

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHOMMAVONG CHANTHAPHONE

VẤN ĐỀ DUY NHẤT ĐỐI VỚI L -HÀM VÀ
ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

Chuyên ngành : Toán Giải tích

Mã số : 9.46.01.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2026

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: 1. TS. Vũ Hoài An
2. PGS.TS. Hà Trần Phương

Phản biện 1: PGS. TS. Vũ Thế Khôi

Phản biện 2: PGS. TS. Trần Nguyên An

Phản biện 3: PGS. TS. Phạm Hiến Bằng

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường
hợp tại: Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Vào hồi 8 giờ 30 phút, ngày 27 tháng 03 năm 2026

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia
- Trung tâm số - Đại học Thái Nguyên
- Thư viện Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Vào những năm 20 của thế kỷ XX, Nevanlinna R. ([37]) đã xây dựng lý thuyết phân bố giá trị cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ mà ngày nay được gọi là lý thuyết Nevanlinna. Với nội dung cốt lõi là hai định lý cơ bản, lý thuyết được đánh giá là một trong những thành tựu sâu sắc và đẹp đẽ nhất của toán học thế kỷ XX và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau. Song song với việc phát triển lý thuyết cho các hàm, năm 1933, Cartan H. ([11]) đã xây dựng lý thuyết Nevanlinna chiều cao, tức là xem xét phân bố giá trị cho các ánh xạ chỉnh hình phức và cùng với lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình, hướng nghiên cứu này nhanh chóng đã thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước, có nhiều công trình quan trọng được công bố gắn với tên của các nhà toán học lớn: Thiem L. V. ([56]), Khoai H. H. ([24]), Ahlfors L. ([1]), Griffiths Ph. ([20]), ...

Một trong những ứng dụng nổi bật và phong phú nhất của lý thuyết phân bố giá trị là các vấn đề duy nhất cho hàm phân hình hay đường cong chỉnh hình, tức là tìm điều kiện về tôpô, hình học, đại số, ... để hai hàm phân hình hoặc hai ánh xạ chỉnh hình là đồng nhất hoặc liên kết với nhau khi chúng chia sẻ đủ số lượng giá trị hoặc siêu mặt. Theo hướng nghiên cứu này, năm 1926, Nevanlinna R. ([38]) đã chứng minh Định lý 5 điểm nổi tiếng *hai hàm phân hình khác hằng là đồng nhất nếu chúng có cùng*

ảnh ngược không tính bội, của 5 điểm phân biệt. Năm 1975, Fujimoto H. ([14]) đã mở rộng định lý này cho đường cong chẵn hình. Các công trình này của Nevanlinna R. ([38]) và Fujimoto H. ([14]) được xem như khởi nguồn của hướng nghiên cứu và ngày càng thu hút được sự quan tâm phát triển của nhiều tác giả trong và ngoài nước, có nhiều công trình được công bố: Khoai H. H., An V. H., Ninh L. Q. ([28], [30]), Phuong H. T. ([40], [41], [42]), Smiley L. ([53]), Gross F. ([21]), Aihara Y. ([2]), Trong thời gian gần đây, các nghiên cứu về vấn đề duy nhất tập trung vào hai chủ đề chính:

1. Xây dựng các điều kiện đại số để hai hàm phân hình hoặc ánh xạ chẵn hình là trùng nhau hoặc biểu thị qua nhau. Từ đó xây dựng các tập xác định duy nhất cho hàm với số phần tử ít nhất có thể, siêu mặt xác định duy nhất cho ánh xạ chẵn hình với bậc thấp nhất có thể, trong các trường hợp tính bội, không tính bội, tính bội cắt cụt, tính bội với trọng số, . . .

2. Thiết lập các đặc trưng của tập xác định duy nhất cho các hàm hay họ các siêu phẳng, siêu mặt xác định duy nhất cho các ánh xạ.

Trong luận án này chúng tôi tập trung vào chủ đề nghiên cứu thứ nhất cho hàm phân hình và đường cong chẵn hình. Cụ thể chúng tôi sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Xây dựng các điều kiện đại số để L -hàm và hàm phân hình là trùng nhau hoặc biểu thị tuyến tính qua nhau, từ đó xây dựng các tập xác định duy nhất cho hàm với số phần tử ít nhất có thể.

2. Xây dựng một số điều kiện đại số liên quan đến siêu mặt để hai đường cong chẵn hình trùng nhau hoặc biểu thị qua nhau.

Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ta kí hiệu $E_f(a)$ là tập các không điểm của $f - a$ ở đó mỗi không điểm được tính với bội của nó, $\overline{E}_f(a)$ là tập các không điểm của $f - a$ mà ở đó mỗi không

điểm được tính một lần. Với $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{C}$, ta định nghĩa:

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} E_f(a), \quad \overline{E}_f(S) = \bigcup_{a \in S} \overline{E}_f(a).$$

Theo hướng nghiên cứu thứ nhất, phát triển công trình của Nevanlinna R., năm 1977, Gross F. đưa ra ý tưởng là không xét ảnh ngược của các điểm riêng rẽ mà xét ảnh ngược của tập hợp điểm S của $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Vấn đề Gross. *i) Tồn tại hay không tập S để với bất kỳ các hàm phân hình khác hằng f, g thỏa mãn điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ ta có $f = g$?*

ii) Tồn tại hay không hai tập $S_i, i = 1, 2$ sao cho với hai hàm phân hình khác hằng bất kỳ f, g , thỏa mãn $E_f(S_i) = E_g(S_i), i = 1, 2$ ta có $f = g$?

Tập S thỏa mãn (i) được gọi là tập xác định duy nhất, các tập S_1, S_2 trong (ii) được gọi là các tập song xác định duy nhất cho các hàm phân hình kể cả bội. Yi H.-X. (xem [59], [61]) là người đầu tiên đưa ra câu trả lời cho Vấn đề Gross, từ đó các kết quả đạt được theo hướng nghiên cứu này là rất phong phú và sâu sắc (xem [59], [61], [17], [18], [13], [29], [25], [31], ...) cho các đối tượng hàm khác nhau: hàm phân hình, hàm nguyên, L -hàm là công cụ quan trọng trong nghiên cứu lí thuyết số. Từ đây và sự tương tự giữa số học trên trường số và số học trên trường hàm - một ứng dụng của lí thuyết phân bố giá trị đã dẫn đến ... trong vài năm gần đây, vấn đề này đã được nghiên cứu cho lớp các L -hàm. Cụ thể, năm 2018, Yuan Q.-Q., Li X.-M. và Yi H.-X. ([62]) đã chỉ ra sự tồn tại tập S gồm 7 phần tử, sao cho nếu $E_f(S) = E_L(S)$ thì $f = L$, trong đó f là hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm, L là L -hàm. Đây là câu trả lời cho Vấn đề Gross đối với trường hợp L -hàm và hàm phân hình có hữu hạn cực điểm.

Cho $n, m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Kí hiệu

$$Q_K(z) = (n + m + 1) \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^i}{n + m + 1 - i} z^{n+m+1-i} a^i \right). \quad (1)$$

Năm 2023 Khoai H. H., An V. H. và Phuong N. D. ([31], Định lý 1, trang 267) đã chứng minh:

Định lý 1. *Giả sử $Q_K(z)$ xác định như (1) thỏa mãn $Q_K(a) \neq -1, -2$. Đặt $P_K(z) = Q_K(z) + 1$ và đặt $S_K = \{z \mid P_K(z) = 0\}$. Khi đó, nếu $n \geq 2$, $m \geq 2$, $n + m \geq 8$, thì điều kiện $E_f(S_K) = E_L(S_K)$, kéo theo $f = L$ với mọi hàm phân hình khác hằng f và L -hàm khác hằng L .*

Kết quả này cũng là câu trả lời cho Vấn đề Gross cho trường hợp L -hàm và hàm phân hình.

Đa thức $P(z)$ được gọi là *đa thức duy nhất (duy nhất mạnh) đối với hàm phân hình (nguyên)* nếu hai hàm phân hình (nguyên) khác hằng tùy ý f và g , thỏa mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ ($P(f) = cP(g)$, trong đó c là hằng số khác không) và kéo theo $f = g$.

Xét đa thức $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ bậc q có dạng

$$P(z) = a(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_q). \quad (2)$$

Giả sử đạo hàm của $P(z)$ có biểu diễn

$$P'(z) = aq(z - d_1)^{q_1}(z - d_2)^{q_2} \dots (z - d_k)^{q_k}, \quad a \neq 0,$$

trong đó $d_1, d_2, \dots, d_k$ là các số phức phân biệt. Khi đó số k được gọi là *chỉ số đạo hàm* của $P(z)$. Giả sử rằng

$$P(d_i) \neq 0 \text{ đối với } 1 \leq i \leq k. \quad (3)$$

Chúng ta nhắc lại một điều kiện sau giới thiệu bởi Fujimoto (xem [18]):

$$P(d_i) \neq P(d_j) \text{ đối với } 1 \leq i < j \leq k, \quad k \geq 2. \quad (F)$$

Năm 2023 Banerjee A. và Kundu A. ([9], Định lý 3.4, trang 502) đã chứng minh:

Định lý 2. *Cho đa thức duy nhất mạnh $P(z)$ được xác định như trong (2) với các điều kiện (3) và (F), và $S = \{z : P(z) = 0\}$. Cho f là hàm phân hình khác hằng, L là L -hàm. Nếu $\min\{q_1, q_2\} \geq 2$ khi $k = 2$ và $q \geq 2k + 4$ và $E_f(S, 2) = E_L(S, 2)$, thì ta có $f = L$.*

Chú ý rằng, nếu $E_f(S) = E_L(S)$ thì $E_f(S, 2) = E_L(S, 2)$. Khi đó, áp dụng Định lý 2 với $k = 2$ và $q \geq 8$, ta thu được Định lý 1.

Trong luận án này chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu các điều kiện đại số cho L -hàm và hàm phân hình để tìm ra một tập xác định duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình với số phần tử ít nhất có thể.

Một hướng nghiên cứu nữa đối với vấn đề duy nhất là tìm các tập S, T sao cho với các hàm phân hình f, g tùy ý, điều kiện $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(T)$ hoặc $E_f(S) = E_g(T)$, kéo theo $f = g$ hoặc f và g biểu thị qua nhau. Pakovich F. ([39]) đã chứng minh kết quả đầu tiên cho trường hợp S, T là các tập con compact và f, g là các đa thức. Trong [26], Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. đã xem xét vấn đề này trong trường hợp $E_f(S) = E_g(T)$, f, g là hai hàm phân hình khác hằng và $S, T \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ lần lượt là tập nghiệm của các đa thức

$$P(z) = z^n + az^{n-m} + b, \quad Q(z) = z^n + a'z^{n-m} + b',$$

trong đó $n \geq 2m + 9$, hoặc $m \geq 4$, hoặc $(n, m) = 1$ khi $m \geq 2$. Trong luận án này chúng tôi sẽ nghiên cứu các vấn đề tương tự các kết quả của Pakovich F. và Khoai H. H., An V. H., Hoa P. N. cho trường hợp các ánh xạ chỉnh hình.

Theo hướng nghiên cứu thứ hai, như đã nói ở trên, năm 1975, Fujimoto H. (xem [15]) đã mở rộng định lý này cho đường cong chỉnh hình, ông đã chứng minh rằng các ánh xạ chỉnh hình không suy biến từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

được xác định duy nhất bởi $3n + 2$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát khi tính cả bội các không điểm. Năm 1983, Smiley L. ([53]) đã cải tiến kết quả này bằng cách bỏ qua bội các không điểm. Sau đó, vấn đề này đã được nghiên cứu sâu rộng bởi nhiều tác giả: Fujimoto H. ([16]), Ru M. ([48]), Yan Q. và Chen Z. ([58]), Dethloff G. và Tan T. V. ([12]), An D. P., Quang S. D. và Thai D. D. ([3]), Phuong H. T. và Minh T. H. ([45]), Phuong H. T. và Vilaisavanh L. ([47]), Aihara Y. ([2]), Cao T.-B. và Yi H.-X. ([10]) và nhiều tác giả khác cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}$ hay hình vành khuyên trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ vào không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hay đa tạp đại số trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, với mục tiêu là các siêu phẳng hay siêu mặt, cố định hay di động.

Cho $f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là đường cong chỉnh hình, trong đó $f_0, \dots, f_n$ là các hàm phân hình không có không điểm bội trên $\mathbb{C}^m$. Gọi D là siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và Q là đa thức thuần nhất bậc d xác định D trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$. Giả sử

$$Q(z_0, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \dots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó $n_d = \binom{n+d}{n} - 1$ và $i_{k0} + \dots + i_{kn} = d$ với $k = 0, \dots, n_d$. Ta viết

$$(f, D) = Q(f) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k f_0^{i_{k0}} \dots f_n^{i_{kn}}.$$

Ta nói rằng (f, D) là tự do nếu $(f, D) \not\equiv 0$.

Đối với giả thiết (f, D) là tự do, ta ký hiệu $\nu_{(f,D)}$ là ánh xạ từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{Z}$, trong đó $\nu_{(f,D)}(z)$ ($z \in \mathbb{C}^m$) là bội không điểm của (f, D) tại z . Đối với các số nguyên dương d, k , ta đặt

$$\nu_{(f,D), \leq k}^d = \begin{cases} \min\{d, \nu_{(f,D)}\} & \text{nếu } 0 < \nu_{(f,D)} \leq k, \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Bây giờ, ta giả sử $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là tập hợp các siêu mặt bất kỳ và Q_j là các đa thức thuần nhất bậc d_j xác định D_j với $j = 1, \dots, q$ trong

$\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$. Ký hiệu $d_{\mathcal{D}}$ là bội chung nhỏ nhất của các d_j , $j = 1, \dots, q$ và đặt

$$n_{\mathcal{D}} = \binom{n + d_{\mathcal{D}}}{n} - 1.$$

Đối với số nguyên $N \geq n$, ta nhắc lại tập các siêu mặt $\mathcal{D}$ được gọi là ở vị trí N -dưới tổng quát nếu $q > N$ và với mọi tập con gồm $N + 1$ chỉ số phân biệt $i_1, \dots, i_{N+1} \in \{1, \dots, q\}$, ta có $\bigcap_{k=1}^{N+1} \text{supp}(D_{i_k}) = \emptyset$. Đặc biệt, nếu $N = n$, thì tập các siêu mặt $\mathcal{D}$ được gọi là ở vị trí tổng quát.

Giả sử f và g là hai ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và $H_1, \dots, H_q$ là q siêu phẳng ở vị trí tổng quát sao cho

$$\dim f^{-1}(H_i \cap H_j) \leq m - 2 \quad \text{đối với } i \neq j.$$

Gọi $m_1, \dots, m_q$ là các số nguyên dương hoặc ∞ thỏa mãn $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q \geq n$,

$$\nu_{(f, H_j), \leq m_j}^1 = \nu_{(g, H_j), \leq m_j}^1, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

và $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \bigcup_{j=1}^q \{z \in \mathbb{C}^m : 0 < \nu_{(f, H_j)} \leq m_j\}$. Năm 2000, Aihara Y. (xem [2]) đã chứng minh $f = g$ nếu

$$\sum_{j=3}^q \frac{m_j}{m_j + 1} > \frac{qn - q + n + 1}{n} + \frac{m_1}{m_1 + 1} - \frac{m_2}{m_2 + 1}. \quad (4)$$

Kết quả của Aihara Y. là điều kiện đủ liên quan đến quan hệ giữa bội các không điểm của (f, H_j) và (g, H_j) để hai đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính là bằng nhau. Lưu ý rằng điều kiện (4) sẽ suy ra được $q \geq 3n + 2$. Năm 2011, Cao T.-B. và Yi H.-X. ([10]) đã cải tiến kết quả của Aihara Y. và chứng minh rằng $f = g$ nếu

$$\sum_{j=3}^q \frac{m_j}{m_j + 1} > \frac{qn - q + n + 1}{n} - (n - 1) \left(\frac{1}{m_1 + 1} + \frac{1}{m_2 + 1} \right). \quad (5)$$

Đối với vấn đề này ta có thể tiếp tục nghiên cứu trong các trường hợp khác, chẳng hạn trường hợp đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, mục tiêu là các siêu mặt di động hay cố định ở vị trí tổng quát hoặc dưới tổng quát.

Sự lựa chọn đề tài "*Vấn đề duy nhất đối với L -hàm và đường cong chỉnh hình*" của chúng tôi nhằm làm phong phú thêm các kết quả về phân bố giá trị cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

- **Đối tượng nghiên cứu:** Hàm phân hình, ánh xạ chỉnh hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và trên hình vành khuyên, ứng dụng của Lý thuyết Nevanlinna cho hàm và ánh xạ chỉnh hình để khảo cứu vấn đề phân bố giá trị của hàm và ánh xạ chỉnh hình có điều kiện của giá trị khuyết, bài toán xác định duy nhất hàm và ánh xạ chỉnh hình khi chúng chia sẻ các tập hợp hoặc siêu mặt.

- **Mục đích nghiên cứu:**

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu các vấn đề sau đây:

Vấn đề thứ nhất: Thiết lập một số điều kiện đủ liên quan đến điều kiện của giá trị khuyết và đạo hàm để cho L -hàm và hàm phân hình là trùng nhau.

Vấn đề thứ hai: Xây dựng một số dạng định lý duy nhất liên quan đến việc chia sẻ các siêu mặt kiểu Fermat-Yi đối với lũy thừa các ánh xạ chỉnh hình.

Vấn đề thứ ba: Xây dựng dạng định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên liên quan đến bội các không điểm.

3. Tổng quan về luận án

a) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ nhất, chúng tôi đã:

- Thiết lập điều kiện đủ liên quan đến giá trị khuyết tại ∞ để L -hàm và hàm phân hình là trùng nhau (Định lý 1.2.1). Từ đó chỉ ra sự tồn tại của tập xác định duy nhất gồm 8 phần tử và tập xác định duy nhất liên quan đến số khuyết gồm 7 phần tử cho L -hàm và hàm phân hình.

- Xây dựng mới định lý duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình với điều kiện đại số liên quan đến đạo hàm (Định lý 1.3.1).

Có thể thấy Định lý 1.2.1 đã cải tiến và tổng quát hóa một số kết quả gần đây của Khoai H.H, An V. H. và Phuong N. D. trong [31] và một số kết quả của Yuan Q.-Q., Li X.-M. và Yi H.-X. trong [62]. Từ Phần 2 của Định lý 1.2.1 ta thu được Định lý 2. Định lý 1.3.1 là cải tiến của Định lý 1.1 của Khoai H. H., An V. H. và Ninh L. Q. trong ([29]). Hệ quả 1.3.2 của Định lý 1.3.1 đã cải tiến Định lý 7 của Sahoo P. và Halder S. trong [50].

b) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ hai:

Cho $f = (f_1 : \dots : f_{N+1})$ là ánh xạ chỉnh hình với $(f_1 : \dots : f_{N+1})$ là biểu diễn rút gọn. Ánh xạ f được gọi là không suy biến tuyến tính mức 1 nếu và chỉ nếu với bất kì $i, j : 1 \leq i < j \leq N + 1$, ta có $\frac{f_i}{f_j}$ là hàm phân hình khác hằng. Trong luận án này chúng tôi:

- Thiết lập được điều kiện đủ để hai ánh xạ chỉnh hình f, g trên $\mathbb{C}$ không suy biến tuyến tính mức 1 với các biểu diễn rút gọn $(f_1 : \dots : f_{N+1})$ và $(g_1 : \dots : g_{N+1})$ có tính chất: f_i, g_i phụ thuộc tuyến tính khi hai ánh xạ $f^v = (f_1^v : \dots : f_{N+1}^v)$, $g^v = (g_1^v : \dots : g_{N+1}^v)$ chia sẻ các siêu mặt X, Y , ở đó v là số nguyên dương (Định lý 2.2.3).

- Thiết lập dạng siêu mặt xác định duy nhất kiểu Fermat-Yi cho ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1.

- Chỉ ra sự tồn tại của lớp siêu mặt xác định duy nhất cho một số lớp ánh xạ chỉnh hình. Cụ thể kí hiệu

$$\mathcal{M}_{L_1}^v(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})) := \{f^v : f \in \mathcal{M}_{L_1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))\}.$$

Khi đó, tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất có bậc $13(2N-1)^2$ cho $\mathcal{M}_{L_1}^1(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$, có bậc $7(2N-1)^2$ cho $\mathcal{M}_{L_1}^2(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$, có bậc $4(2N-1)^2$ cho $\mathcal{M}_{L_1}^8(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$.

c) Đối với vấn đề nghiên cứu thứ ba:

- Xây dựng được dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên cho trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí N -dưới tổng quát (Định lý 3.2.1).

- Thiết lập được điều kiện đại số liên quan đến bội của các không điểm với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí N -dưới tổng quát để hai đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên đồng nhất bằng nhau (Định lý 3.2.2).

Chú ý rằng, trong Định lý 3.2.2, khi $D_1, \dots, D_q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát thì $N = n$ và $n_{\mathcal{D}} = n$, khi đó bất đẳng thức (3.20) trong Định lý 3.2.2 trở thành bất đẳng thức (5), như vậy Định lý 3.2.2 là mở rộng kết quả của Cao T.-B. và Yi H.-X. ([10]). Ngoài ra, khi $D_1, \dots, D_q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát, điều kiện (3.20) sẽ suy ra $q \geq 3n+2$, giống như kết quả của Smiley L. trong [53].

4. Phương pháp và công cụ nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi dùng các công cụ, kiến thức, kỹ thuật của giải tích phức, lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna, Nevanlinna-Cartan, hình học đại số để giải quyết các vấn đề đặt ra. Cụ thể chúng tôi đã dùng các dạng khác của hai định lý cơ bản của lý thuyết Nevanlinna cho hàm và ánh xạ chỉnh hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, trên hình vành khuyên cùng các kỹ thuật ước lượng giữa hàm đếm, hàm xấp xỉ, hàm đặc trưng, định lý

số khuyết, Bổ đề kiểu Borel cho ánh xạ chỉnh hình rẽ nhánh.

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu cơ bản, truyền thống để giải quyết các vấn đề: trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu, các công trình đã có, chúng tôi phát hiện các vấn đề mở và sử dụng hoặc xây dựng các công cụ, phương pháp để giải quyết các vấn đề đặt ra.

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại :

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên hàng năm.
- Seminar đề tài NCKH cấp bộ B2024-TNA-19.

Chương 1

Vấn đề duy nhất đối với hàm phân hình và L -hàm chia sẻ tập hữu hạn

1.1. Kiến thức cơ sở

Các L -hàm trong lớp Selberg, tức là mỗi hàm phức trong lớp này được xác định bởi chuỗi Dirichlet có dạng

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

hội tụ tuyệt đối trong miền $\operatorname{Re}(s) > 1$ thỏa mãn các tính chất sau:

(i) Giả thuyết Ramanujan: với mọi số dương ε , $a(n) \ll n^\varepsilon$, tức là tồn tại hằng số C sao cho $|a(n)| \leq Cn^\varepsilon$.

(ii) Thác triển giải tích: tồn tại số nguyên không âm m sao cho

$$(s-1)^m L(s) \text{ là hàm nguyên bậc hữu hạn;}$$

(iii) Phương trình hàm: tồn tại các số thực dương Q , λ_i và tồn tại số nguyên dương K và tồn tại các số phức μ_i , ω với $\operatorname{Re} \mu_i \geq 0$ và $|\omega| = 1$ thỏa mãn phương trình

$$\Lambda_L(s) = \omega \overline{\Lambda_L(1 - \bar{s})},$$

trong đó

$$\Lambda_L(s) := L(s) Q^s \prod_{i=1}^K \Gamma(\lambda_i s + \mu_i)$$

và $\Gamma(s)$ là hàm Gamma Euler.

(iv) Giả thuyết tích Euler: tồn tại tích Euler có dạng

$$L(s) = \prod_p L_p(s),$$

trong đó

$$L_p(s) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}}},$$

đối với các hệ số $b(p^k)$ thỏa mãn $b(p^k) \ll p^{k\theta}$ và số $\theta < \frac{1}{2}$, trong đó từng phần tử trong tích là ứng với số nguyên tố p .

Chú ý rằng, các hằng số trong phương trình hàm của L -hàm L là phụ thuộc vào L . Mặc dù các phương trình hàm của L là không duy nhất nhưng có những đại lượng bất biến, chẳng hạn bậc d_L xác định bởi

$$d_L = 2 \sum_{i=1}^K \lambda_i.$$

Mệnh đề 1.1.3 ([29], Bổ đề 3.1, trang 270). *Giả sử L là L -hàm trong lớp Selberg mở rộng, f là hàm phân hình, a, b, d, u, v, t là các hằng số phức khác không, n và m là các số nguyên dương, $n \geq 2m + 3$. Đặt*

$$P(x) = ax^n + bx^{n-m} + d; \quad Q(y) = uy^n + vy^{n-m} + t.$$

1. Nếu $P(L) = Q(f)$, thì $f = hL$, trong đó h là hằng số, thỏa mãn $h^n = a/u$, $h^{n-m} = b/v$ và $d = t$.
2. Nếu $(n, m) = 1$, $a = u$, $b = v$ và $P(L) = Q(f)$, thì $f = L$ và $d = t$.
3. Nếu L_1, L_2 là các L -hàm trong lớp Selberg mở rộng và $P(L_1) = Q(L_2)$, thì $L_1 = L_2$ và $P = Q$.

Cho f là hàm phân hình khác hằng trong $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ và k là số nguyên không âm hoặc vô cùng. Với mỗi $\rho > 0$, gọi $n(\rho, f)$ là số cực điểm tính cả bội của hàm f trong đĩa $D(0, \rho)$, $\bar{n}(\rho, f)$ là số cực điểm không tính bội của hàm f trong đĩa $D(0, \rho)$. Hàm đếm tại các cực điểm tính cả bội

(tương ứng, không tính bội) của f trong đĩa $D(0, \rho)$, được xác định như sau:

$$N(\rho, f) = \int_0^\rho \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log \rho,$$

(tương ứng $\bar{N}(\rho, f) = \int_0^\rho \frac{\bar{n}(t, f) - \bar{n}(0, f)}{t} dt + \bar{n}(0, f) \log \rho$).

Đối với $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ta gọi $N(\rho, \frac{1}{f-a})$ (tương ứng $\bar{N}(\rho, \frac{1}{f-a})$) là hàm đếm tại các không điểm của $f-a$ hay là hàm đếm tại các a -điểm kể cả bội (tương ứng không kể bội) của f .

Hàm

$$m(\rho, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\theta})| d\theta$$

được gọi là hàm xấp xỉ của f , ở đó $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$. Tương tự, đối với giá trị $a \in \mathbb{C}$, ta có

$$m\left(\rho, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(\rho e^{i\theta}) - a} \right| d\theta.$$

Có thể thấy hàm $m(\rho, \frac{1}{f-a})$ mô tả "mức độ gần" mà $f(z)$ đạt giá trị a trên đường tròn $|z| = \rho$.

Ta gọi hàm

$$T(\rho, f) = m(\rho, f) + N(\rho, f)$$

là hàm đặc trưng (hay hàm đặc trưng Nevanlinna) của f . Các hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng đóng vai trò trung tâm trong lý thuyết Nevanlinna.

Đối với hàm phân hình f và giá trị $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, các giá trị

$$\theta(a, f) = 1 - \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{N\left(\rho, \frac{1}{f-a}\right)}{T(\rho, f)},$$

$$\Theta(a, f) = 1 - \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}\left(\rho, \frac{1}{f-a}\right)}{T(\rho, f)},$$

với $a \in \mathbb{C}$ và

$$\begin{aligned}\theta(\infty, f) &= 1 - \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{N(\rho, f)}{T(\rho, f)}, \\ \Theta(\infty, f) &= 1 - \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(\rho, f)}{T(\rho, f)},\end{aligned}$$

với $a = \infty$, trong đó ρ nằm ngoài tập có độ đo Lebesgue hữu hạn, lần lượt được gọi là số khuyết kể cả bội và số khuyết không kể bội của hàm f tại điểm a . Rõ ràng

$$0 \leq \theta(a, f) \leq \Theta(a, f) \leq 1.$$

Cho f là hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Giá trị $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ được gọi là *giá trị bỏ được Picard* nếu

$$f(z) \neq a \quad \text{với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

Giả sử f là hàm phân hình và $a \in \mathbb{C}$. Ta gọi $E_f(a)$ là tập các a -điểm của f ở đó mỗi a -điểm được tính với bội của nó, tức là

$$E_f(a) = \{(z, \nu_f^a(z)) : z \in \mathbb{C}, f(z) = a\}.$$

Tương tự, ta gọi $\overline{E}_f(a)$ là tập các a -điểm của f trong đó mỗi a -điểm được tính chỉ một lần.

Đối với k là số nguyên dương, ta gọi $E_f(a, k)$ là tập các a -điểm của f trong đó mỗi a -điểm z được tính $\nu_f^a(z)$ lần nếu $\nu_f^a(z) \leq k$ và $k+1$ lần nếu $\nu_f^a(z) > k$. Tức là

$$E_f(a, k) = \left\{ (z, m) : f(z) = a, m = \begin{cases} \nu_f^a(z) & \text{nếu } \nu_f^a(z) \leq k, \\ k+1 & \text{nếu } \nu_f^a(z) > k. \end{cases} \right\}.$$

Đối với số nguyên dương α , ta đặt

$$E_{f,\alpha}(a) = \{(z, \nu_f^a(z)) : f(z) = a, \nu_f^a(z) \leq \alpha\}.$$

Đối với tập con khác rỗng $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ta đặt

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} E_f(a).$$

Tương tự ta có các tập $\overline{E}_f(S)$, $E_f(S, k)$, $E_{f, \alpha}(S)$.

Hai hàm phân hình khác hằng f, g được nói là *chia sẻ S kể cả bội* (chia sẻ S CM) nếu $E_f(S) = E_g(S)$, *chia sẻ S không kể bội* (chia sẻ S IM) nếu $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$ và *chia sẻ S với trọng k* nếu $E_f(S, k) = E_g(S, k)$.

Cho $\mathcal{F}$ là tập con khác rỗng của $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Đối với bất kỳ hai hàm khác hằng f, g của $\mathcal{F}$, nếu điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ (tương ứng $\overline{E}_f(S) = \overline{E}_g(S)$) suy ra $f = g$ thì S được gọi là tập xác định duy nhất tính bội (tương ứng không tính bội) đối với họ hàm $\mathcal{F}$. Tương tự, đối với bất kỳ hai hàm khác hằng f, g của $\mathcal{F}$, nếu điều kiện $E_f(S, k) = E_g(S, k)$, suy ra $f = g$, thì S được gọi là tập xác định duy nhất với trọng k đối với họ hàm $\mathcal{F}$. Rõ ràng

$$E_f(S) = E_f(S, \infty); \quad \overline{E}_f(S) = \overline{E}_f(S, 0).$$

Cho $P(z)$ là đa thức với các hệ số phức. Đa thức $P(z)$ được gọi là *đa thức duy nhất đối với hàm phân hình (nguyên)* nếu hai hàm phân hình (nguyên) khác hằng tùy ý f và g , thỏa mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ và kéo theo $f = g$. Đa thức $P(z)$ được gọi là *đa thức duy nhất mạnh đối với hàm phân hình (nguyên)* nếu hai hàm phân hình (nguyên) khác hằng tùy ý f, g và hằng số khác không c tùy ý, thỏa mãn điều kiện $P(f) = cP(g)$ và kéo theo $f = g$.

Xét đa thức $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ bậc q có dạng

$$P(z) = a(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_q), \quad (1.1)$$

trong đó đạo hàm của đa thức $P(z)$ có k không điểm phân biệt $d_1, d_2, \dots, d_k$ với các bội $q_1, q_2, \dots, q_k$, tương ứng, khi đó

$$P'(z) = aq(z - d_1)^{q_1}(z - d_2)^{q_2} \dots (z - d_k)^{q_k}, \quad a \neq 0.$$

Số k được gọi là *chỉ số đạo hàm* của $P(z)$. Giả sử rằng:

$$P(d_i) \neq 0 \text{ đối với } 1 \leq i \leq k. \quad (1.2)$$

Chú ý rằng, điều kiện (1.2) suy ra $P(z)$ chỉ có không điểm đơn. Chúng ta nhớ lại điều kiện sau được giới thiệu bởi Fujimoto H. (xem [18], trang 35):

$$P(d_i) \neq P(d_j) \text{ đối với } 1 \leq i < j \leq k, \quad k \geq 2. \quad (F)$$

1.2. Định lý duy nhất liên quan đến giá trị khuyết

Kí hiệu $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ là tập các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Đối với họ $\mathcal{F}$ các tập con khác rỗng của $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ và t là số thực thỏa mãn $0 \leq t \leq 1$, kí hiệu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_f(\Theta(a, f) \geq t) &= \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) : \Theta(a, f) \geq t\}, \\ \mathcal{F}_f(\Theta(a, f) \leq t) &= \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) : \Theta(a, f) \leq t\}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta định nghĩa được

$$\mathcal{F}_f(\Theta(a, f) > t), \quad \mathcal{F}_f(\Theta(a, f) < t).$$

Định lý sau đây là điều kiện đại số liên quan đến số khuyết tại ∞ để hàm phân hình và L -hàm đồng nhất bằng nhau.

Định lý 1.2.1. *Cho f là hàm phân hình khác hằng, L là L -hàm khác hằng. Giả sử $a_1, \dots, a_q$ là các số phức phân biệt và đa thức duy nhất mạnh $P(z) = a(z - a_1) \dots (z - a_q)$ thỏa mãn các điều kiện (1.2), điều kiện (F) và $E_f(S) = E_L(S)$, trong đó $S = \{z : P(z) = 0\}$. Giả sử rằng $\min\{q_1, q_2\} \geq 2$ khi $k = 2$ và một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

- 1) $q \geq 2k + 3$ và $f \in \mathcal{F}_f(\Theta(\infty, f) \geq t)$, $1 \geq t \geq \frac{1}{2}$;
- 2) $q \geq 2k + 4$ và $f \in \mathcal{F}_f(\Theta(\infty, f) \geq t)$, $t < \frac{1}{2}$.

Khi đó $f = L$.

Chú ý 1.2.1. Lấy các giá trị đặc biệt đối với t trong Định lý 1.2.1, ta nhận được các trường hợp quan tâm sau đối với $k = 2$ và $\Theta(\infty, f)$:

i) *Tồn tại tập S gồm 7 phần tử sao cho hàm phân hình f và L -hàm L bất kỳ thỏa mãn $E_f(S) = E_L(S)$ và $\Theta(\infty, f) = 1$ là đồng nhất bằng nhau.*

Thực vậy, lấy $k = 2$ và $t = 1$ trong Định lý 1.2.1. Khi đó $\Theta(\infty, f) = 1$ và áp dụng Định lý 1.2.1, Phần 1, ta thu được $q \geq 7$.

ii) *Tồn tại tập S gồm 8 phần tử sao cho hàm phân hình f và L -hàm L bất kỳ thỏa mãn $E_f(S) = E_L(S)$ là đồng nhất bằng nhau.*

Thực vậy, lấy $k = 2$ và $t \leq 0$ trong Định lý 1.2.1. Khi đó $\Theta(\infty, f) \geq 0$ và áp dụng Định lý 1.2.1, Phần 2, ta thu được $q \geq 8$.

1.3. Định lý duy nhất liên quan đến đạo hàm

Xem xét các đa thức $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ bậc n có dạng:

$$\begin{aligned} P(z) &= az^n + bz^{n-m} + c, \text{ trong đó } a, b, c \neq 0, \\ Q(z) &= uz^n + vz^{n-m} + t, \text{ trong đó } u, v, t \neq 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Giả sử rằng

$$\frac{a^{n-m}c^m}{b^n} \neq \frac{(-1)^n(n-m)^{n-m}m^m}{n^n}, \quad (1.9)$$

$$\frac{u^{n-m}t^m}{v^n} \neq \frac{(-1)^n(n-m)^{n-m}m^m}{n^n}. \quad (1.10)$$

Chú ý rằng đa thức $P(z)$ (tương ứng $Q(z)$) là đa thức bậc n và có n không điểm đơn phân biệt nếu và chỉ nếu điều kiện (1.9) (tương ứng (1.10)) được thỏa mãn (xem [34], Bổ đề 2.7, trang 151).

Kết quả sau đây của chúng tôi là vấn đề duy nhất cho hàm phân hình liên quan đến đạo hàm của các hàm phân hình.

Định lý 1.3.1. *Giả sử m, n là các số nguyên dương, $n \geq 2m + 7$; $P(z), Q(z)$ là các đa thức có dạng (1.8) thỏa mãn các điều kiện (1.9)*

và (1.10). Gọi S, T lần lượt là các tập không điểm của P, Q . Giả sử f là hàm phân hình khác hằng với hữu hạn cực điểm trong mặt phẳng phức và L là L -hàm. Khi đó ta có:

1. $L^{-1}(S) = f^{-1}(T)$ và $E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0)$ nếu và chỉ nếu $f = hL$ và $hS = T$, ở đó h là hằng số khác không thỏa mãn $h^n = \frac{at}{cu}$ và $h^m = \frac{av}{ub}$.
2. Đặc biệt nếu f là L -hàm thì $L^{-1}(S) = f^{-1}(T)$ và $E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0)$ nếu và chỉ nếu $f = L$ và $\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{t}$.

Trường hợp đặc biệt của Định lý 1.3.1 khi ta chọn $P(z) = Q(z)$, ta sẽ có kết quả sau đây:

Hệ quả 1.3.2. Giả sử m, n là các số nguyên không âm sao cho $(n, m) = 1$ và $n \geq 2m + 7$; Giả sử đa thức $P(z)$ có dạng (1.8) thỏa mãn (1.9). Ký hiệu S là tập các không điểm của P . Khi đó đối với hàm phân hình khác hằng có hữu hạn cực điểm f và L -hàm L , điều kiện $L^{-1}(S) = f^{-1}(S)$ và $E_{L',1}(0) = E_{f',1}(0)$ xảy ra khi và chỉ khi $f = L$.

Chú ý 1.3.1. i) Định lý 1.3.1 là cải tiến của Định lý 1.1 của Khoai H. H., An V. H. và Ninh L. Q. trong [29].

ii) Trong [50] (Định lý 7) các tác giả đã chứng tỏ sự tồn tại của các tập con $S_P \subset \mathbb{C}$ của 14 phần tử sao cho đối với hàm phân hình khác hằng f với hữu hạn cực điểm và L -hàm L , điều kiện $L^{-1}(S_P) = f^{-1}(S_P)$ và $L^{-1}(c) = f^{-1}(c)$ và $c \notin S_P$, kéo theo $f = L$. Hệ quả 1.3.2 chỉ cần tập S gồm có 9 phần tử (chẳng hạn tập các không điểm của đa thức $P(z)$ trong Ví dụ 1.3.2).

Chương 2

Siêu mặt xác định duy nhất đối với ánh xạ chỉnh hình

2.1. Kiến thức cơ bản về phân bố giá trị cho đường cong

Cho $f = (f_1 : \dots : f_{N+1})$ là ánh xạ chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ (hay còn gọi là đường cong chỉnh hình), ở đó $f_1, \dots, f_{N+1}$ là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$. Nếu $f_1, \dots, f_{N+1}$ không có không điểm chung trên $\mathbb{C}$ thì ta gọi $(f_1 : \dots : f_{N+1})$ là biểu diễn rút gọn của f .

Cho ánh xạ $f = (f_1 : \dots : f_{N+1}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, ở đó $(f_1 : \dots : f_{N+1})$ là biểu diễn rút gọn của f . Ánh xạ f được gọi là *không suy biến tuyến tính* nếu ảnh của f không nằm trong siêu phẳng nào của $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, tức là các hàm $f_1, \dots, f_{N+1}$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}$. Ánh xạ f được gọi là *không suy biến tuyến tính mức 1* nếu f_i/f_j là các hàm phân hình khác hằng với mọi cặp $i, j : 1 \leq i < j \leq N + 1$.

Ta dễ dàng kiểm tra được, nếu f là không suy biến tuyến tính, thì f cũng là không suy biến tuyến tính mức 1. Tuy nhiên chiều ngược lại chưa chắc đúng.

Bây giờ ta gọi $\mathcal{M}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ là tập các ánh xạ chỉnh hình, $\mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ là tập các ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1, $\mathcal{M}_1(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ là tập các ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Khi đó ta có

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})) \subset \mathcal{M}_{L^1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})).$$

Cho $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ với biểu diễn rút gọn $(f_1 : \dots : f_{N+1})$ và v là số tự nhiên không âm, ta định nghĩa

$$f^v = (f_1^v : \dots : f_{N+1}^v) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}),$$

thì f^v sẽ xác định ánh xạ chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Dễ dàng thấy rằng $f \in \mathcal{M}_{L^1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ nếu và chỉ nếu $f^v \in \mathcal{M}_{L^1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$.

Cho f là ánh xạ chỉnh hình, hàm đặc trưng (hay còn gọi là hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan) của f được xác định bởi

$$T_f(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(\rho e^{i\theta})\| d\theta,$$

trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_1(z)|, \dots, |f_{N+1}(z)|\}$.

Gọi D là siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ sao cho ảnh của f không nằm trong D . Kí hiệu Q là đa thức thuần nhất bậc d xác định D . Hàm xấp xỉ của f được xác định bởi

$$m_f(\rho, D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(\rho e^{i\theta})\|^d}{|Q \circ f(\rho e^{i\theta})|} d\theta,$$

với $Q \circ f = Q(f_1, \dots, f_{N+1})$. Gọi $n_f(\rho, D)$ là số các không điểm tính cả bội của $Q \circ f$ trong đĩa $|z| \leq \rho$. Hàm đếm $N_f(\rho, D)$ được xác định bởi

$$N_f(\rho, D) = \int_0^\rho \frac{n_f(t, D) - n_f(0, D)}{t} dt + n_f(0, D) \log \rho.$$

Với mỗi số tự nhiên không âm M , ta ký hiệu $n_f^M(\rho, D)$ là số các không điểm của $Q \circ f$ trong đĩa $|z| \leq \rho$, ở đó mỗi không điểm được đếm bằng bội

của nó nếu bội nhỏ hơn M và đếm M lần trong trường hợp khác. Hàm đếm bội cắt cụt mức M được xác định bởi

$$N_f^M(\rho, D) = \int_0^\rho \frac{n_f^M(t, D) - n_f^M(0, D)}{t} dt + n_f^M(0, D) \log \rho.$$

Mệnh đề sau là định lý cơ bản thứ nhất đối với siêu mặt.

Mệnh đề 2.1.1 (xem [4], trang 776; [49], trang 216). *Giả sử f là ánh xạ chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, D là siêu mặt sao cho ảnh của f không nằm trong D . Khi đó, với mọi $\rho > 0$,*

$$m_f(\rho, D) + N_f(\rho, D) = dT_f(\rho) + O(1),$$

ở đó $O(1)$ là hằng số không phụ thuộc vào ρ .

2.2. Siêu mặt xác định duy nhất đối với đường cong chỉnh hình

Cho d là số nguyên dương, $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, N$ là các hằng số khác 0 thỏa mãn

$$d \geq (2N - 1)^2, \quad b_i^d d_i^d \neq b_l^d d_j^d \quad \text{với } i \neq j, i \neq l, \quad \text{khi } N \geq 2. \quad (2.4)$$

Với các số tự nhiên không âm p, n , ta đặt

$$P_i(z_i, z_{N+1}) = z_i^{n+p} + a_i z_i^n z_{N+1}^p + b_i z_{N+1}^{n+p},$$

$$Q_i(z_i, z_{N+1}) = z_i^{n+p} + c_i z_i^n z_{N+1}^p + d_i z_{N+1}^{n+p},$$

với $i = 1, 2, \dots, N$. Đặt

$$P(z_1, \dots, z_{N+1}) = P_1^d(z_1, z_{N+1}) + \dots + P_N^d(z_N, z_{N+1}), \quad (2.5)$$

$$Q(z_1, \dots, z_{N+1}) = Q_1^d(z_1, z_{N+1}) + \dots + Q_N^d(z_N, z_{N+1}). \quad (2.6)$$

Mệnh đề 2.2.1. Cho n, p, v là các số tự nhiên không âm thỏa mãn $(n, p) = 1$ hoặc $vp \geq 4$ và $c, d, e, u, s, t \in \mathbb{C}$ là các hằng số khác 0. Giả sử $\frac{f_1}{f_2}$ và $\frac{g_1}{g_2}$ là các hàm phân hình khác hằng thỏa mãn

$$cf_1^{v(n+p)} + df_1^{vn}f_2^{vp} + ef_2^{v(n+p)} = ug_1^{v(n+p)} + sg_1^{vn}g_2^{vp} + tg_2^{v(n+p)}. \quad (2.7)$$

Giả sử thêm rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$n \geq p + 1 + \frac{8}{v} \quad \text{và} \quad (2.8)$$

$$v \geq 2 \quad \text{nếu} \quad p = 1. \quad (2.9)$$

Khi đó ta có

$$f_1 = hg_1, \quad f_2 = lg_2,$$

với h, l là các hằng số thỏa mãn

$$h^{v(n+p)} = \frac{u}{c}, \quad h^{vn}l^{vp} = \frac{s}{d}, \quad l^{v(n+p)} = \frac{t}{e}.$$

Mệnh đề 2.2.2. Giả sử n, p, v là các số tự nhiên không âm thỏa mãn $(n, p) = 1$ hoặc $vp \geq 4$. Giả sử điều kiện (2.4) được thỏa mãn. Gọi P, Q là các đa thức lần lượt được xác định trong (2.5) và (2.6) và $f, g \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ thỏa mãn

$$P(f_1^v, f_2^v, \dots, f_{N+1}^v) = Q(g_1^v, g_2^v, \dots, g_{N+1}^v), \quad (2.24)$$

trong đó $(f_1 : \dots : f_{N+1})$ và $(g_1 : \dots : g_{N+1})$ lần lượt là các biểu diễn rút gọn của f và g . Giả sử thêm các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$n \geq p + 1 + \frac{8}{v} \quad \text{và} \quad (2.25)$$

$$v \geq 2 \quad \text{nếu} \quad p = 1. \quad (2.26)$$

Khi đó, ta có

$$f_i = h_i g_i, \quad f_{N+1} = h_{N+1} g_{N+1},$$

với h_i, h_{N+1} là các hằng số thỏa mãn các điều kiện:

$$h_i^{v(n+p)} = \frac{1}{B_i}, \quad h_i^{vn}h_{N+1}^{vp} = \frac{c_i}{B_i a_i}, \quad h_{N+1}^{v(n+p)} = \frac{d_i}{B_i b_i}, \quad B_i^d = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Cho $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là ánh xạ chỉnh hình và D là siêu mặt xác định bởi đa thức thuần nhất Q bậc d . Hàm bội $\nu_{f,D} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{N}$ tại các không điểm giao của ảnh f với D được xác định bởi:

$$\nu_{f,D}(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } Q \circ f(z) \neq 0, \\ m & \text{nếu } Q \circ f(z) = 0 \text{ với bội } m. \end{cases}$$

Kí hiệu

$$E_f(D) = \{(z, \nu_{f,D}(z)) : z \in \mathbb{C}\}.$$

Định lý 2.2.3. Cho n, p, v là các số nguyên dương thỏa mãn $(n, p) = 1$ hoặc $vp \geq 4$. Giả sử điều kiện (2.4) được thỏa mãn. Gọi P, Q là các đa thức lần lượt được xác định trong (2.5) và (2.6) và X, Y là các siêu mặt lần lượt được xác định bởi $P(z_1, \dots, z_{N+1}) = 0$ và $Q(z_1, \dots, z_{N+1}) = 0$. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn

$$n \geq p + 1 + \frac{8}{v} \quad \text{và} \quad (2.30)$$

$$v \geq 2 \quad \text{nếu } p = 1. \quad (2.31)$$

Khi đó nếu $f, g \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ thỏa mãn $E_{f^v}(X) = E_{g^v}(Y)$ thì

$$f_i = h h_i g_i, \quad f_{N+1} = h h_{N+1} g_{N+1},$$

trong đó $(f_1 : \dots : f_{N+1})$ và $(g_1 : \dots : g_{N+1})$ lần lượt là các biểu diễn rút gọn của f và g , h là hàm nguyên không có không điểm, $h_i, i = 1, \dots, N$ và h_{N+1} là các hằng số thỏa mãn

$$h_i^{v(n+p)} = \frac{1}{B_i}, \quad h_i^{vn} h_{N+1}^{vp} = \frac{c_i}{B_i a_i}, \quad h_{N+1}^{v(n+p)} = \frac{d_i}{B_i b_i}, \quad B_i^d = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Chú ý 2.2.1. i) Định lý 2.2.3 cho ta điều kiện cần để điều kiện

$$E_{f^v}(X) = E_{g^v}(Y)$$

được thỏa mãn.

ii) Dễ dàng nhận thấy rằng Định lý 2.2.3 suy ra Định lý 3.1 của Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. trong [26]. Thật vậy, ta biết rằng nếu f (tương ứng g) là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ thì ta có thể viết $f = \frac{f_1}{f_2}$ (tương ứng $g = \frac{g_1}{g_2}$), trong đó f_1, f_2 (tương ứng g_1, g_2) là các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ không có không điểm chung. Khi đó f, g trong Định lý 3.1 của Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. trong [26] là hai ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1 từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ với $f = (f_1 : f_2)$ và $g = (g_1 : g_2)$ là các biểu diễn rút gọn của f và g , tương ứng. Khi đó ta lấy $N = 1, v = 1, (n, p) = 1$ hoặc $p \geq 4$ trong Định lý 2.2.3, ta sẽ thu được kết luận của Định lý 3.1 của Khoai H. H., An V. H. và Hoa P. N. trong [26].

Tác giả đã đưa ra câu trả lời khẳng định cho câu hỏi: *Có thể tìm được siêu mặt X sao cho với mọi cặp ánh xạ chỉnh hình f, g từ $\mathbb{C}$ tới $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ thỏa mãn $E_f(X) = E_g(X)$ thì f và g trùng nhau không ?*

Giả sử d là số nguyên dương, $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, N$ là các hằng số khác 0 thỏa mãn

$$d \geq (2N - 1)^2, \quad b_i^{2d} \neq b_j^d b_l^d \text{ với } i \neq j, i \neq l \text{ khi } N \geq 2. \quad (2.32)$$

Với các số tự nhiên không âm p, n , ta đặt

$$P_i(z_i, z_{N+1}) = z_i^{n+p} + a_i z_i^n z_{N+1}^p + b_i z_{N+1}^{n+p},$$

với $i = 1, 2, \dots, N$. Đặt

$$P(z_1, \dots, z_{N+1}) = P_1^d(z_1, z_{N+1}) + \dots + P_N^d(z_N, z_{N+1}).$$

Gọi X là siêu mặt xác định bởi

$$P(z_1, \dots, z_{N+1}) = 0. \quad (2.33)$$

Định lý 2.2.4. *Cho n, p, v là các số nguyên dương sao cho $(n, p) = 1$. Cho X là siêu mặt được xác định như trong (2.33) với điều kiện (2.32).*

Gọi $f, g \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ thỏa mãn $E_{f^v}(X) = E_{g^v}(X)$. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$n \geq p + 1 + \frac{8}{v} \text{ và} \quad (2.34)$$

$$v \geq 2 \text{ nếu } p = 1. \quad (2.35)$$

Khi đó $f^v = g^v$.

Định lý 2.2.4 cho ta một điều kiện đại số cho một lớp siêu mặt xác định duy nhất lũy thừa của ánh xạ chỉnh hình. Dễ thấy rằng Định lý 1.5 trong [27] là hệ quả của Định lý 2.2.4 khi ta lấy $N = 1$, $n = 6$, $p = 1$, $v \geq 2$.

Cho D là siêu mặt, nếu điều kiện $E_f(D) = E_g(D)$ kéo theo $f = g$ đối với bất kỳ hai ánh xạ chỉnh hình f, g sao cho ảnh của f, g không chứa trong D , thì D được gọi là *siêu mặt xác định duy nhất tính cả bội đối với các ánh xạ chỉnh hình*. Hệ quả sau đây cho thấy sự tồn tại siêu mặt xác định duy nhất của một số lớp ánh xạ chỉnh hình.

Hệ quả 2.2.5. *Kí hiệu*

$$\mathcal{M}_{L1}^v(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C})) := \{f^v : f \in \mathcal{M}_{L1}(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))\}.$$

Khi đó, ta có:

- i) Tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất có bậc $13(2N - 1)^2$ cho lớp các ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1 từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.
- ii) Tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất có bậc $7(2N - 1)^2$ cho các ánh xạ chỉnh hình thuộc $\mathcal{M}_{L1}^2(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$.
- iii) Tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất có bậc $4(2N - 1)^2$ cho các ánh xạ chỉnh hình thuộc $\mathcal{M}_{L1}^8(\mathbb{C}, \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$.

Chương 3

Định lý duy nhất đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên liên quan đến bội các không điểm

3.1. Các hàm Nevanlinna-Cartan và tính chất

Ta nhắc lại ánh xạ

$$f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

được gọi là đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, trong đó $f_0, \dots, f_n$ là các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{A}_R$ có ít nhất một hàm không đồng nhất bằng không. Ta gọi $(f_0, \dots, f_n)$ là *biểu diễn* của đường cong f . Nếu các hàm $f_0, \dots, f_n$ không có không điểm chung trên $\mathbb{A}_R$ thì ta gọi $(f_0, \dots, f_n)$ là *biểu diễn rút gọn* của f .

Đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là *suy biến tuyến tính* (tương ứng *suy biến đại số*) nếu ảnh của f chứa trong đa tạp tuyến tính thực sự (tương ứng đa tạp đại số thực sự) nào đó của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Giả sử $f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là đường cong chỉnh hình trên $\mathbb{A}_R$ và $(f_0, \dots, f_n)$ là biểu diễn rút gọn của f , tức là các hàm $f_0, \dots, f_n$ chỉnh hình không có không điểm chung trên $\mathbb{A}_R$. Với mỗi $1 < \rho < R$, hàm

đặc trưng Nevanlinna-Cartan $T_f(\rho)$ của f được xác định bởi

$$T_f(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(\rho e^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(\rho^{-1} e^{i\theta})\| d\theta,$$

ở đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \dots, |f_n(z)|\}$. Ta đặt

$$O_f(\rho) = \begin{cases} O(\log \rho + \log T_f(\rho)) & \text{nếu } R = \infty, \\ O\left(\log \frac{1}{R - \rho} + \log T_f(\rho)\right) & \text{nếu } R < \infty. \end{cases}$$

Cho D là siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và Q là đa thức thuần nhất bậc d xác định D trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$, ta giả sử

$$Q(z_0, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \dots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó $n_d = \binom{n+d}{n} - 1$ và $i_{k0} + \dots + i_{kn} = d$ với $k = 0, \dots, n_d$, khi đó ta kí hiệu

$$(f, D) = Q(f) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k f_0^{i_{k0}} \dots f_n^{i_{kn}}.$$

Nếu $Q(f) \neq 0$, ta gọi (f, D) là tự do.

Bây giờ ta định nghĩa hàm xấp xỉ. Dưới điều kiện (f, D) tự do, hàm

$$m_f(\rho, D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(\rho e^{i\theta})\|^d}{|(f, D)(\rho e^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(\rho^{-1} e^{i\theta})\|^d}{|(f, D)(\rho^{-1} e^{i\theta})|} d\theta$$

là hàm xấp xỉ của hàm f kết hợp với siêu mặt D , ở đó $1 < \rho < R$.

Đối với đường cong f và siêu mặt D sao cho (f, D) tự do, ta kí hiệu $\nu_{(f,D)}$ là ánh xạ từ $\mathbb{A}_R$ vào $\mathbb{Z}$ ở đó $\nu_{(f,D)}(z)$ là bội các không điểm của (f, D) tại z , tức là $\nu_{(f,D)}(z) = \text{ord}_{(f,D)}(z)$. Với các số nguyên k, d , ta đặt

$$\nu_{(f,D), \leq k}^d = \begin{cases} \min\{d, \nu_{(f,D)}\} & \text{nếu } 0 < \nu_{(f,D)} \leq k, \\ 0 & \text{trong trường hợp khác} \end{cases}$$

là bội cắt cắt bởi d và chỉ xem xét tại các bội $\leq k$.

Với mỗi $\rho : 1 < \rho < R$, ta gọi $n_{1,f}(\rho, D)$ và $n_{2,f}(\rho, D)$ là số các không điểm tính bội của $Q \circ f(z)$ lần lượt trong $\mathbb{A}_{1,\rho}$ và $\mathbb{A}_{2,\rho}$. Hàm đếm tại các không điểm của f kết hợp với siêu mặt D được xác định bởi

$$N_{1,f}(\rho, D) = \int_{\rho^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}(t, D)}{t} dt, \quad N_{2,f}(\rho, D) = \int_1^{\rho} \frac{n_{2,f}(t, D)}{t} dt,$$

hàm đếm tại các cực điểm f kết hợp với siêu mặt D được xác định bởi

$$N_f(\rho, D) = N_{1,f}(\rho, D) + N_{2,f}(\rho, D).$$

Giả sử Δ là số nguyên không âm, ta gọi $n_{1,f}^{\Delta}(\rho, D)$ và $n_{2,f}^{\Delta}(\rho, D)$ là số các không điểm với bội cắt cụt bởi Δ của $Q \circ f(z)$ lần lượt trong $\mathbb{A}_{1,\rho}$ và $\mathbb{A}_{2,\rho}$, trong đó mỗi không điểm được tính bằng số bội của nó nếu bội đó nhỏ hơn Δ và bằng Δ trong trường hợp khác, tức là

$$n_{1,f}^{\Delta}(\rho, D) = \sum_{z \in \mathbb{A}_{1,\rho}, Q \circ f(z)=0} \min\{\text{ord}_{Q \circ f}(z), \Delta\},$$

$$n_{2,f}^{\Delta}(\rho, D) = \sum_{z \in \mathbb{A}_{2,\rho}, Q \circ f(z)=0} \min\{\text{ord}_{Q \circ f}(z), \Delta\}.$$

Hàm đếm bội cắt cụt của hàm f được xác định bởi

$$N_{1,f}^{\Delta}(\rho, D) = \int_{\rho^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}^{\Delta}(t, D)}{t} dt, \quad N_{2,f}^{\Delta}(\rho, D) = \int_1^{\rho} \frac{n_{2,f}^{\Delta}(t, D)}{t} dt$$

và

$$N_f^{\Delta}(\rho, D) = N_{1,f}^{\Delta}(\rho, D) + N_{2,f}^{\Delta}(\rho, D).$$

Cho k, Δ là số nguyên không âm, ta kí hiệu $n_{1,f,\leq k}^{\Delta}(\rho, D)$ (tương ứng $n_{1,f,\geq k}^{\Delta}(\rho, D)$) là số các không điểm có bội $\leq k$ (tương ứng $\geq k$) của $Q \circ f(z)$ trong $\mathbb{A}_{1,\rho}$; $n_{2,f,\leq k}^{\Delta}(\rho, D)$ (tương ứng $n_{2,f,\geq k}^{\Delta}(\rho, D)$) là số các không điểm có bội $\leq k$ (tương ứng $\geq k$) của $Q \circ f(z)$ trong $\mathbb{A}_{2,\rho}$, ở đó mỗi không điểm

được lấy bằng số bội của nó nếu bội nhỏ hơn hay bằng Δ và Δ lần trong các trường hợp bội lớn hơn Δ . Hàm đếm được xác định bởi

$$N_{1,f,\leq k}^\Delta(\rho, D) = \int_{\rho^{-1}}^1 \frac{n_{1,f,\leq k}^\Delta(t, D)}{t} dt, \quad N_{2,f,\leq k}^\Delta(\rho, D) = \int_1^\rho \frac{n_{2,f,\leq k}^\Delta(t, D)}{t} dt;$$

$$N_{1,f,\geq k}^\Delta(\rho, D) = \int_{\rho^{-1}}^1 \frac{n_{1,f,\geq k}^\Delta(t, D)}{t} dt, \quad N_{2,f,\geq k}^\Delta(\rho, D) = \int_1^\rho \frac{n_{2,f,\geq k}^\Delta(t, D)}{t} dt$$

và đặt

$$N_{f,\leq k}^\Delta(\rho, D) = N_{1,f,\leq k}^\Delta(\rho, D) + N_{2,f,\leq k}^\Delta(\rho, D);$$

$$N_{f,\geq k}^\Delta(\rho, D) = N_{1,f,\geq k}^\Delta(\rho, D) + N_{2,f,\geq k}^\Delta(\rho, D).$$

Mệnh đề 3.1.4 ([47], Bổ đề 2.3, trang 27). *Giả sử $f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là đường cong chỉnh hình và D là siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho ảnh của f không chứa trong D . Khi đó, với mỗi $\rho : 1 < \rho < R$, ta có*

$$m_f(\rho, D) + N_f(\rho, D) = dT_f(\rho) + O(1).$$

Bây giờ ta giả sử $D_1, \dots, D_q$ là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và $N \geq n$ là số tự nhiên không âm, ta nhắc lại họ các siêu mặt $D_1, \dots, D_q$ được gọi là ở vị trí N -dưới tổng quát (đối với $\mathbb{A}_R$) nếu $q > N$ và với mọi cách chọn các chỉ số $i_1, \dots, i_{N+1} \in \{1, \dots, q\}$, ta luôn có

$$\bigcap_{k=1}^{N+1} \text{supp}(D_{i_k}) \cap \mathbb{A}_R = \emptyset.$$

Nếu $N = n$, họ các siêu mặt $\mathcal{D}$ được gọi là ở vị trí tổng quát.

3.2. Định lý duy nhất

Định lý 3.2.1. *Cho $f : \mathbb{A}_R \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và $D_1, \dots, D_q$ là các siêu mặt bậc d_j trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí*

N -dưới tổng quát ($N \geq n$). Kí hiệu d là bội số chung nhỏ nhất của các d_j và đặt $M = \binom{n+d}{n} - 1$. Giả sử $q \geq \frac{(M+1)(2N-n+1)}{n+1}$, khi đó với mỗi $\rho : 1 < \rho < R$, ta có

$$\left\| \left(q - \frac{(M+1)(2N-n+1)}{n+1} \right) T_f(\rho) \leq \sum_{j=1}^q \frac{1}{d} N_f^M(\rho, D_j) + O_f(\rho) \right\| \quad (3.4)$$

Giả sử $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là họ các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ở đó D_j có bậc d_j với $j = 1, \dots, q$. Gọi $d_{\mathcal{D}}$ là bội chung nhỏ nhất của các $d_1, \dots, d_q$ và đặt

$$n_{\mathcal{D}} = \binom{n + d_{\mathcal{D}}}{n} - 1.$$

Định lý 3.2.2. *Giả sử f và g là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ hình vành khuyên $\mathbb{A}_R$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $O_f(\rho) = o(T_f(\rho))$ và $O_g(\rho) = o(T_g(\rho))$. Gọi $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là họ các siêu mặt ở vị trí N -dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ với mọi $i \neq j \in \{1, \dots, q\}$. Giả sử k_j ($j = 1, \dots, q$) là các số tự nhiên dương hoặc ∞ thỏa mãn $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_q \geq n_{\mathcal{D}}$,*

$$\nu_{(f, D_j), \leq k_j}^1 = \nu_{(g, D_j), \leq k_j}^1, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

và $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \bigcup_{j=1}^q \{z \in \mathbb{A}_R : 0 < \nu_{(f, D_j)} \leq k_j\}$. Nếu

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^q \frac{k_j}{k_j + 1} &> \frac{qn_{\mathcal{D}} - q}{n_{\mathcal{D}}} + \frac{(n_{\mathcal{D}} + 1)(2N - n + 1)}{(n + 1)n_{\mathcal{D}}} \\ &\quad - (n_{\mathcal{D}} - 1) \left(\frac{1}{k_2 + 1} + \frac{1}{k_1 + 1} \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

thì $f \equiv g$.

Kết luận chung

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu một số dạng định lý duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ hay trên hình vành khuyên chia sẻ các siêu mặt. Các kết quả trong luận án này được công bố trên bài báo số [AC1], [AC2], [PAC1] và [PC1] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Thiết lập hai dạng định lý duy nhất cho L -hàm và hàm phân hình là các điều kiện đại số liên quan đến giá trị khuyết tại ∞ (Định lý 1.2.1) và liên quan đến đạo hàm của các hàm phân hình (Định lý 1.3.1).

2. Xây dựng hai điều kiện đại số để hai đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1 chia sẻ hai siêu mặt (Định lý 2.2.3) và chia sẻ một siêu mặt (Định lý 2.2.4) là trùng nhau. Từ đó chỉ ra sự tồn tại các siêu mặt xác định duy nhất cho lớp đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính mức 1.

3. Trên cơ sở chứng minh dạng Định lý cơ bản thứ hai (Định lý 3.2.1), đưa ra định lý mới về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát (Định lý 3.2.2) với điều kiện đại số liên quan đến bội của không điểm.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo:

1. Nghiên cứu một số dạng Định lý duy nhất mới các hàm phân hình với điều kiện đại số liên quan đến giá trị khuyết tại các cực điểm.

2. Tiếp tục nghiên cứu các dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt hoặc rút gọn và sử dụng các kết quả về các dạng định lý này để nghiên cứu vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình. Xây dựng một số dạng siêu mặt xác định duy nhất các đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án

- AC1. [6] An V. H., Chanthaphone P. (2024), Uniqueness of L -functions sharing finite sets with meromorphic functions having Deficient Poles, *Thang Long Journal of Science - Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 3, No. 2, pp. 1-15.
- AC2. [7] An V. H., Chanthaphone P. (2024), Value distribution of L -functions and meromorphic functions sharing finite sets, *South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 20, No. 3, pp. 147-164.
- PAC1. [43] Phuong H. T., An V. H., Chanthaphone P. (2025), Uniqueness problem for level-1 linearly non-degenerate holomorphic mappings concerning hypersurfaces, *Complex Analysis and Operator Theory*, Vol. 19, Article number 88.
- PC1. [44] Phuong H. T., Chanthaphone P. (2025), A uniqueness theorem related multiple values for holomorphic curves on annuli sharing hypersurfaces in subgeneral position, *Filomat*, Vol. 39, No. 20, pp. 6873-6885.