

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

—o0o—

LÊ THỊ HỒNG HẠNH

SỰ TỒN TẠI VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA NGHIỆM
ĐỐI VỚI BÀI TOÁN ELLIPTIC SUY BIẾN

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2026

Luận án được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học:

TS. Dương Trọng Luyện, Trường Đại học Hoa Lư

TS. Phạm Thị Thủy, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Phản biện 1: PGS. TS. Dương Anh Tuấn

Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Thị Ngọc Oanh

Phản biện 3: TS. Bùi Thế Hùng

Luận án đã được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp trường họp tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên

Vào hồi 8h30 ngày 9 tháng 02 năm 2026

Có thể tìm hiểu luận án tại: Thư viện Quốc Gia Việt Nam hoặc Thư viện Trường Đại học Sư phạm, Trung tâm số - Đại học Thái nguyên

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài và tổng quan nghiên cứu

Phương trình đạo hàm riêng là một lĩnh vực trọng tâm của toán học hiện đại, đóng vai trò nền tảng trong việc mô hình hóa nhiều hiện tượng trong khoa học và kỹ thuật. Phương trình đạo hàm riêng mô tả các hiện tượng trong thực tế từ mô tả các hiện tượng vật lý như sự truyền nhiệt, dao động sóng, các phản ứng hoá học, các mô hình quần thể trong sinh học, đến các bài toán trong tài chính và xử lý ảnh. Đặc biệt, phương trình elliptic là một lớp quan trọng trong số đó, thường được dùng để mô hình hóa các trạng thái cân bằng hoặc các hiện tượng không phụ thuộc vào thời gian. Mặt khác, nhiều lớp phương trình elliptic phi tuyến quan trọng cũng xuất phát từ các bài toán hình học vi phân. Vì vậy việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ. Trong quá trình nghiên cứu các phương trình, hệ phương trình elliptic đã thúc đẩy và cung cấp các ý tưởng cho sự phát triển các công cụ và kết quả của nhiều chuyên ngành giải tích như: Lý thuyết các không gian hàm, Giải tích hàm phi tuyến, Phép tính biến phân, Hơn nữa, sự phát triển của các chuyên ngành này dẫn đến những tiến bộ lớn trong lý thuyết phương trình elliptic. Các nghiên cứu về phương trình elliptic đã được đề cập khá nhiều trong các công trình Friedman (1958), L. Hörmander (1966), H. Brezis và L. Nirenberg (1983), B. Helffer và J. Nourrigat (1985) và các trích dẫn thêm ở trong đó. Gần đây một số các chuyên gia ngoài nước chuyển sang nghiên cứu phương trình elliptic suy

biến phi tuyến trong các công trình V. V. Grushin (1970, 1971), D. S. Jerison và J. M. Lee (1987), T. Bieske (2002), A. E. Kogoj, E. Lanconelli và S. Sonner(, 2012 - 2016), C.J. Xu (1992) và các trích dẫn ở trong đó.

Nghiên cứu các phương trình và hệ phương trình elliptic tổng quát đã đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết phương trình vi phân. Hiện nay các kết quả theo hướng này đã tương đối hoàn chỉnh. Cùng với sự phát triển không ngừng của toán học cũng như khoa học kỹ thuật nhiều bài toán liên quan tới độ trơn của nghiệm các phương trình và hệ phương trình không elliptic đã xuất hiện. Có một số lớp phương trình, trong đó có lớp phương trình elliptic suy biến, ở một khía cạnh nào đó cũng có một số tính chất giống với phương trình elliptic. Trong những năm gần đây một số các chuyên gia ngoài nước chuyển sang nghiên cứu phương trình elliptic suy biến phi tuyến trong các công trình V. V. Grushin (1970,1971), D. S. Jerison và J. M. Lee(1987), A. E. Kogoj và E. Lanconelli (2012) và các trích dẫn các bài báo đó. Một số tác giả trong nước cũng đạt được các kết quả sâu sắc trong việc nghiên cứu các phương trình, hệ các phương trình elliptic suy biến phi tuyến, phương trình parabolic suy biến, và phương trình hyperbolic suy biến trong các công trình của các tác giả như: N. M. Chương, N. M. Trí, P. T. Thủy, N. T. C. Thuy, C. T. Anh, T. D. Kế và các trích dẫn thêm ở trong đó. Các kết quả đã đạt được là: sự tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán biên cho phương trình elliptic suy biến, sự tồn tại nghiệm, đáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình parabolic suy biến, sự tồn tại nghiệm, đáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình hyperbolic suy biến.

Từ việc hệ thống một số kết quả đã đạt được đối với phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến, chúng ta nhận thấy vẫn còn nhiều vấn đề mở cần được nghiên cứu và hoàn chỉnh, chẳng hạn:

- Tính đa nghiệm và một số tính chất của nghiệm đối với phương

trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng

$$\begin{aligned} -\Delta_\gamma v &= f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbb{D}$ là miền bị chặn với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $f(X, \tau)$ là lẻ theo τ và $g(X, \tau)$ là số hạng nhiễu của phương trình.

• Sự tồn tại nghiệm và không tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng:

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

với $\mathbb{D}$ là miền bị chặn với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ và toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ có dạng $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z$ ở đây $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$ và $N = N_1 + N_2 + N_3$, $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$.

• Sự tồn tại nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm yếu đối với hệ phương trình elliptic suy biến dạng:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X) v = \mathcal{H}(X, v, w) \quad \text{với } X \in \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X) w = \mathcal{K}(X, v, w) \quad \text{với } X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 \quad \text{khi } |X| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

trong đó $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot), \mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$ là các hàm cho trước

Với các vấn đề mở ở trên, trong luận án này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu, không tồn tại nghiệm yếu, tính đa nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm yếu đối với phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến.

2. Mục đích nghiên cứu

Trong Luận án này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu, không tồn tại nghiệm, tính đa nghiệm và một số tính chất nghiệm của

nghiệm yếu đối với phương trình elliptic suy biến trong miền bị chặn, và đối với hệ phương trình elliptic suy biến trong toàn không gian, cụ thể:

Nội dung 1: Nghiên cứu sự nhiều nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm yếu đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng

$$\begin{aligned} -\Delta_\gamma v &= f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbb{D}$ là một miền bị chặn có chứa gốc tọa độ với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $f(X, \tau)$ là lẻ theo τ và $g(X, \tau)$ là số hạng nhiều của phương trình.

Nội dung 2: Nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm trong miền hình sao và sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

với $\mathbb{D}$ là miền bị chặn có biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ và $\mathbb{R}^N$ và toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ có dạng $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z$ ở đây $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$ và $N = N_1 + N_2 + N_3$, $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$.

Nội dung 3: Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm đối với hệ phương trình elliptic suy biến

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v = \mathcal{H}(X, v, w) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w = \mathcal{K}(X, v, w) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 \quad \text{khi } |X| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

trong đó $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot)$, $\mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$ là các hàm cho trước.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu chính của luận án là phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến. Cụ thể, luận án tập trung vào

việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, không tồn tại nghiệm, vấn đề nhiều nghiệm và một số tính chất của nghiệm đối với phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến.

Phạm vi nghiên cứu của luận án được chia thành ba phần chính, tương ứng với ba chương nội dung:

1. Phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính trong miền bị chặn:

- *Đối tượng:* Phương trình có dạng

$$\begin{aligned} -\Delta_\gamma v &= f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}. \end{aligned}$$

- *Phạm vi:* Luận án tập trung nghiên cứu vấn đề đa nghiệm và một số tính chất của nghiệm yếu. Miền D được xét là một miền bị chặn có chứa gốc tọa độ và biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$.

2. Phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính trong miền bị chặn:

- *Đối tượng:* Bài toán biên có dạng

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}. \end{aligned}$$

- *Phạm vi:* Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường và sự không tồn tại nghiệm trong miền hình sao.

3. Hệ phương trình elliptic suy biến trong toàn không gian $\mathbb{R}^N$:

- *Đối tượng:* Hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v = \mathcal{H}(X, v, w) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w = \mathcal{K}(X, v, w) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 \quad \text{khi } |X| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

với điều kiện $v(X), w(X) \rightarrow 0$ khi $|X| \rightarrow \infty$.

- *Phạm vi*: Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm, đồng thời đánh giá nghiệm trong không gian Sobolev có trọng tương ứng.

4. Phương pháp nghiên cứu và công cụ nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết cơ bản trong lĩnh vực giải tích toán học, vận dụng các công cụ của giải tích hàm phi tuyến và lý thuyết không gian Sobolev:

- Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu và vấn đề nhiều nghiệm cũng như một số tính chất nghiệm của nghiệm yếu đối với lớp phương trình, hệ phương trình elliptic suy biến, chúng tôi sử dụng các công cụ của giải tích hàm phi tuyến và lý thuyết phương trình đạo hàm riêng phi tuyến. Cụ thể như một số định lý về điểm tới hạn (Định lý qua đèo, Định lý biến dạng), Định lý nhúng kiểu Sobolev có trọng.
- Để nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm chúng tôi xây dựng các đồng nhất thức kiểu Pohozaev tương ứng đối với toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ và khai thác cấu trúc hình học của miền đang xét để chỉ ra sự không tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán.

5. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học và góp phần vào hoàn thiện lý thuyết về lớp phương trình elliptic suy biến, hệ phương trình elliptic suy biến. Các kết quả của luận án được công bố trong 04 bài báo trên các tạp chí chuyên ngành quốc tế gồm 01 bài SCIE, 02 bài ESCI và 01 bài trong tuyển tập ISAAC-ICMAM 2024.

Hơn nữa, các kết quả này đã được báo cáo tại:

- Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên;

- Hội thảo “Toán học và các ngành liên quan” của Viện Toán học được tổ chức tại Trường Đại học Hoa Lư tháng 4/2024.

6. Cấu trúc luận án

Ngoài các phần mở đầu, tổng quan, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình được công bố và danh mục tài liệu tham khảo, luận án bao gồm 4 chương.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả phục vụ cho các chương sau, với các nội dung cụ thể như sau: Khái niệm toán tử elliptic suy biến, các ví dụ, một số không gian hàm tương ứng với toán tử elliptic suy biến, các kết quả về phép nhúng tương ứng của các không gian đó và một số định lý điểm tới hạn.

1.1. Toán tử elliptic suy biến

Trong mục này chúng tôi trình bày khái niệm toán tử elliptic suy biến và đưa ra hai lớp toán tử elliptic suy biến là toán tử Δ_γ và toán tử $\Delta_{k_1, k_2}^{k_3, k_4}$.

Xét toán tử vi phân

$$\mathcal{P}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha(x) D^\alpha,$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad D = (D_1, \dots, D_n), \quad D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$D^\alpha = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$, $f_\alpha(x) \in C(\mathbb{D})$ là các hàm trơn cho trước.

Ta đặt

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad \text{với } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Hàm số $\mathcal{P}(\alpha, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha(x) \xi^\alpha$ được gọi là biểu trưng của toán tử $P(x, D)$.

Hàm số $\mathcal{P}_m(\alpha, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} f_\alpha(x) \xi^\alpha$ được gọi là biểu trưng chính của toán tử $\mathcal{P}(x, D)$. Khi đó toán tử $P(x, D)$ được gọi là elliptic tại $x \in \mathbb{D}$ nếu với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\mathcal{P}_m(x, \xi) = 0$ khi và chỉ khi $\xi = 0$.

Toán tử $\mathcal{P}(x, D)$ được gọi là elliptic trên miền $\mathbb{D}$ nếu nó elliptic tại mọi $x \in \mathbb{D}$.

Chúng tôi xét toán tử

$$\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z,$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{N_2}) \in \mathbb{R}^{N_2}$,

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_{N_3}) \in \mathbb{R}^{N_3}, k_1 + k_2 + k_3 + k_4 > 0, k_i \geq 0, i = 1, \dots, 4.$$

Toán tử có biểu trưng và biểu trưng chính là

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}(x, y, z, \xi) = & - \left[\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{N_1}^2 + \xi_{N_1+1}^2 + \dots + \xi_{N_1+N_2}^2 \right. \\ & \left. + (\xi_{N_1+N_2+1}^2 + \dots + \xi_{N_1+N_2+N_3}^2) |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Xét tại điểm $M_0(x^0, y^0, z^0)$, nếu $x^0 \neq 0$ và $y^0 \neq 0$ thì $\mathcal{P}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}(x, y, z, \xi) = 0$ khi và chỉ khi $\xi_i = 0, i = 1, \dots, N_1 + N_2 + N_3$. Do vậy $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ là toán tử elliptic tại M_0 .

Nếu $x^0 = 0$ hoặc $y^0 = 0$ thì tồn tại $\xi = (0, \dots, 0, 1) \neq 0$ mà $\mathcal{P}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}(x, y, z, \xi) = 0$. Do vậy $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ không là toán tử elliptic. Nên toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ là toán tử elliptic suy biến trong miền $\mathbb{D}$, trong đó $\mathbb{D}$ là một miền trong không gian $\mathbb{R}^{N_1+N_2+N_3}$ có giao khác rỗng với hai mặt phẳng cắt nhau $x = 0$ và $y = 0$.

Tiếp theo chúng tôi sẽ giới thiệu toán tử Δ_γ -Laplace lớp này là tổng quát của toán tử Grushin nhưng lớp toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ nói trên không thỏa mãn lớp toán tử này. Xét toán tử

$$\Delta_\gamma := \sum_{\ell=1}^N \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\gamma_\ell^2 \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right),$$

với

$$\begin{aligned}\gamma_\ell : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x_1, \dots, x_N) &\longmapsto \gamma_\ell(x_1, \dots, x_N) = \gamma_\ell(X)\end{aligned}$$

thỏa mãn γ_ℓ là các hàm liên tục với $\ell = 1, 2, \dots, N$ và $\gamma_\ell > 0$, với $\ell = 1, 2, \dots, N$ trong $\mathbb{R}^N \setminus \Sigma$, ở đó

$$\Sigma := \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \prod_{\ell=1}^N x_\ell = 0 \right\}.$$

Hơn nữa các hàm $\gamma_\ell(X)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) Tồn tại nhóm $\{\delta_s\}_{s>0}$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned}\delta_s : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x_1, \dots, x_N) &\longmapsto \delta_s(x_1, \dots, x_N) = (s^{t_1}x_1, \dots, s^{t_N}x_N),\end{aligned}$$

với $1 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$, sao cho γ_j là δ_s -thuần nhất bậc $t_\ell - 1$, tức là với mọi $X \in \mathbb{R}^N, s > 0$ ta có

$$\gamma_\ell(\delta_s(X)) = s^{t_\ell-1} \gamma_\ell(X), \ell = 1, \dots, N$$

ii) $\gamma_1(X) \equiv 1, \gamma_\ell(X) = \gamma_\ell(x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1}), \ell = 2, \dots, N$;

iii) Với mỗi $X \in \mathbb{R}^N$ sao cho $\gamma_\ell(X) = \gamma_\ell(X^*), \ell = 1, 2, \dots, N$, với

$$X^* = (|x_1|, \dots, |x_N|) \text{ nếu } X = (x_1, x_2, \dots, x_N);$$

iv) Tồn tại hằng số $\rho \geq 0$ thỏa mãn

$$0 \leq x_k \partial_{x_k} \gamma_\ell(X) \leq \rho \gamma_\ell(X), \forall k \in \{1, 2, \dots, \ell-1\}, \forall \ell = 2, \dots, N,$$

với mỗi $X \in \overline{\mathbb{R}}_+^N := \{X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_\ell \geq 0, \forall \ell = 1, 2, \dots, N\}$;

Khi đó toán tử Δ_γ là δ_s -thuần nhất bậc hai, tức là

$$\Delta_\gamma(v(\delta_s)(X)) = s^2(\Delta_\gamma v)(\delta_s(X)).$$

Chúng ta định nghĩa $\tilde{N}$ là số chiều thuần nhất của không gian $\mathbb{R}^N$ đối với nhóm $\{\delta_s\}_{s>0}$, tức là

$$\tilde{N} := t_1 + t_2 + \dots + t_N.$$

1.2. Không gian Sobolev có trọng và định lý nhúng

Trong mục này chúng tôi trình bày không gian Sobolev có trọng tương ứng với toán tử suy biến.

1.3. Một số kết quả của lý thuyết điểm tới hạn

Mục này, chúng tôi trình bày một số kết quả về điểm tới hạn và giá trị tới hạn để sau này áp dụng trong chứng minh sự tồn tại nghiệm và vấn đề nhiều nghiệm của bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic suy biến.

1.4. Một số không gian hàm và tính chất

Trong mục này chúng tôi giới thiệu hai lớp không gian hàm và một số tính chất của các lớp không gian hàm này.

Chương 2

Tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu vấn đề nhiều nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm yếu đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính với số hạng phi tuyến và số hạng nhiễu thoả mãn các điều kiện cho trước. Sử dụng phương pháp nhiễu của Rabinowitz, với các điều kiện của các hàm phi tuyến, chúng tôi đã chứng minh được tính đa nghiệm yếu của bài toán, hơn nữa các nghiệm yếu này là âm và dần hội tụ về 0.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. Đặt bài toán

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình elliptic suy biến dạng

$$-\Delta_\gamma v = f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \quad (2.1)$$

$$v = 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \quad (2.2)$$

với $\mathbb{D}$ là miền bị chặn có chứa gốc tọa độ và biên $\partial\mathbb{D}$ là trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, ở đây $f : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện

(F1) Tồn tại các hàm số $f_1, f_2 \in C(\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ và các hằng số $C_1 > 0$, $1 < q < 2$ sao cho $f(X, \tau) = f_1(X, \tau) + f_2(X, \tau)$ và

$$|f_1(X, \tau)| \leq C_1 |\tau|^{q-1}, \quad \forall (X, \tau) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}; \quad (2.3)$$

(F2) Tồn tại hằng số $1 < \mu < 2$ thỏa mãn

$$f_1(X, \tau)\tau - \mu F_1(X, \tau) \leq 0, \quad \text{với mọi } (X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R},$$

$$\text{ở đó } F_1(X, \tau) := \int_0^\tau f_1(x, s) ds;$$

(F3) Tồn tại các hằng số $C_2 > 0$, $1 < q_1 < 2$ và $2 < q_2 < 2_\gamma^*$ thỏa mãn

$$F_1(X, \tau) \geq C_2(|\tau|^{q_1} - |\tau|^{q_2}), \quad (X, \tau) \in \mathbb{D}_0 \times \mathbb{R};$$

ở đây $\mathbb{D}_0$ là một tập con mở không rỗng trong $\mathbb{D}$;

(F4) Tồn tại các hằng số $C_3 > 0$ và $2 < q_3 < 2_\gamma^*$ thỏa mãn

$$|f_2(X, \tau)| \leq C_3 |\tau|^{q_3-1}, \quad \text{với mọi } (X, \tau) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R};$$

(F5) Hàm $f_i(X, \tau)$ là lẻ theo τ với mỗi $X \in \mathbb{D}$ tức là với mọi $(X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$ ta có $f_i(X, \tau) = -f_i(X, -\tau)$, $i = 1, 2$;

(G) $g \in C(\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ và tồn tại các hằng số $C_3 > 0$, $2 < \theta < 2_\gamma^*$ thỏa mãn

$$|g(X, \tau)| \leq C_3 |\tau|^{\theta-1}, \quad \forall (X, \tau) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R},$$

hơn nữa

$$\frac{q}{2-q} > \frac{\tilde{N}}{\theta-2}. \quad (2.4)$$

2.2. Tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính

Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày kết quả chính và chứng minh kết quả chính của chương. Trước tiên, chúng tôi trình bày định lý về tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính.

Định lý 2.1. *Giả sử các hàm f và g thỏa mãn các điều kiện (F1) đến (F5) và (G). Khi đó bài toán (2.1)–(2.2) có một dãy nghiệm yếu âm $\{v_n\}_{n=1}^\infty$, thỏa mãn $\|v_n\|_{S^2_{\gamma,0}(\mathbb{D})} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.*

Chương 3

Sự tồn tại và không tồn tại nghiệm bài toán biên elliptic suy biến

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm trong miền hình sao và sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng:

$$-\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v = g(X, v) \text{ trong miền } \mathbb{D}, \quad (3.1)$$

$$v = 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \quad (3.2)$$

trong đó $\mathbb{D}$ là miền bị chặn chứa gốc toạ độ và biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ với $N \geq 3$ và toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ có dạng

$$\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z$$

với $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$ và $N = N_1 + N_2 + N_3, k_i \geq 0, 1 \dots, 4$.

Nội dung chính của chương này là xây dựng đồng nhất thức kiểu Pohozeav cho bài toán, từ đó chỉ ra trường hợp hàm phi tuyến để phương trình không có nghiệm không tầm thường. Hơn nữa, sử dụng phương pháp biến phân và các định lý về điểm tới hạn chúng ta chỉ ra sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường ứng với một lớp hàm phi tuyến.

Nội dung của chương gồm hai phần

- Phần thứ nhất: Trình bày kết quả sự không tồn tại nghiệm cổ điển không tầm thường.

- Phần thứ hai: Trình bày kết quả sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường.

Nội dung của chương này được viết dựa vào công trình [2] trong Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. Sự không tồn tại nghiệm không tầm thường

Trong mục này, chúng tôi xây dựng đồng nhất thức kiểu Pohozeav từ đó chỉ ra lớp hàm phi tuyến đề bài toán (3.1)-(3.2) chỉ có nghiệm tầm thường $v \equiv 0$ trong miền hình sao.

Định nghĩa 3.1. Hàm $v(X)$ được gọi là nghiệm cổ điển của bài toán (3.1)-(3.2) nếu $v(X) \in \Lambda^2(\overline{\mathbb{D}})$ và thỏa mãn các phương trình của bài toán (3.1)-(3.2), tức là

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \text{ trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

Khi đó chúng ta có đồng nhất thức kiểu Pohozeav.

Định lý 3.1. Giả sử $g(X, t) = g(t)$ và $v(X) \in \Lambda^2(\overline{\mathbb{D}})$ là nghiệm của bài toán (3.1)-(3.2). Khi đó ta có

$$\int_{\mathbb{D}} \left(N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} G(v) - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} - 2}{2} g(v)v \right) dX = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} \nu_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \tilde{\nu}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 ds, \quad (3.3)$$

trong đó $\nu := (\nu_{x_1}, \dots, \nu_{x_{N_1}}, \nu_{y_1}, \dots, \nu_{y_{N_2}}, \nu_{z_1}, \dots, \nu_{z_{N_3}})$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên biên của $\mathbb{D}$ và

$$\begin{aligned} \nu_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} &:= |\nu_x|^2 + |\nu_y|^2 + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 |\nu_z|^2, \\ \tilde{\nu}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} &:= (x, \nu_x) + (y, \nu_y) + (1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4)(z, \nu_z) \\ (x, \nu_x) &:= \sum_{i=1}^{N_1} x_i \nu_i; (y, \nu_y) := \sum_{j=1}^{N_2} y_j \nu_j; (z, \nu_z) := \sum_{\ell=1}^{N_3} z_\ell \nu_\ell, G(\tau) := \int_0^\tau g(t) dt, \end{aligned}$$

$$|\nu_x|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} |\nu_i|^2; |\nu_y|^2 = \sum_{j=1}^{N_2} |\nu_j|^2; |\nu_z|^2 = \sum_{\ell=1}^{N_3} |\nu_\ell|^2, dX := dx dy dz.$$

Định nghĩa 3.2. Miền $\mathbb{D}$ được gọi là $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ – hình sao tại gốc tọa độ nếu gốc tọa độ $O \in \mathbb{D}$ và bất đẳng thức $\tilde{\nu}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \geq 0$ đúng với mọi điểm trên biên của $\mathbb{D}$.

Sử dụng Định lý 3.1, chúng ta đưa ra một số trường hợp riêng của hàm g mà bài toán (3.1)-(3.2) chỉ có nghiệm tầm thường, cụ thể như sau

Hệ quả 3.1. Giả sử $g(X, \tau) \equiv g(\tau)$ và $\mathbb{D}$ là $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ – hình sao tại gốc tọa độ và

$$N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} G(\tau) - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} - 2}{2} g(\tau) \tau < 0 \quad (3.4)$$

với mỗi $\tau \neq 0$. Khi đó bài toán (3.1)-(3.2) không có nghiệm không tầm thường $v \in \Lambda^2(\overline{\mathbb{D}})$. Hơn nữa, nếu (3.4) là đúng với $\tau > 0$ khi đó bài toán (3.1)-(3.2) không có nghiệm dương không tầm thường $v \in \Lambda^2(\overline{\mathbb{D}})$.

Hệ quả 3.2. Giả sử $\mathbb{D}$ là $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ – hình sao tại gốc tọa độ và

$$g(X, \tau) = \lambda \tau + |\tau|^p \tau \text{ với } \lambda \leq 0, p > \frac{4}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} - 2}.$$

Khi đó bài toán (3.1)-(3.2) chỉ có nghiệm tầm thường $v \equiv 0$.

3.2. Sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường

Trong mục này, chúng tôi xây dựng một lớp hàm phi tuyến mà bài toán (3.1)-(3.2) có nghiệm yếu không tầm thường. Giả sử lớp hàm phi tuyến thỏa mãn các điều kiện sau:

(H1) $g : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Carathéodory thỏa mãn tồn tại $q_1 \in (2, N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2})$, $\omega \in \mathcal{K}_{2, q_1}$ và các hằng số dương C_0 sao cho

$$|g(X, \tau)| \leq |\omega(X) \tau|^{q_1-1} + C_0 \quad \forall (X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R};$$

(H2) Tồn tại $C \in [0, +\infty)$ và $h \in L^1(\mathbb{D})$ sao cho $|g(X, \xi)| \leq h(X)$ với mọi $X \in \mathbb{D}$ và $|\tau| \leq C$;

(H3) Tồn tại một hàm không âm k trong $L^{q_2}(\mathbb{D})$, $q_2 > \frac{N^{k_1, k_2}_{k_3, k_4}}{2}$ sao cho $k(X) \leq \frac{g(X, \tau)}{\tau}$ với mỗi $(X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$;

(H4) $g(X, 0) = 0$ với mỗi $X \in \mathbb{D}$ và giới hạn

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{g(X, \tau)}{\tau} = 0 \text{ đều theo } X \in \mathbb{D};$$

(H5) $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{g(X, \tau)}{\tau} = +\infty$ hoặc $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{g(X, \tau)}{\tau} = +\infty$ h.k.n trong $\mathbb{D}$;

(H6) $\frac{g(X, \tau)}{\tau}$ tăng khi $\tau \geq C$ và giảm khi $\tau \leq -C$ với mọi $X \in \mathbb{D}$.

Trước tiên, ta đưa ra khái niệm nghiệm yếu của bài toán.

Định nghĩa 3.3. Hàm v thuộc không gian $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.1)-(3.2) nếu với mọi $\varphi \in \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ ta có đồng nhất thức sau

$$\int_{\mathbb{D}} \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \cdot \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi dX - \int_{\mathbb{D}} g(X, v(X)) \varphi(X) dX = 0.$$

Định lý 3.2. Giả sử g thỏa mãn các điều kiện (H1)-(H6). Khi đó bài toán (3.1)-(3.2) có một nghiệm yếu không tầm thường.

Chương 4

Sự tồn tại và tính chất nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu và một số tính chất nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến dạng:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v = \mathcal{H}(X, v, w), & X \in \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w = \mathcal{K}(X, v, w), & X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

trong đó $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot), \mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$ là các hàm cho trước. Vận dụng phương pháp biến phân chúng ta đã chứng minh được một lớp hàm phi tuyến tương ứng mà bài toán có nghiệm yếu không tầm thường và đánh giá nghiệm trong không gian Sobolev có trọng tương ứng.

Nội dung của chương gồm hai phần

- Phần thứ nhất: Trình bày kết quả sự tồn tại nghiệm và tính đa nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến có tăng trưởng tới hạn.

- Phần thứ hai: Trình bày kết quả sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến có tăng trưởng dưới tới hạn.

Nội dung của chương này được viết dựa vào công trình [3,4] trong Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. Sự tồn tại nghiệm và tính đa nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến có tăng trưởng tối hạn

Trong mục này chúng ta nghiên cứu sự tồn tại và tính đa nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v &= h(X)|v|^{\tilde{2}^*-2}v + H_v(X, v, w), X \in \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w &= h(X)|w|^{\tilde{2}^*-2}w + H_w(X, v, w), X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) &\rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.1)$$

trong đó $\kappa(X)$, $h(X)$ và $H(X, v, w)$ thỏa mãn các điều kiện

(B0) $\kappa \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ và tồn tại hằng số $M > 0$ thỏa mãn

$$\kappa(0) = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} \kappa(X) = 0, Vol(\{X \in \mathbb{R}^N, \kappa(X) \leq M\}) < \infty;$$

(G0) $h(X) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 < \inf_{X \in \mathbb{R}^N} h(X) \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^N} h(X) < \infty$;

(K1) $H \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ thỏa mãn $H_s(X, s, t) = o(|s| + |t|)$,
 $H_t(X, s, t) = o(|s| + |t|)$ đều với $X \in \mathbb{R}^N$ khi $|s| + |t| \rightarrow 0$;

(K2) Tồn tại các hằng số $\tilde{C}_0 > 0$ và $q \in (2, \tilde{2}^*)$ sao cho

$$\begin{aligned} |H_s(X, s, t)| &\leq \tilde{C}_0(1 + |s|^{q-1} + |t|^{q-1}), \\ |H_t(X, s, t)| &\leq \tilde{C}_0(1 + |s|^{q-1} + |t|^{q-1}); \end{aligned}$$

(K3) Tồn tại các hằng số $\tilde{C}_1 > 0$, $q_1, q_2 > 2$ và $\mu \in (2, \tilde{2}^*)$ sao cho với mọi $(X, s, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$, ta có

$$|H(X, s, t)| \geq \tilde{C}_1(|s|^{q_1} + |t|^{q_2}) \text{ và}$$

$$0 < \mu H(X, s, t) \leq H_s(X, s, t)s + H_t(X, s, t)t.$$

(K4) $H_s(X, -s, t) = -H_s(X, s, t)$, $H_s(X, s, -t) = -H_s(X, s, t)$ với mọi $(X, s, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$.

Đặt $\lambda = \varepsilon^{-2}$. Khi đó bài toán (4.1) trở thành

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \lambda \kappa(X) v &= \lambda h(X) |v|^{\tilde{2}^*-2} v + \lambda H_v(X, v, w), X \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \lambda \kappa(X) w &= \lambda h(X) |w|^{\tilde{2}^*-2} w + \lambda H_w(X, v, w), X \in \mathbb{R}^N, \quad (4.2) \\ v(X), w(X) &\rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do bài toán (4.1) và bài toán (4.2) là tương đương. Chúng ta định nghĩa không gian hàm tương ứng với bài toán như sau:

Hàm (v, w) được gọi là nghiệm yếu của bài toán (4.2) nếu nó thỏa mãn $(v, w) \in \mathbb{H}$ và với mọi $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}$ ta có đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \cdot \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi + \lambda \kappa(X) v \varphi + \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w \cdot \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi + \lambda \kappa(X) w \psi \right) dX \\ = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (H_v(X, v, w) \varphi + H_w(X, v, w) \psi) dX \\ + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v|^{\tilde{2}^*-2} v \varphi + |w|^{\tilde{2}^*-2} w \psi \right) dX. \end{aligned}$$

Khi đó chúng ta có các khẳng định sau:

Định lý 4.1. *Giả sử κ, h thỏa mãn các điều kiện (B0), (G0) và (K1)–(K4). Khi đó với $\rho > 0$, tồn tại $\Lambda_\rho > 0$ thỏa mãn nếu $\lambda > \Lambda_\rho$ thì bài toán (4.2) có nghiệm yếu thỏa mãn $(v_\lambda, w_\lambda) \rightarrow (0, 0)$ trong $\mathbb{H}$ khi $\lambda \rightarrow \infty$ và*

$$\begin{aligned} \frac{\mu - 2}{2\mu} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v_\lambda \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w_\lambda \right|^2 + \lambda \kappa(X) (|v_\lambda|^2 + |w_\lambda|^2) \right) dX \\ \leq \rho \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}, \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v_\lambda|^{\tilde{2}^*} + |w_\lambda|^{\tilde{2}^*} \right) dX + \frac{\mu - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} H(X, v_\lambda, w_\lambda) dX \\ \leq \rho \lambda^{-\frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Định lý 4.2. *Giả sử κ, h thỏa mãn các điều kiện (B0), (G0) và (K1)–(K4). Khi đó với mỗi $m \in \mathbb{N}$ và $\rho > 0$, tồn tại $\Lambda_{m\rho} > 0$ sao cho $\lambda > \Lambda_{m\rho}$ thì bài toán (4.2) có m nghiệm (v_λ, w_λ) thỏa mãn đánh giá (4.3), (4.4) trong Định lý 4.1 và $(v_\lambda, w_\lambda) \rightarrow (0, 0)$ trong $\mathbb{H}$ khi $\lambda \rightarrow \infty$.*

4.2. Sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến tăng trưởng dưới tới hạn

Trong này, chúng ta nghiên cứu hệ phương trình elliptic suy biến có dạng

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v &= h(X)|v|^{p-2}v + \frac{a}{a+b}F(X)|v|^{a-2}v|w|^b, X \in \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w &= k(X)|w|^{p-2}w + \frac{b}{a+b}F(X)|v|^a|w|^{b-2}w, X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) &\rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{4.5}$$

trong đó $2 < p < \tilde{2}^*$, $a > 1, b > 1$ thỏa mãn $a + b = \tilde{2}^*$ và chúng ta giả sử $\kappa(X), F(X), h(X)$ và $k(X)$ thỏa mãn các điều kiện

(A1) $\kappa \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, sao cho $\kappa(0) = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} \kappa(X) = 0$ và với mỗi $M > 0$ ta có

$$Vol(\{X \in \mathbb{R}^N, \kappa(X) \leq M\}) < \infty;$$

(A2) $F(X) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 < \inf_{X \in \mathbb{R}^N} F(X) \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^N} F(X) < \infty$;

(A3) $h(X), k(X)$ là các hàm dương và thỏa mãn

$$0 < h_0 = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} h(X) \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^N} h(X) < \infty;$$

$$0 < k_0 = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} k(X) \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^N} k(X) < \infty.$$

Đặt $\lambda = \varepsilon^{-2}$. Khi đó bài toán (4.5) trở thành

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \lambda \kappa(X) v &= \lambda h(X) |v|^{p-2} v + \frac{\lambda a}{a+b} F(X) |v|^{a-2} v |w|^b, X \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \lambda \kappa(X) w &= \lambda k(X) |w|^{p-2} w + \frac{\lambda b}{a+b} F(X) |v|^a |w|^{b-2} w, X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) &\rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Do bài toán (4.5) và bài toán (4.6) là tương đương, nên chúng ta chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán (4.6) như sau:

Định lý 4.3. *Giả sử $\kappa(X), F(X), h(X)$ và $k(X)$ thỏa mãn (A1)–(A3). Khi đó với mỗi $\rho > 0$, tồn tại $\Lambda_\rho > 0$ sao cho nếu $\lambda > \Lambda_\rho$, bài toán (4.6) có nghiệm dương (u_λ, v_ρ) thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{aligned} \frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v_\lambda \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w_\lambda \right|^2 + \lambda \kappa(X) (|v_\lambda|^2 + |w_\lambda|^2) \right) dX \\ \leq \rho \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Những kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, không tồn tại nghiệm không tầm thường, tính đa nghiệm và một số tính chất nghiệm của phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến. Các kết quả chính đạt được trong luận án bao gồm:

1. Đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_γ : Chứng minh được tính đa nghiệm của bài toán, hơn nữa các nghiệm này là âm và dần hội tụ về 0 (Định lý 2.1).
2. Đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính chứa toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$. Thứ nhất, xây dựng được đồng nhất thức kiểu Pohozeav cho phương trình trên, từ đó chỉ ra trường hợp hàm phi tuyến để phương trình không có nghiệm không tầm thường. Thứ hai, chứng minh được sự tồn tại nghiệm không tầm thường với một lớp hàm phi tuyến tổng quát (Định lý 3.2).
3. Đối với hệ phương trình elliptic suy biến chứa toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ Chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu và tính đa nghiệm của hệ tương ứng với các lớp hàm phi tuyến $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot)$, $\mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$, hơn nữa còn đánh giá nghiệm trong không gian có trọng tương ứng. Các kết quả đó được thể hiện cụ thể trong các Định lý 4.1, Định lý 4.2 và Định lý 4.3.

2. Đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Liên quan tới chủ đề luận án, những vấn đề sau là mở và theo chúng tôi là đáng quan tâm:

1. Xây dựng đồng nhất thức kiểu Pohozeav cho các miền như miền nón, miền trụ,

2. Nghiên cứu tính trơn của các nghiệm yếu đối với phương trình, hệ phương trình elliptic suy biến.
3. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và tính đa nghiệm của các phương trình elliptic suy biến với các điều kiện biên hỗn hợp.
4. Các mô hình ứng dụng thực tế.

Danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

- [1] Duong Trong Luyen, Le Thi Hong Hanh, Infinitely many solutions for perturbed Δ_γ -Laplace equations, *Georgian Mathematical Journal*, 29(6):863–882, 2022. (SCIE-Q2)
- [2] Le Thi Hong Hanh, Duong Trong Luyen and Nguyen Minh Tri “Non-trivial solutions to boundary value problems for semilinear $\Delta_{\alpha_1, \beta_1}^{\alpha, \beta}$ -differential equations”, ISAAC-ICMAM 2024 Volume, Analysis and PDE from Developing Countries, Research Perspectives of the Ghent Analysis and PDE Center, Springer-Birkhäuser 2025.
- [3] Duong Trong Luyen, Le Thi Hong Hanh and Pham Thi Thuy, Existence and multiplicity of solutions to perturbed $\Delta_{\alpha_1, \beta_1}^{\alpha, \beta}$ -Laplacian system in $\mathbb{R}^N$ involving critical nonlinearity, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 73, 2749–2765 (2024). (ESCI-Q2)
- [4] Le Thi Hong Hanh, Duong Trong Luyen, Existence of positive solutions to perturbed for semilinear strongly degenerate elliptic problems involving critical growth, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, Volume 95, 2025, 1–14. (ESCI-Q4)