiết

$$q \geq n_{\mathcal{D}} + 1. \tag{3.22}$$

Do đó, áp dụng Định lý 3.2.1 đối với ánh xạ  $f : \mathbb{A}_R \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và các siêu mặt  $D_j^*, j = 1, \dots, q$ , ta có

$$\left\| \left( q - \frac{(n_{\mathcal{D}} + 1)(2N - n + 1)}{n + 1} \right) T_f(\rho) \right\| \leq \frac{1}{d_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q N_f^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) + O_f(\rho).$$

Tương tự đối với ánh xạ  $g$ , ta có

$$\left\| \left( q - \frac{(n_{\mathcal{D}} + 1)(2N - n + 1)}{n + 1} \right) T_g(\rho) \right\| \leq \frac{1}{d_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q N_g^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) + O_g(\rho).$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta thu được

$$\begin{aligned} & \parallel \left( q - \frac{(n_{\mathcal{D}} + 1)(2N - n + 1)}{n + 1} \right) T(\rho) \\ & \leq \frac{1}{d_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q \left( N_f^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) + N_g^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) \right) + o(T(\rho)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Đối với bất kỳ  $j = 1, \dots, q$ , ta thấy

$$\begin{aligned} N_f^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) &= N_{f, \leq k_j}^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) + N_{f, \geq k_j+1}^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) \\ &\leq N_{f, \leq k_j}^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) + \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} N_{f, \geq k_j+1}(\rho, D_j^*) \\ &\leq N_{f, \leq k_j}^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) + \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} \left( N_f(\rho, D_j^*) - N_{f, \leq k_j}^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) \right) \\ &= \left( 1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} \right) N_{f, \leq k_j}^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) + \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} N_f(\rho, D_j^*) \\ &\leq n_{\mathcal{D}} \left( 1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} \right) N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) + \frac{n_{\mathcal{D}} d_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} T_f(\rho) + o(T_f(\rho)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Tương tự đối với ánh xạ  $g$  ta có

$$N_g^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) \leq n_{\mathcal{D}} \left( 1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} \right) N_{g, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) + \frac{n_{\mathcal{D}} d_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} T_g(\rho) + o(T_g(\rho)). \quad (3.25)$$

Kết hợp (3.24) và (3.25), ta có

$$\begin{aligned} & N_f^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) + N_g^{n_{\mathcal{D}}}(\rho, D_j^*) \\ & \leq n_{\mathcal{D}} \left( 1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} \right) \left( N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) + N_{g, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) \right) \\ & \quad + \frac{n_{\mathcal{D}} d_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} T(\rho) + o(T(\rho)). \end{aligned}$$

Vì vậy, theo bất đẳng thức (3.23), ta có

$$\begin{aligned} & \parallel \left( q - \frac{(n_{\mathcal{D}} + 1)(2N - n + 1)}{n + 1} \right) T(\rho) \\ & \leq \frac{n_{\mathcal{D}}}{d_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q \left( 1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1} \right) \left( N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) + N_{g, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) \right) \end{aligned}$$

$$+ n_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{k_j + 1} T(\rho) + o(T(\rho)). \quad (3.26)$$

Từ giả thiết  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_q \geq n_{\mathcal{D}}$ , ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1}\right) N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) \\ &= \left(1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_1 + 1}\right) N_{f, \leq k_1}^1(\rho, D_1^*) + \sum_{j=2}^q \left(1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1}\right) N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) \\ &\leq \left(1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_1 + 1}\right) N_{f, \leq k_1}^1(\rho, D_1^*) + \sum_{j=2}^q \left(1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_2 + 1}\right) N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) \\ &= \left(\frac{n_{\mathcal{D}}}{k_2 + 1} - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_1 + 1}\right) N_{f, \leq k_1}^1(\rho, D_1^*) + \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_2 + 1}\right) N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) \\ &= \left(\frac{n_{\mathcal{D}}}{k_2 + 1} - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_1 + 1}\right) d_{\mathcal{D}} T_f(\rho) + \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_2 + 1}\right) N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) + O(1). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tương tự đối với ánh xạ  $g$ , ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_j + 1}\right) N_{g, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) \\ &= \left(\frac{n_{\mathcal{D}}}{k_2 + 1} - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_1 + 1}\right) d_{\mathcal{D}} T_g(\rho) + \sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_2 + 1}\right) N_{g, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) + O(1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Kết hợp các bất đẳng thức (3.26), (3.27) và (3.28) ta có

$$\begin{aligned} & \left\| \left( q - \frac{(n_{\mathcal{D}} + 1)(2N - n + 1)}{n + 1} \right) T(\rho) \right. \\ & \leq n_{\mathcal{D}}^2 \left( \frac{1}{k_2 + 1} - \frac{1}{k_1 + 1} \right) T(\rho) + n_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{k_j + 1} T(\rho) \\ & \quad + \frac{n_{\mathcal{D}}}{d_{\mathcal{D}}} \left( 1 - \frac{n_{\mathcal{D}}}{k_2 + 1} \right) \sum_{j=1}^q \left( N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) + N_{g, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) \right) \\ & \quad \left. + o(T(\rho)). \right. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ta thấy rằng, nếu  $z_0 \in \mathbb{A}_R$  là không điểm bội  $\alpha \leq k_j$  của  $Q_j^*(f)$ , thì  $z_0$  cũng là không điểm bội  $\alpha d_j/d_{\mathcal{D}} \leq k_j$  của  $Q_j(f)$ . Do  $f(z) = g(z)$  với  $z \in \bigcup_{j=1}^q \{z \in \mathbb{A}_R : 0 < \nu_{(f,D_j)}(z) \leq k_j\}$ , ta suy ra  $g(z_0) = f(z_0)$ , bởi vậy

$$f_{\alpha}(z_0)g_{\beta}(z_0) = f_{\beta}(z_0)g_{\alpha}(z_0),$$

tức là  $z_0$  là không điểm của hàm  $\Phi$ . Nếu  $z_0 \in \mathbb{A}_R$  là không điểm bội  $\beta \leq k_j$  của  $Q_j^*(g)$ , thì  $z_0$  sẽ là không điểm bội  $\beta d_j/d_{\mathcal{D}} \leq k_j$  của  $Q_j(g)$ , vì  $\nu_{(f,D_j), \leq k_j}^1 = \nu_{(g,D_j), \leq k_j}^1$ , ta có  $z_0$  là không điểm bội  $\leq k_j$  của  $Q_j(f)$ . Do đó, theo lập luận trên ta có  $z_0$  là không điểm của hàm  $\Phi$ . Theo giả thiết  $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ , ta có  $\overline{E}_g(D_i) \cap \overline{E}_g(D_j) = \emptyset$  đối với bất kỳ cặp  $i \neq j \in \{1, \dots, q\}$ , do đó  $z_0$  sẽ không là không điểm của bất cứ hàm  $Q_i(f)$  và  $Q_i(g)$  với mọi  $i \in \{1, \dots, q\}$  và  $i \neq j$ . Điều này ta thu được

$$\sum_{j=1}^q N_{f, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) + \sum_{j=1}^q N_{g, \leq k_j}^1(\rho, D_j^*) \leq 2N_0 \left( \rho, \frac{1}{\Phi} \right). \quad (3.30)$$

Do đó từ (3.21) ta thu được

$$\sum_{j=1}^q \left( N_{f, \leq k_j}^1(r, D_j^*) + N_{g, \leq k_j}^1(r, D_j^*) \right) \leq 2d_{\mathcal{D}}T(\rho) + O(1).$$

Như vậy, từ (3.29) ta có

$$\begin{aligned} & \parallel \left( q - \frac{(n_{\mathcal{D}} + 1)(2N - n + 1)}{n + 1} \right) T(\rho) \\ & \leq 2n_{\mathcal{D}}T(\rho) - n_{\mathcal{D}}^2 \left( \frac{1}{k_2 + 1} + \frac{1}{k_1 + 1} \right) T(\rho) + n_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{k_j + 1} T(\rho) + o(T(\rho)). \end{aligned}$$

Điều này ta thu được

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=3}^q \frac{k_j}{k_j + 1} - \frac{qn_{\mathcal{D}} - q}{n_{\mathcal{D}}} - \frac{(n_{\mathcal{D}} + 1)(2N - n + 1)}{(n + 1)n_{\mathcal{D}}} \right. \\ & \quad \left. + (n_{\mathcal{D}} - 1) \left( \frac{1}{k_2 + 1} + \frac{1}{k_1 + 1} \right) \right) T(\rho) \leq o(T_f(\rho)). \end{aligned}$$

Đây chính là điều mâu thuẫn. Định lý 3.2.2 được chứng minh.  $\square$

## Kết luận Chương 3

Trong chương này chúng tôi đã phát biểu và chứng minh dạng định lý cơ bản thứ hai, trên cơ sở đó chứng minh duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên liên quan đến bội các không điểm của đường cong kết hợp với các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát. Các kết quả chính trong chương này viết dựa trên bài báo số [PC1] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Trong chương này chúng tôi đã thu được một số nội dung nghiên cứu sau:

1. Giới thiệu một số kiến thức cơ bản về phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.
2. Phát biểu và chứng minh dạng Định lý cơ bản thứ hai (Định lý 3.2.1) cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát.
3. Phát biểu và chứng minh dạng Định lý duy nhất (Định lý 3.2.2) cho siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát - điều kiện đại số có liên quan đến bội của các không điểm để hai đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên là trùng nhau.

## Kết luận chung

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu một số dạng định lý duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình trên mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$  hay trên hình vành khuyên chia sẻ các siêu mặt. Các kết quả trong luận án này được công bố trên bài báo số [AC1], [AC2], [PAC1] và [PC1] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

### Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Thiết lập hai dạng định lý duy nhất cho  $L$ -hàm và hàm phân hình là các điều kiện đại số liên quan đến giá trị khuyết tại  $\infty$  (Định lý 1.2.1) và liên quan đến đạo hàm của các hàm phân hình (Định lý 1.3.1).
2. Xây dựng hai điều kiện đại số để hai đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1 chia sẻ hai siêu mặt (Định lý 2.2.3) và chia sẻ một siêu mặt (Định lý 2.2.4) là trùng nhau. Từ đó chỉ ra sự tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất cho lớp đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1.
3. Trên cơ sở chứng minh dạng Định lý cơ bản thứ hai (Định lý 3.2.1), đưa ra định lý mới về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát (Định lý 3.2.2) với điều kiện đại số liên quan đến bội của không điểm.

### Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo:

1. Nghiên cứu một số dạng Định lý duy nhất mới các hàm phân hình với điều kiện đại số liên quan đến giá trị khuyết tại các cực điểm.
2. Tiếp tục nghiên cứu các dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt hoặc rút gọn và sử dụng các kết quả về các dạng định lý này để nghiên cứu vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình. Xây dựng một số dạng siêu mặt xác định duy nhất các đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

## Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án

- AC1. [6] An V. H., Chanthaphone P. (2024), Uniqueness of  $L$ -functions sharing finite sets with meromorphic functions having Deficient Poles, *Thang Long Journal of Science - Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 3, No. 2, pp. 1-15.
- AC2. [7] An V. H., Chanthaphone P. (2024), Value distribution of  $L$ -functions and meromorphic functions sharing finite sets, *South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 20, No. 3, pp. 147-164.
- PAC1. [43] Phuong H. T., An V. H., Chanthaphone P. (2025), Uniqueness problem for level-1 linearly non-degenerate holomorphic mappings concerning hypersurfaces, *Complex Analysis and Operator Theory*, Vol. 19, Article number 88.
- PC1. [44] Phuong H. T., Chanthaphone P. (2025), A uniqueness theorem related multiple values for holomorphic curves on annuli sharing hypersurfaces in subgeneral position, *Filomat*, Vol. 39, No. 20, pp. 6873-6885.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Ahlfors L. (1941), The theory of meromorphic curves, *Acta Societatis Scientiarum Fennicae Nova Series. A*, Vol. 3, No. 4, pp. 1-31.
- [2] Aihara Y. (2000), Unicity theorems for meromorphic mappings with deficiencies, *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, Vol. 42, Issue 3, pp. 259-268.
- [3] An D. P., Quang S. D., Thai D. D. (2013), The second main theorem for meromorphic mappings into a complex projective space, *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol. 38, No. 1, pp. 187-205.
- [4] An T. T. H., Phuong H. T. (2009), An explicit estimate on multiplicity truncation in the Second Main Theorem for holomorphic curves encountering hypersurfaces in general position in projective space, *Houston Journal of Mathematics*, Vol. 35, No. 3, pp. 775-786.
- [5] An V. H., Chanthaphone P. (2024), On uniqueness of meromorphic functions ignoring multiplicity concerning a question of Yi, *South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 20, No. 1, pp. 99-114.
- [6] An V. H., Chanthaphone P. (2024), Uniqueness of  $L$ -functions sharing finite sets with meromorphic functions having Deficient Poles, *Thang Long Journal of Science - Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 3, No. 2, pp. 1-15.
- [7] An V. H., Chanthaphone P. (2024), Value distribution of  $L$ -functions and meromorphic functions sharing finite sets, *South East Asian Jour-*

*nal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 20, No. 3, pp. 147-164.

- [8] An V. H., Duc T. D. (2011), Uniqueness theorems and uniqueness polynomials for holomorphic curves, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 56, Issue 1-4, pp. 253-262.
- [9] Banerjee A., Kundu A. (2023), On uniqueness of  $L$ -functions in terms of zeros of strong uniqueness polynomial, *Cubo, A Mathematical Journal*, Vol. 25, No. 3, pp. 497-514.
- [10] Cao T.-B., Yi H.-X. (2011), Uniqueness theorems for meromorphic mappings sharing hyperplanes in general position, *Scientia Sinica Mathematica*, Vol. 41, Issue 2, pp. 135-144.
- [11] Cartan H. (1933), Sur les zéros des combinaisons linéaires de  $p$  fonctions holomorphes données, *Mathematica (Cluj)*, Vol. 7, pp. 5-31.
- [12] Dethloff G., Tan T. V. (2011), A uniqueness theorem for meromorphic maps with moving hypersurfaces, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, Vol. 78, Issue 2, pp. 347-357.
- [13] Frank G., Reinders M. (1998), A unique range set for meromorphic functions with 11 elements, *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, Vol. 37, Issue 1-4, pp. 185-193.
- [14] Fujimoto H. (1975), The Uniqueness problem of meromorphic maps into the complex projective space, *Nagoya Mathematical Journal*, Vol. 58, pp. 1-23.
- [15] Fujimoto H. (1985), Non-integrated defect relation for meromorphic maps of complete Kähler manifolds into  $\mathbb{P}^{N_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathbb{P}^{N_k}(\mathbb{C})$ ,

- Japanese Journal of Mathematics. New series*, Vol. 11, Issue 2, pp. 233-264.
- [16] Fujimoto H. (1998), Uniqueness problem with truncated multiplicities in value distribution theory, *Nagoya Mathematical Journal*, Vol. 152, pp. 131-152.
  - [17] Fujimoto H. (2000), On uniqueness of meromorphic functions sharing finite sets, *American Journal of Mathematics*, Vol. 122, No. 6, pp. 1175-1203.
  - [18] Fujimoto H. (2003), On uniqueness polynomials for meromorphic functions, *Nagoya Mathematical Journal*, Vol. 170, pp. 33-46.
  - [19] Goldberg A. A., Ostrovskii I. V. (2008), Value Distribution of Meromorphic Functions, *Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Rhode Island*, Vol. 236.
  - [20] Griffiths P. A. (1972), Holomorphic mappings: Survey of some results and discussion of open problems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 78, pp. 374-382.
  - [21] Gross F. (1977), Factorization of meromorphic functions and some open problems: in Complex Analysis (2006) (Proc. Conf. Univ. Kentucky, 1976): Lecture Notes in Mathematics, *Springer-Verlag, Berlin*, Vol. 599, pp. 51-69.
  - [22] Hayman W. K. (1964), Meromorphic Functions, *Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford*.
  - [23] Kaczorowski J., Molteni G., Perelli A. (2006), Linear independence of  $L$ -functions, *Forum Mathematicum*, Vol. 18, Issue 1, pp. 1-7.

- [24] Khoai. H. H. (1983), On  $p$ -adic meromorphic functions, *Duke Mathematical Journal*, Vol. 50, No. 3, pp. 695-711.
- [25] Khoai H. H., An V. H. (2022), Determining an  $L$ -function in the extended Selberg class by its preimages of subsets, *The Ramanujan Journal*, Vol. 58, No. 1, pp. 253-267.
- [26] Khoai H. H., An V. H., Hoa P. N. (2017), On functional equations for meromorphic functions and applications, *Archiv der Mathematik*, Vol. 109, No. 6, pp. 539-549.
- [27] Khoai H. H., An V. H., Lai N. X. (2018), Strong uniqueness polynomials of degree 6 and unique range sets for powers of meromorphic functions, *International Journal of Mathematics*, Vol. 29, No. 5, pp. 122-140.
- [28] Khoai H. H., An V. H., Ninh L. Q. (2014), Uniqueness theorems for holomorphic curves with hypersurfaces of fermat-Waring type, *Complex Analysis and Operator Theory*, Vol. 8, Issue 8, pp. 1747-1759.
- [29] Khoai H. H., An V. H., Ninh L. Q. (2021), Value-sharing and uniqueness for  $L$ -functions, *Annales Polonici Mathematici*, Vol. 126, No. 3, pp. 265-278.
- [30] Khoai H. H., An V. H., Ninh L. Q. (2022), Uniqueness of holomorphic mappings concerning a question of gross, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 67, Issue 7, pp. 1698-1711.
- [31] Khoai H. H., An V. H., Phuong N. D. (2023), On value distribution of  $L$ -functions sharing finite sets with meromorphic functions, *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, Tome 66(114), No. 3, pp. 265-280.

- [32] Khrystiyanyan A. Y., Kondratyuk A. A. (2005), On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on Annuli. I, *Matematychni Studii*, Vol. 23, No. 1, pp. 19-30.
- [33] Khrystiyanyan A. Y., Kondratyuk A. A. (2005), On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on Annuli. II, *Matematychni Studii*, Vol. 24, No. 2, pp. 57-68.
- [34] Li X.-M., Yi H.-X. (2004), Meromorphic functions sharing three values, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Vol. 56, No. 1, pp. 147-167.
- [35] Lin P., Lin W. (2016), Value distribution of  $L$ -functions concerning sharing sets, *Filomat*, Vol. 30, Issue 14, pp. 3795-3806.
- [36] Masuda K., Noguchi J. (1996), A construction of hyperbolic hypersurface of  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ , *Mathematische Annalen*, Vol. 304, Issue 2, pp. 339-362.
- [37] Nevanlinna R. (1925), Zur Theorie der meromorphen Funktionen, *Acta Mathematica*, Vol. 46, Issue 1-2, pp. 1-99.
- [38] Nevanlinna R. (1926), Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen, *Acta Mathematica*, Vol. 48, Issue 3-4, pp. 367-391.
- [39] Pakovich F. (2008), On polynomials sharing preimages of compact sets, and related questions, *Geometric and Functional Analysis*, Vol. 18, Issue 1, pp. 163-183.
- [40] Phuong H. T. (2009), On unique range sets for holomorphic maps sharing hypersurfaces without counting multiplicity, *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol. 34, No. 3, pp. 351-360.

- [41] Phuong H. T. (2011), On Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing hypersurfaces without counting multiplicity, *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 63, No. 4, pp. 556-565.
- [42] Phuong H. T. (2013), Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing moving hypersurfaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 58, Issue 11, pp. 1481-1491.
- [43] Phuong H. T., An V. H., Chanthaphone P. (2025), Uniqueness problem for level-1 linearly non-degenerate holomorphic mappings concerning hypersurfaces, *Complex Analysis and Operator Theory*, Vol. 19, Article number 88.
- [44] Phuong H. T., Chanthaphone P. (2025), A uniqueness theorem related multiple values for holomorphic curves on annuli sharing hypersurfaces in subgeneral position, *Filomat*, Vol. 39, No. 20, pp. 6873-6885.
- [45] Phuong H. T., Minh T. H. (2013), A uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing  $2n + 3$  hyperplanes, *VietNam Journal Mathematics*, Vol. 41, No. 2, pp. 167-179.
- [46] Phuong H. T., Padaphet I. (2024), A uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 69, Issue 9, pp. 1558-1577.
- [47] Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2021), Some uniqueness theorems for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 66, Issue. 1, pp. 22-34.
- [48] Ru M. (2001), A uniqueness theorem with moving targets without counting multiplicity, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 129, No. 9, pp. 2701-2707.

- [49] Ru M. (2004), A defect relation for holomorphic curves intersecting hypersurfaces, *American Journal of Mathematics*, Vol. 126, No. 1, pp. 215-226.
- [50] Sahoo P., Halder S. (2020), Results on  $L$ -functions and certain uniqueness questions of Gross, *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. 60, Issue 6, pp. 80-91.
- [51] Shirosaki M. (2000), A hypersurface which determines linearly non-degenerate holomorphic mappings, *Kodai Mathematical Journal*, Vol. 23, Issue 1, pp. 105-107.
- [52] Siu Y.-T., Yeung S.-K. (1997), Defects for ample divisors of Abelian varieties, Schwarz lemma, and Hyperbolic hypersurfaces of low degrees, *American Journal of Mathematics*, Vol. 119, No. 5, pp. 1139-1172.
- [53] Smiley L. (1983), Geometric conditions for unicity of holomorphic curves, *Contemporary Mathematics*, Vol. 25, pp. 149-154.
- [54] Steuding J. (2007), Value-Distribution of  $L$ -functions: Lecture Notes in Mathematics, *Springer-Verlag, Berlin*, Vol. 1877.
- [55] Tan T. V. (2005), Uniqueness polynomials for entire curves into complex projective space, *Analysis*, Vol. 25, Issue. 4, pp. 297-314.
- [56] Thiem L. V. (1949), Über das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre, *Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 23, pp. 26-49.
- [57] Waerden. B. L. (1991), Algebra, *Springer-Verlag, New York*, Vol. 2.
- [58] Yan Q., Chen Z. (2006), A note on the uniqueness theorem of meromorphic mappings, *Science in China Series A Mathematics*, Vol. 49, No. 3, pp. 360-365.

- [59] Yang C.-C., Yi H.-X. (2003), Uniqueness theory of meromorphic functions: Mathematics and Its Applications, *Science Press/Kluwer Academic Publishers, London*, Vol. 557.
- [60] Yi H.-X. (1990), Uniqueness of meromorphic functions and a question of C. C. Yang, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 14, Issue 1, pp. 169-176.
- [61] Yi H.-X. (1996), Unicity theorems for meromorphic or entire functions III, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Vol. 53, Issue 1, pp. 71-82.
- [62] Yuan Q.-Q., Li X.-M., Yi H.-X. (2018), Value distribution of  $L$ -functions and uniqueness questions of F. Gross, *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. 58, Issue 3, pp. 249-262.
- [63] Zhang J.-L., Yang L.-Z. (2007), Some results related to a conjecture of R.Brück, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 8, Issue 1, Article number 18.

Thái Nguyên, ngày 02 tháng 4 năm 2026

**BÁO CÁO VỀ VIỆC BỔ SUNG, SỬA CHỮA LUẬN ÁN TIẾN SĨ THEO  
NGHỊ QUYẾT CỦA HỘI ĐỒNG ĐÁNH GIÁ LUẬN ÁN CẤP TRƯỜNG**

Của nghiên cứu sinh: Phommavong Chanthaphone.

Đề tài: Vấn đề duy nhất đối với  $L$ -hàm và đường cong chỉnh hình.

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 9.46.01.02.

Người hướng dẫn: TS. Vũ Hoài An và PGS. TS. Hà Trần Phương.

Căn cứ nội dung nghị quyết, Biên bản chi tiết cuộc họp Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ cấp Đại học ngày 27 tháng 03 năm 2026 thành lập theo Quyết định số 438/QĐ-ĐHSP, ngày 30 tháng 01 năm 2026 của Hiệu trưởng Trường Đại học Sư phạm, nghiên cứu sinh đã nghiên cứu những nội dung quyết nghị và kết luận của hội đồng, đối chiếu với nội dung luận án, tôi xin giải trình chi tiết các nội dung sau:

1. Nội dung thứ nhất về:

- Ý kiến của Phản biện 1: Trong tài liệu tham khảo [5], tên tạp chí nên viết rõ là Thang Long J. Sci. Math. Math. Sci. cho phù hợp với cách viết trên MathSciNet.

- Giải trình của NCS: Tác giả đã sửa lại tên tạp chí trong tài liệu tham khảo [5] theo ý kiến của Phản biện 1.

2. Nội dung thứ hai về:

- Ý kiến của Phản biện 2: Lỗi chính tả: “Khảng định” phải sửa thành “Khẳng định”, “Giới thiệu một số kiến thức cơ bản phân bố giá trị ...” nên sửa thành “Giới thiệu một số kiến thức cơ bản về phân bố giá trị ...”, “kiểu bỏ đề Borel” nên sửa thành “Bỏ đề kiểu Borel”, tại trang 21, dòng 4 sửa  $r$  thành  $\rho$ , ...

- Giải trình của NCS: Tác giả đã sửa lại một số lỗi chính tả trong luận án theo ý kiến của Phản biện 2.

3. Nội dung thứ ba về:

- Ý kiến của Phản biện 2: Đồng bộ thuật ngữ: “tập xác định duy nhất” hoặc “tập duy nhất” nên thống nhất.



Đ

- Giải trình của NCS: Tác giả đã sửa lại thuật ngữ: “tập duy nhất” thành “tập xác định duy nhất” để đồng bộ trong luận án theo ý kiến của Phản biện 2.

4. Nội dung thứ tư về:

- Ý kiến của Phản biện 2: Đồng bộ ký hiệu, tên tác giả (tên trước họ sau hay họ trước tên sau).

- Giải trình của NCS: Tác giả đã sửa lại ký hiệu, tên tác giả thành tên trước họ sau để đồng bộ trong luận án theo ý kiến của Phản biện 2.

5. Nội dung thứ năm về:

- Ý kiến của Phản biện 2: Nên có chuyển ý giữa Chương 1 ( $L$ -hàm, đối tượng biến phức 1 chiều) và Chương 2 (Đường cong chỉnh hình nhiều biến). Hiện tại, sự chuyển tiếp còn hơi khiên cưỡng, giống như phép cộng cơ học của 2 hướng nghiên cứu.

- Giải trình của NCS: Tác giả đã sửa lại nội dung trong Chương 1 để chuyển ý giữa Chương 1 ( $L$ -hàm, đối tượng biến phức 1 chiều) và Chương 2 (Đường cong chỉnh hình nhiều biến) theo ý kiến của Phản biện 2.

6. Nội dung thứ sáu về:

- Ý kiến của Ủy viên Hội đồng: Xem lại các ký hiệu ở trang iv ( $D6\uparrow$ - $D9\uparrow$ ) để nhất quán với cách trình bày trong luận án.

- Giải trình của NCS: Tác giả đã sửa lại các ký hiệu ở trang iv để nhất quán với cách trình bày trong luận án theo ý kiến của Ủy viên Hội đồng.

7. Nội dung thứ bảy về:

- Ý kiến của Ủy viên Hội đồng: Ở một số chỗ, tác giả viết các nhận định mang tính khái quát chẳng hạn “... thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước...” (ví dụ, trang 1 ( $D12\downarrow$ ); hoặc đoạn đầu trang 2), nhưng lại chưa nêu cụ thể các nghiên cứu trong nước và cũng chưa kèm theo bất kỳ trích dẫn tài liệu tham khảo nào. Đề nghị tác giả chỉnh sửa theo hướng có dẫn chứng rõ ràng bằng việc bổ sung các công trình liên quan và trích dẫn phù hợp, nhằm tránh diễn đạt mơ hồ.

- Giải trình của NCS: Tác giả đã sửa lại một số chỗ mà tác giả đã viết các nhận định mang tính khái quát, tác giả đã nêu cụ thể các nghiên cứu trong nước và thêm trích dẫn tài liệu tham khảo theo ý kiến của Ủy viên Hội đồng.

8. Nội dung thứ tám về:

- Ý kiến của Ủy viên Hội đồng: Trong phần Mở đầu, khi trình bày các kết quả kinh điển gắn với tên tuổi của các nhà khoa học, tác giả cần bổ sung các tài liệu tham khảo tương ứng. Việc trích dẫn đầy đủ sẽ giúp tăng tính chính xác, khách quan và tránh gây cảm giác mơ hồ cho người đọc.

- Giải trình của NCS: Trong phần Mở đầu, tác giả đã bổ sung thêm các tài liệu tham khảo tương ứng mà liên quan đến các kết quả kinh điển gắn với tên tuổi của các nhà khoa học theo ý kiến của Ủy viên Hội đồng.

#### 9. Nội dung thứ chín về:

- Ý kiến của Ủy viên Hội đồng: Một số ký hiệu thường dùng nên đưa vào danh mục kí hiệu và chữ viết tắt. Chẳng hạn như:  $E_f(a)$ ,  $\text{Re}(\cdot)$ ,  $S(\rho, f)$ ,  $O(\cdot)$ ,  $o(\cdot)$ ,  $\ll$ , ...

- Giải trình của NCS: Tác giả đã thêm một số kí hiệu vào danh mục kí hiệu và chữ viết tắt theo ý kiến của Ủy viên Hội đồng.

#### 10. Nội dung thứ mười về:

- Ý kiến của Ủy viên Hội đồng: Không nên dùng kí hiệu [1]-[4] để chỉ các bài báo trong danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án (ví dụ, ở các trang 11 (D5↓, D12↓, D21↓), trang 12 (D8↓), ...). Đề nghị tác giả thay bằng cách ký hiệu/đánh số riêng cho “Danh mục công trình của tác giả” và rà soát để chỉnh sửa thống nhất tất cả các vị trí khác mắc lỗi tương tự.

- Giải trình của NCS: Tác giả đã sửa lại các ký hiệu [1]-[4] trong danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án thành [AC1], [AC2], [PAC1], [PC1] và chỉnh sửa thống nhất tất cả các vị trí khác mắc lỗi tương tự theo ý kiến của Ủy viên Hội đồng.

#### 11. Nội dung thứ mười một về:

- Ý kiến của Ủy viên Hội đồng: Danh mục tài liệu tham khảo đầy đủ, có chất lượng và cập nhật. Tuy nhiên, cần chỉnh sửa một số lỗi hình thức như: chưa thống nhất cách viết tên tạp chí, thiếu thông tin xuất bản đối với một số sách, và một vài sai khác nhỏ về chuẩn viết tắt (chẳng hạn ở các tài liệu [3], [4], [8], [10], [18], [34], [48], ...).

- Giải trình của NCS: Tác giả đã sửa lại cách viết tên tạp chí để thống nhất trong luận án và tác giả đã thêm thông tin xuất bản đối với một số sách, và một vài sai khác nhỏ về chuẩn viết tắt theo ý kiến của Ủy viên Hội đồng.

Trên đây là toàn bộ các giải trình của nghiên cứu sinh về các nội dung cần bổ sung, sửa chữa theo nghị quyết và Biên bản họp Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ cấp Trường. Nghiên cứu sinh xin trân trọng cảm ơn.

**NGHIÊN CỨU SINH**

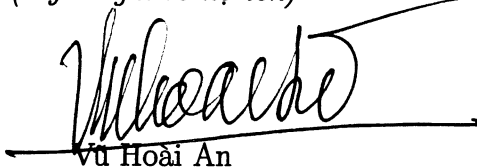
(Ký và ghi rõ họ tên)



Phommavong Chanthaphone

**CÁN BỘ HƯỚNG DẪN 1**

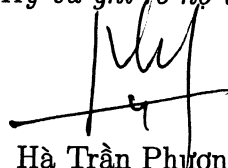
(Ký và ghi rõ họ tên)



Vũ Hoài An

**CÁN BỘ HƯỚNG DẪN 2**

(Ký và ghi rõ họ tên)



Hà Trần Phương

**THƯ KÝ HỘI ĐỒNG**

(Ký và ghi rõ họ tên)



Lê Quang Ninh

**CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG**

(Ký và ghi rõ họ tên)



Hà Huy Khoái

**THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ ĐÀO TẠO**

(Ký, ghi rõ họ tên và đóng dấu)

**HIỆU TRƯỞNG**



PGS.TS. Mai Xuân Trường