

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

—o0o—

LÊ THỊ HỒNG HẠNH

SỰ TỒN TẠI VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA NGHIỆM
ĐỐI VỚI BÀI TOÁN ELLIPTIC SUY BIẾN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2026

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

—o0o—

LÊ THỊ HỒNG HẠNH

SỰ TỒN TẠI VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA NGHIỆM
ĐỐI VỚI BÀI TOÁN ELLIPTIC SUY BIẾN

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9460102

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS. Dương Trọng Luyện

TS. Phạm Thị Thủy

THÁI NGUYÊN - 2026

LỜI CẢM ƠN

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại khoa Toán thuộc trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của TS. Dương Trọng Luyện và TS. Phạm Thị Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy cô hướng dẫn. Tác giả xin trân trọng cảm ơn GS.TSKH. Vũ Ngọc Phát, PGS.TS. Trần Đình Kế, PGS.TS. Nguyễn Như Thắng, PGS.TS. Vũ Trọng Lương, PGS.TS. Nguyễn Văn Thìn, PGS.TS. Hà Trần Phương, TS. Trần Đình Hùng và các thầy, cô phản biện độc lập đã dành nhiều thời gian, tâm huyết đóng góp những ý kiến quý báu, giúp luận án được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo cùng các anh chị em nghiên cứu sinh trong seminar Bộ môn Giải tích khoa Toán, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên đã luôn trao đổi, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin cảm ơn Lãnh đạo trường, các anh chị em Bộ môn Toán, khoa Sư phạm trung học, trường Đại học Hoa Lư cùng các đồng nghiệp đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Sau cùng, tác giả xin gửi lời tri ân chân thành tới gia đình và những người thân yêu – những người luôn ở bên cạnh, tin tưởng, động viên và tiếp thêm cho tác giả nguồn động lực tinh thần to lớn trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu. Tác giả cũng xin cảm ơn anh chị em, bạn bè đã luôn giúp đỡ, đồng hành và khích lệ để tác giả hoàn thành luận án.

Thái Nguyên, tháng 02 năm 2026

Nghiên cứu sinh: Lê Thị Hồng Hạnh

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả này được làm dưới sự hướng dẫn của TS. Dương Trọng Luyện và TS. Phạm Thị Thủy. Các kết quả trong luận án viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác.

Thái Nguyên, tháng 02 năm 2026

Nghiên cứu sinh: Lê Thị Hồng Hạnh

Mục lục

Lời cảm ơn	i
Lời cam đoan	ii
Một số quy ước và kí hiệu	3
Mở đầu	4
Chương 1 Kiến thức chuẩn bị	15
1.1. Toán tử elliptic suy biến	15
1.2. Không gian Sobolev có trọng và định lý nhúng	18
1.3. Một số kết quả của lý thuyết điểm tới hạn	22
1.4. Một số không gian hàm và tính chất	25
Chương 2 Tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính	27
2.1. Đặt bài toán	27
2.2. Tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính	30
Chương 3 Sự tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán biên elliptic suy biến	54
3.1. Sự không tồn tại nghiệm không tầm thường	55
3.2. Sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường	59
3.3. Ví dụ	69

Chương 4	Sự tồn tại và tính chất nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến	72
4.1.	Sự tồn tại nghiệm và tính đa nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến có tăng trưởng tới hạn	73
4.2.	Sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến tăng trưởng dưới tới hạn	89
Kết luận và kiến nghị		100
	Những kết quả đạt được	100
	Đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo	100
Danh mục các công trình khoa học liên quan đến luận án		102
Tài liệu tham khảo		103

MỘT SỐ QUY ƯỚC VÀ KÍ HIỆU

Trong toàn bộ luận án, ta thống nhất một số kí hiệu như sau:

$\mathbb{R}^N$	Không gian vectơ thực N chiều.
$\mathbb{D}$	Là một miền trong không gian $\mathbb{R}^N$.
$ x $	Chuẩn Euclid của phần tử x trong không gian $\mathbb{R}^N$.
$C^k(\mathbb{D})$	Không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trên miền $\mathbb{D}$.
$L^p(\mathbb{D})$	Không gian các hàm lũy thừa bậc p khả tích Lebesgue trên miền $\mathbb{D}$.
$\mathbb{B}'$	Không gian đối ngẫu của không gian Banach $\mathbb{B}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Đối ngẫu giữa $\mathbb{B}$ và $\mathbb{B}'$.
$(\cdot, \cdot)_{\mathbb{B}}$	Tích vô hướng trong không gian $\mathbb{B}$.
Id	Ánh xạ đồng nhất.
$\rightarrow$	Hội tụ yếu.
$\hookrightarrow$	Phép nhúng liên tục.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Phép nhúng compact.
$\text{Vol}(\mathbb{D})$	Độ đo Lebesgue của tập $\mathbb{D}$ trong không gian $\mathbb{R}^N$.
Δ_x	Toán tử Laplace theo biến x trong $\mathbb{R}^{N_1}$: $\Delta_x := \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
Δ_y	Toán tử Laplace theo biến y trong $\mathbb{R}^{N_2}$: $\Delta_y := \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$.
Δ_z	Toán tử Laplace theo biến z trong $\mathbb{R}^{N_3}$: $\Delta_z := \sum_{l=1}^{N_3} \frac{\partial^2}{\partial z_l^2}$.
h.k.n	Hầu khắp nơi.

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài và tổng quan nghiên cứu

Phương trình đạo hàm riêng là một lĩnh vực trọng tâm của toán học hiện đại, đóng vai trò nền tảng trong việc mô hình hóa nhiều hiện tượng trong khoa học và kỹ thuật. Phương trình đạo hàm riêng là mô hình toán học cụ thể các hiện tượng trong thực tế của các hiện tượng vật lý như sự truyền nhiệt, dao động sóng, các phản ứng hoá học, các mô hình quần thể trong sinh học, đến các bài toán trong tài chính và xử lý ảnh. Đặc biệt, phương trình elliptic là một lớp quan trọng trong số đó, thường được dùng để mô hình hóa các trạng thái cân bằng hoặc các hiện tượng không phụ thuộc vào thời gian. Hơn nữa, từ các bài toán hình học vi phân, nhiều lớp phương trình elliptic phi tuyến quan trọng đã được nghiên cứu từ các mô hình đó (xem trong một số quyển sách chuyên khảo [1, trang 75-138], [24, trang 309-367], [29, trang 13-216], [79, trang 1-68], [62, trang 251-266]). Do vậy, việc nghiên cứu những lớp phương trình elliptic, hệ phương trình elliptic có ý nghĩa quan trọng trong khoa học kỹ thuật và công nghệ. Trong quá trình nghiên cứu các phương trình elliptic và hệ phương trình elliptic đã đẩy mạnh sự phát triển các công cụ và nhiều kết quả của các chuyên ngành giải tích như: Lý thuyết các không gian hàm, Giải tích hàm phi tuyến, Phép tính biến phân, Mặt khác, sự phát triển của các chuyên ngành giải tích đã dẫn đến những tiến bộ lớn trong lý thuyết phương trình elliptic. Các nghiên cứu về phương trình elliptic đã được đề cập khá nhiều trong các công

trình [10, 25, 32, 33, 72] và các trích dẫn thêm ở trong đó.

Hiện nay các kết quả về phương trình elliptic, hệ phương trình elliptic tổng quát như sự tồn tại, không tồn tại nghiệm, tính đa nghiệm và một số tính chất của nghiệm đã tương đối hoàn chỉnh. Với sự phát triển không ngừng của khoa học kỹ thuật và công nghệ nhiều bài toán thực tế cũng như lĩnh vực toán học nhiều bài toán không elliptic đã xuất hiện như phương trình Tricomi, phương trình elliptic suy biến, đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước nghiên cứu. Đối với phương trình elliptic suy biến phi tuyến đã được nhiều nhà toán học nước ngoài đã nghiên cứu như trong các công trình [30, 31, 35, 37] và các trích dẫn các bài báo đó. Một số tác giả trong nước đã nghiên cứu các phương trình, hệ các phương trình elliptic suy biến phi tuyến, phương trình parabolic suy biến, và phương trình hyperbolic suy biến như trong [2, 3, 20, 36, 52, 69, 71, 73–76] và các trích dẫn các bài báo đó. Các kết quả đã đạt được là: sự tồn tại, không tồn tại nghiệm và tính đa nghiệm, tính chính quy và một số tính chất nghiệm của bài toán biên cho phương trình elliptic suy biến, sự tồn tại nghiệm, đáng điều kiện cận nghiệm của phương trình parabolic suy biến, sự tồn tại nghiệm, đáng điều kiện cận nghiệm của phương trình hyperbolic suy biến. Hơn nữa, các ứng dụng trong thực tế cũng được nghiên cứu và công bố như môi trường có cơ hai cơ chế lan truyền, chuyển động của hạt lượng tử trong các đa tạp Riemannian suy biến, mô tả phân tán của sóng trong môi trường suy biến xem trong [26–28].

Năm 1970 trong [31] nhà toán học người Nga V. V. Grushin đã đưa ra và nghiên cứu toán tử dạng

$$G_k := \Delta_x + |x|^{2k} \Delta_y \text{ với } (x, y) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}, N_1, N_2 \geq 1, k \in \mathbb{Z}_+$$

trong đó $\mathbb{D}$ là miền bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$ có biên trơn và chứa gốc toạ độ. Ta gọi toán tử này là toán tử Grushin. Đây là ví dụ

diễn hình cho lớp toán tử elliptic suy biến, hơn nữa toán tử này toán tử hypoelliptic. Kết quả mà V. V. Grushin đạt được là nếu $G_k v$ là hàm khả vi vô hạn trong miền $\mathbb{D}$ thì v cũng khả vi vô hạn trong miền $\mathbb{D}$ và một số tính chất địa phương của toán tử G_k được trình bày chi tiết trong [31]. Từ năm 1970 đến nay đã nhiều nhà toán học nghiên cứu tồn tại nghiệm yếu, không tồn tại nghiệm yếu, tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến chứa toán tử Grushin xem trong [19–21, 67, 69, 73, 74, 81] và các trích dẫn các bài báo đó.

Năm 2012, các tác giả Phạm Thị Thuỷ và Nguyễn Minh Trí trong [70], đã nghiên cứu bài toán

$$\begin{cases} -P_{k_1, k_2} v + g(v) = 0 & \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v = 0 & \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $k_1, k_2 \geq 0$

$$P_{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \Delta_z$$

và $\mathbb{D}$ là miền giới nội với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$, $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}, z \in \mathbb{R}^{N_3}$, $g(\xi) = \xi|\xi|^{\gamma-1}$. Nhóm tác giả đã xây dựng được đồng nhất thức kiểu Pohozeav từ đó chỉ ra điều kiện không tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán khi $\gamma > \frac{4}{N_1 + N_2 + (1 + k_1 + k_2)N_3 - 2}$ với $\mathbb{D}$ là P_{k_1, k_2} -hình sao. Các tác giả đã chỉ ra số mũ tới hạn của định lý nhúng là $2_{k_1, k_2}^* := \frac{2N_{k_1, k_2}}{N_{k_1, k_2} - 2}$ với $N_{k_1, k_2} := N_1 + N_2 + (1 + k_1 + k_2)N_3$, từ đó chứng minh bài toán trên có nghiệm không tầm thường với một lớp hàm phi tuyến g có độ tăng nhỏ hơn $\frac{N_{k_1, k_2} + 2}{N_{k_1, k_2} - 2}$.

Năm 2012, các tác giả Alessia E. Kogoj và Ermanno Lanconelli trong [37] đã nghiên cứu toán tử tổng quát cho hai toán tử Grushin và toán tử P_{k_1, k_2} . Kết quả mà các tác giả Alessia E. Kogoj và Ermanno Lanconelli đạt được là đã chỉ ra số mũ tới hạn của định lý nhúng kiểu Sobolev, xây dựng được đồng nhất thức kiểu Pohozaev từ đó chứng minh

được sự không tồn tại nghiệm không tầm thường. Hơn nữa, sử dụng định lý nhúng kiểu Sobolev các tác giả đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu và tính chính quy của nghiệm yếu đối với bài toán biên dạng:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma v - \lambda v + g(X, v) = 0 \text{ trong miền } \mathbb{D}, \\ v = 0 \text{ trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{cases} \quad (2)$$

với $\mathbb{D}$ là tập mở bị chặn có biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, $\lambda \geq 0$ và toán tử Δ_γ số chiều thuần nhất $\tilde{N}$ được định nghĩa trong Chương 1. Hàm $g : \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện:

- $g(X, \tau) = o(\tau)$ khi $\tau \rightarrow 0$ là đều theo $X \in \overline{\mathbb{D}}$,
- $g(X, \tau) = o(\tau^{\frac{\tilde{N}+2}{\tilde{N}-2}})$ khi $\tau \rightarrow \infty$ là đều theo $X \in \overline{\mathbb{D}}$,
- Tồn tại các hằng số $\mu_0 > 2, M_0 > 0$ thỏa mãn các điều kiện

$$\tau g(X, \tau) > \mu_0 G(X, \tau) \text{ khi } |\tau| > M_0,$$

$$G(X, \tau) > 0 \text{ khi } \tau > M_0$$

$$\text{với } G(X, \tau) = \int_0^\tau g(X, t) dt.$$

Từ năm 2012 đến nay nhiều nhà toán học trong và ngoài nước đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu, tính đa nghiệm và một số tính chất của nghiệm đối với phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến chứa toán tử Δ_γ hoặc các trường hợp riêng của toán tử này như trong [3–5, 16, 16–18, 39–44, 48–51, 53, 55–57, 64, 64] và các trích dẫn các bài báo đó.

Việc nghiên cứu sự tồn tại, tính đa nghiệm và một số tính chất nghiệm của phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến là vấn đề thời sự đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước nghiên cứu, như các vấn đề sau:

- Tính đa nghiệm và một số tính chất của nghiệm đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng

$$\begin{aligned} -\Delta_\gamma v &= f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbb{D}$ là miền bị chặn với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $f(X, \tau)$ là lẻ theo τ và $g(X, \tau)$ là số hạng nhiễu của phương trình.

- Sự tồn tại nghiệm và không tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng:

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

với $\mathbb{D}$ là miền bị chặn với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ và toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ có dạng $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z$ ở đây $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$ và $N = N_1 + N_2 + N_3$, $k_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$.

- Sự tồn tại nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm yếu đối với hệ phương trình elliptic suy biến dạng:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X) v = \mathcal{H}(X, v, w) \quad \text{với } X \in \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X) w = \mathcal{K}(X, v, w) \quad \text{với } X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 \quad \text{khi } |X| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

trong đó $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot), \mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$ là các hàm cho trước

Với các vấn đề mở ở trên, trong luận án này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu, không tồn tại nghiệm yếu, tính đa nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm yếu đối với phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến.

2. Mục đích nghiên cứu

Trong Luận án này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu, không tồn tại nghiệm, tính đa nghiệm và một số tính chất nghiệm của nghiệm yếu đối với phương trình elliptic suy biến trong miền bị chặn, và đối với hệ phương trình elliptic suy biến trong toàn không gian, cụ thể:

Nội dung 1: Nghiên cứu sự nhiều nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm yếu đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng

$$\begin{aligned} -\Delta_\gamma v &= f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbb{D}$ là một miền bị chặn có chứa gốc tọa độ với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $f(X, \tau)$ là lẻ theo τ và $g(X, \tau)$ là số hạng nhiều của phương trình.

Nội dung 2: Nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm trong miền hình sao và sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

với $\mathbb{D}$ là miền bị chặn có biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ và $\mathbb{R}^N$ và toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ có dạng $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z$ ở đây $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$ và $N = N_1 + N_2 + N_3$, $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$.

Nội dung 3: Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm đối với hệ phương trình elliptic suy biến

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v = \mathcal{H}(X, v, w) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w = \mathcal{K}(X, v, w) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 \quad \text{khi } |X| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

trong đó $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot)$, $\mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$ là các hàm cho trước.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu chính của luận án là phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến. Cụ thể, luận án tập trung vào việc nghiên cứu các khía cạnh sau của nghiệm yếu:

- Sự tồn tại nghiệm.
- Sự không tồn tại nghiệm.
- Tính đa nghiệm.
- Một số tính chất khác của nghiệm.

Phạm vi nghiên cứu của luận án được chia thành ba phần chính, tương ứng với ba chương nội dung:

1. Phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính trong miền bị chặn:

- *Đối tượng:* Phương trình có dạng

$$\begin{aligned} -\Delta_\gamma v &= f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}. \end{aligned}$$

- *Phạm vi:* Luận án tập trung nghiên cứu vấn đề đa nghiệm và một số tính chất của nghiệm yếu. Miền $\mathbb{D}$ được xét là một miền bị chặn có chứa gốc tọa độ và biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$.

2. Phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính trong miền bị chặn:

- *Đối tượng:* Bài toán biên có dạng

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_1, k_2, k_3, k_4} v &= g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}. \end{aligned}$$

- *Phạm vi:* Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường và sự không tồn tại nghiệm trong miền hình sao.

3. Hệ phương trình elliptic suy biến trong toàn không gian $\mathbb{R}^N$:

- *Đối tượng:* Hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v = \mathcal{H}(X, v, w) \text{ trong } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w = \mathcal{K}(X, v, w) \text{ trong } \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

với điều kiện $v(X), w(X) \rightarrow 0$ khi $|X| \rightarrow \infty$.

- *Phạm vi:* Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm, đồng thời đánh giá nghiệm trong không gian Sobolev có trọng tương ứng.

4. Phương pháp nghiên cứu và công cụ nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết cơ bản trong lĩnh vực giải tích toán học, vận dụng các công cụ của giải tích hàm phi tuyến và lý thuyết không gian Sobolev:

- Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu và vấn đề nhiều nghiệm cũng như một số tính chất nghiệm của nghiệm yếu đối với lớp phương trình, hệ phương trình elliptic suy biến, chúng tôi sử dụng các công cụ của giải tích hàm phi tuyến và lý thuyết phương trình đạo hàm riêng phi tuyến. Cụ thể như một số định lý về điểm tới hạn (Định lý qua núi, Định lý biến dạng), Định lý nhúng kiểu Sobolev có trọng.
- Để nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm chúng tôi xây dựng các đồng nhất thức kiểu Pohozaev tương ứng đối với toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ và khai thác cấu trúc hình học của miền đang xét để chỉ ra sự không tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán.

5. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học và góp phần vào hoàn thiện lý thuyết về lớp phương trình elliptic suy biến, hệ phương

trình elliptic suy biến. Các kết quả của luận án được công bố trong 04 bài báo trên các tạp chí chuyên ngành quốc tế gồm 01 bài SCIE, 02 bài ESCI và 01 bài trong tuyển tập ISAAC-ICMAM 2024, cụ thể như sau:

Đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng:

$$\begin{aligned} -\Delta_\gamma v &= f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbb{D}$ là một miền bị chặn có chứa gốc tọa độ với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $f(X, \tau)$ là lẻ theo τ và $g(X, \tau)$ là số hạng nhiễu của phương trình. Kết quả mà chúng tôi đạt được trong chương này là chỉ ra được lớp hàm phi tuyến g, f mà bài toán có vô số nghiệm. Hơn nữa, phẩm hàm năng lượng của bài toán tại các nghiệm là âm và nghiệm dần hội tụ về 0 trong không gian có trọng tương ứng. Kết quả đã được công bố trong bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

Đối với phương trình elliptic suy biến dạng:

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbb{D}$ là miền bị chặn với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$. Kết quả đạt được trong chương này là chỉ ra được đồng nhất thức kiểu Pohozeav từ đó chỉ ra các trường hợp hàm phi tuyến để phương trình không có nghiệm không tầm thường. Hơn nữa, sử dụng phương pháp biến phân chúng tôi đã chứng minh được một lớp hàm phi tuyến tương ứng mà bài toán có nghiệm yếu không tầm thường. Kết quả đã được công bố trong bài báo [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

Đối với hệ phương trình elliptic suy biến dạng

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v = \mathcal{H}(X, v, w) & \text{trong } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w = \mathcal{K}(X, v, w) & \text{trong } \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 & \text{khi } |X| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

trong đó $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot), \mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$ là các hàm cho trước. Kết quả mà chúng tôi đạt được trong chương này là chỉ ra lớp hàm phi tuyến tương ứng mà bài toán có nghiệm yếu không tầm thường và đánh giá nghiệm trong không gian Sobolev có trọng tương ứng. Kết quả đã được công bố trong bài báo [3,4] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

Hơn nữa, các kết quả này đã được báo cáo tại:

- Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên;
- Hội thảo “Toán học và các ngành liên quan” của Viện Toán học được tổ chức tại Trường Đại học Hoa Lư tháng 4/2023.

6. Cấu trúc luận án

Ngoài các phần mở đầu, tổng quan, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình được công bố và danh mục tài liệu tham khảo, luận án bao gồm 4 chương.

Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị cho các chương sau.

Chương 2 trình bày kết quả nghiên cứu tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng

$$\begin{aligned} -\Delta_{\gamma} v &= f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

với $\mathbb{D}$ là một miền bị chặn có chứa gốc tọa độ và biên $\partial\mathbb{D}$ trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, với $N \geq 2$, $f(X, \tau)$ là lẻ theo τ và $g(X, \tau)$ là số hạng nhiều của phương trình.

Chương 3 trình bày kết quả nghiên cứu sự tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán biên elliptic suy biến

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

với $\mathbb{D}$ là miền bị chặn có biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ ở đó $N \geq 3$ và toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ có dạng $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z$ ở đây $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$ và $N = N_1 + N_2 + N_3, k_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$.

Chương 4 trình bày kết quả nghiên cứu sự tồn tại và tính chất nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v = \mathcal{H}(X, v, w) \text{ với } X \in \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w = \mathcal{K}(X, v, w) \text{ với } X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

với $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot), \mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$ là các hàm cho trước.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả phục vụ cho các chương sau, với các nội dung cụ thể như sau: Khái niệm toán tử elliptic suy biến, các ví dụ, một số không gian hàm tương ứng với toán tử elliptic suy biến, các kết quả về phép nhúng tương ứng của các không gian đó và một số định lý điểm tới hạn.

1.1. Toán tử elliptic suy biến

Trong mục này ta trình bày khái niệm toán tử elliptic suy biến và đưa ra hai lớp toán tử elliptic suy biến là toán tử Δ_γ được trình bày trong [37] và toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$.

Xét toán tử vi phân

$$\mathcal{P}(X, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha(X) D^\alpha,$$

với $\mathbb{D}$ là miền bị chặn với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ và $X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{D}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^N$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N, \quad D = (D_1, \dots, D_N), \quad D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, \dots, N,$$

$D^\alpha = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_N}$, $f_\alpha(X) \in C(\mathbb{D})$ là các hàm trơn cho trước.

Ta đặt

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_N^{\alpha_N}, \text{ với } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Hàm số $\mathcal{P}(\alpha, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha(N) \xi^\alpha$ được gọi là biểu trưng của toán tử $P(N, D)$. Hàm số $\mathcal{P}_m(\alpha, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} f_\alpha(N) \xi^\alpha$ được gọi là biểu trưng chính của toán tử $\mathcal{P}(X, D)$. Khi đó toán tử $P(X, D)$ được gọi là elliptic tại $X \in \mathbb{D}$ nếu với mọi $\xi \in \mathbb{R}^N$ thỏa mãn $\mathcal{P}_m(X, \xi) = 0$ khi và chỉ khi $\xi = 0$.

Toán tử $\mathcal{P}(X, D)$ được gọi là elliptic trên miền $\mathbb{D}$ nếu nó elliptic tại mọi $X \in \mathbb{D}$.

Ta xét toán tử

$$\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z,$$

trong đó $X = (x_1, x_2, \dots, x_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{N_2}) \in \mathbb{R}^{N_2}$, $N = N_1 + N_2 + N_3$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_{N_3}) \in \mathbb{R}^{N_3}$, $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 > 0$, $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$. Toán tử có biểu trưng và biểu trưng chính là

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}(x, y, z, \xi) = & - \left[\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{N_1}^2 + \xi_{N_1+1}^2 + \dots + \xi_{N_1+N_2}^2 \right. \\ & \left. + \left(\xi_{N_1+N_2+1}^2 + \dots + \xi_{N_1+N_2+N_3}^2 \right) |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Xét tại điểm $M_0(x^0, y^0, z^0)$, nếu $x^0 \neq 0$ và $y^0 \neq 0$ thì $\mathcal{P}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}(x, y, z, \xi) = 0$ khi và chỉ khi $\xi_i = 0$, $i = 1, \dots, N_1 + N_2 + N_3$. Do vậy $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ là toán tử elliptic tại M_0 .

Nếu $x^0 = 0$ hoặc $y^0 = 0$ thì tồn tại $\xi = (0, \dots, 0, 1) \neq 0$ mà $\mathcal{P}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}(x, y, z, \xi) = 0$. Do vậy $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ không là toán tử elliptic tại điểm có $x^0 = 0$ hoặc $y^0 = 0$. Khi đó toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ là toán tử elliptic suy biến trong miền $\mathbb{D}$, trong đó $\mathbb{D}$ là một miền trong không gian $\mathbb{R}^N$ có giao khác rỗng với mặt phẳng $x = 0$ hoặc $y = 0$.

Tiếp theo ta sẽ giới thiệu toán tử Δ_γ -Laplace (xem trong [37]) lớp này là tổng quát của toán tử Grushin nhưng lớp toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ nói trên

không thỏa mãn lớp toán tử này. Xét toán tử

$$\Delta_\gamma := \sum_{\ell=1}^N \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\gamma_\ell^2 \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right),$$

với

$$\begin{aligned} \gamma_\ell : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x_1, \dots, x_N) &\longmapsto \gamma_\ell(x_1, \dots, x_N) = \gamma_\ell(X) \end{aligned}$$

thỏa mãn γ_ℓ là các hàm liên tục với $\ell = 1, 2, \dots, N$ và $\gamma_\ell > 0$, với $\ell = 1, 2, \dots, N$ trong $\mathbb{R}^N \setminus \Sigma$, ở đó

$$\Sigma := \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \prod_{\ell=1}^N x_\ell = 0 \right\}.$$

Hơn nữa các hàm $\gamma_\ell(X)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) Tồn tại nhóm $\{\delta_s\}_{s>0}$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} \delta_s : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x_1, \dots, x_N) &\longmapsto \delta_s(x_1, \dots, x_N) = (s^{t_1}x_1, \dots, s^{t_N}x_N), \end{aligned}$$

với $1 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$, sao cho γ_j là δ_s -thuần nhất bậc $t_\ell - 1$, tức là với mọi $X \in \mathbb{R}^N, s > 0$ ta có

$$\gamma_\ell(\delta_s(X)) = s^{t_\ell-1} \gamma_\ell(X), \ell = 1, \dots, N$$

ii) $\gamma_1(X) \equiv 1, \gamma_\ell(X) = \gamma_\ell(x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1}), \ell = 2, \dots, N$;

iii) Với mỗi $X \in \mathbb{R}^N$ sao cho $\gamma_\ell(X) = \gamma_\ell(X^*), \ell = 1, 2, \dots, N$, với

$$X^* = (|x_1|, \dots, |x_N|) \text{ nếu } X = (x_1, x_2, \dots, x_N);$$

iv) Tồn tại hằng số $\rho \geq 0$ thỏa mãn

$$0 \leq x_k \partial_{x_k} \gamma_\ell(X) \leq \rho \gamma_\ell(X), \forall k \in \{1, 2, \dots, \ell-1\}, \forall \ell = 2, \dots, N,$$

với mỗi $X \in \overline{\mathbb{R}}_+^N := \{X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_\ell \geq 0, \forall \ell = 1, 2, \dots, N\}$;

Khi đó toán tử Δ_γ là δ_s -thuần nhất bậc hai, tức là

$$\Delta_\gamma(v(\delta_s)(X)) = s^2(\Delta_\gamma v)(\delta_s(X)).$$

Ta định nghĩa $\tilde{N}$ là số chiều thuần nhất của không gian $\mathbb{R}^N$ đối với nhóm $\{\delta_s\}_{s>0}$, tức là

$$\tilde{N} := t_1 + t_2 + \cdots + t_N.$$

1.2. Không gian Sobolev có trọng và định lý nhúng

Nội dung phần này trình bày không gian Sobolev có trọng tương ứng với toán tử suy biến.

a) Không gian Sobolev có trọng trong miền bị chặn tương ứng với toán tử Δ_γ -Laplace và định lý nhúng

Giả sử $\mathbb{D}$ là một miền bị chặn có chứa gốc tọa độ với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ với $N > 2$. Ta định nghĩa như sau

Định nghĩa 1.1. Ta định nghĩa không gian $\mathcal{S}_\gamma^q(\mathbb{D})$ với $1 \leq q < \infty$ là tập tất cả các hàm $v \in L^q(\mathbb{D})$ thỏa mãn $\gamma_\ell \partial_{x_\ell} v \in L^q(\mathbb{D})$ với mọi $\ell = 1, 2, \dots, N$.

Chuẩn trong $\mathcal{S}_\gamma^q(\mathbb{D})$ được định nghĩa như sau:

$$\|v\|_{\mathcal{S}_\gamma^q(\mathbb{D})} := \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left(|v|^q + \sum_{\ell=1}^N |\gamma_\ell \partial_{x_\ell} v|^q \right) dX \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Nếu $q = 2$ ta định nghĩa tích vô hướng trong $\mathcal{S}_\gamma^2(\mathbb{D})$ như sau:

$$(v, w)_{\mathcal{S}_\gamma^2(\mathbb{D})} = (v, w)_{L^2(\mathbb{D})} + \sum_{\ell=1}^N (\gamma_\ell \partial_{x_\ell} v, \gamma_\ell \partial_{x_\ell} w)_{L^2(\mathbb{D})}.$$

Trong đó, không gian $\mathcal{S}_{\gamma,0}^q(\mathbb{D})$ là bao đóng của $C_0^1(\mathbb{D})$ trong không gian $\mathcal{S}_\gamma^q(\mathbb{D})$ và không gian $C_0^1(\mathbb{D})$ là tập các hàm khả vi liên tục cấp một và có giá compact trong $\mathbb{D}$.

Với $v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$, ta đặt

$$\nabla_\gamma v := (\gamma_1 \partial_{x_1} v, \gamma_2 \partial_{x_2} v, \dots, \gamma_N \partial_{x_N} v), |\nabla_\gamma v| := \left(\sum_{\ell=1}^N |\gamma_\ell \partial_{x_\ell} v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Từ Mệnh đề 3.2 và Định lý 3.3 trong [37], ta có định lý nhúng kiểu Sobolev sau:

Định lý 1.1. *Giả sử $\tilde{N} > 2$. Khi đó phép nhúng*

$$\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^{2_\gamma^*}(\mathbb{D}), \text{ trong đó } 2_\gamma^* := \frac{2\tilde{N}}{\tilde{N}-2},$$

là liên tục, nghĩa là tồn tại hằng số $C_{2_\gamma^}$ thỏa mãn*

$$\|v\|_{L^{2_\gamma^*}(\mathbb{D})} \leq C_{2_\gamma^*} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}, \forall v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}).$$

Hơn nữa, với mỗi $q \in [1, 2_\gamma^)$ ta có phép nhúng $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{D})$ là compact, ở đây $L^q(\mathbb{D})$ là không gian Lebesgue với chuẩn $\|\cdot\|_{L^q(\mathbb{D})}$.*

b) Không gian Sobolev có trọng trong miền bị chặn tương ứng với toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ -Laplace và định lý nhúng

Ta đặt

$$N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := N_1 + N_2 + (1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4)N_3, \quad \tilde{2}^* := \frac{2N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} - 2}.$$

$$\nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \left(\nabla_x, \nabla_y, |x|^{k_1} |y|^{k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right) \nabla_z \right).$$

Định nghĩa 1.2. Không gian $\Lambda^2(\overline{\mathbb{D}})$ là tập tất cả các hàm $v \in C(\overline{\mathbb{D}})$ thỏa mãn tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial y_j}$,

$$|x|^{k_1} |y|^{k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right) \frac{\partial v}{\partial z_k}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2}, |x|^{k_1} |y|^{k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial z_\ell^2}$$

và thác triển liên tục tới biên $\overline{\mathbb{D}}$, trong đó $i = 1, \dots, N_1, j = 1, \dots, N_2, \ell = 1, \dots, N_3$.

Định nghĩa 1.3. Cho $\mathbb{D}$ là một miền bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^N$. không gian $\mathcal{S}_1^q(\mathbb{D})$ với $1 \leq q < +\infty$ là tập tất cả các hàm $v \in L^q(\mathbb{D})$ thỏa mãn $\nabla_x v, \nabla_y v, |x|^{k_1} |y|^{k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right) \nabla_z v \in L^q(\mathbb{D})$ với chuẩn tương ứng là:

$$\|v\|_{\mathbb{S}_1^q(\mathbb{D})} := \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left(|v|^q + \sum_{i=1}^{N_1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^q + \sum_{j=1}^{N_2} \left| \frac{\partial v}{\partial y_j} \right|^q + |x|^{qk_1} |y|^{qk_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^q \sum_{\ell=1}^{N_3} \left| \frac{\partial v}{\partial z_\ell} \right|^q \right) dX \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Nếu $q = 2$ không gian $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{D})$ là không gian Hilbert với tích vô hướng như sau:

$$(v, w)_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{D})} = (v, w)_{L^2(\mathbb{D})} + (\nabla_x v, \nabla_x w)_{L^2(\mathbb{D})} + (\nabla_y v, \nabla_y w)_{L^2(\mathbb{D})} + \left(|x|^{k_1} |y|^{k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right) \nabla_z v, |x|^{k_1} |y|^{k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right) \nabla_z w \right)_{L^2(\mathbb{D})}.$$

Không gian $\mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D})$ định nghĩa là bao đóng của $C_0^1(\mathbb{D})$ trong không gian $\mathbb{S}_1^q(\mathbb{D})$.

Sử dụng Bổ đề 2 trong [70] và chứng minh tương tự như Mệnh đề 2, Mệnh đề 4 trong [70], ta có định lý nhúng kiểu Sobolev trong không gian có trọng $\mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D})$ sau:

Định lý 1.2. *Giả sử $\mathbb{D}$ là một miền bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^N$ cùng với biên của $\mathbb{D}$ là trơn thỏa mãn $\mathbb{D} \cap \{x = 0, y = 0\} \neq \emptyset$ và $1 \leq q < \tilde{N}$. Khi đó ta có phép nhúng*

$$\mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{D}), \text{ trong đó } 1 \leq p \leq \frac{qN_{k_3,k_4}^{k_1,k_2}}{N_{k_3,k_4}^{k_1,k_2} - q}$$

là liên tục, tức là tồn tại hằng số dương $C_q > 0$ thỏa mãn

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{D})} \leq C_q \|u\|_{\mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D})}, \quad \forall u \in \mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D}).$$

Hơn nữa, phép nhúng

$$\mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\frac{qN_{k_3,k_4}^{k_1,k_2}}{N_{k_3,k_4}^{k_1,k_2} - q} - \varepsilon}(\mathbb{D})$$

là compact với ε dương đủ nhỏ,

Nhận xét 1.1. Từ Định lý 1.2, ta có chuẩn $\|\cdot\|_{\mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D})}$ và chuẩn $|||\cdot|||_{\mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D})}$ là tương đương, trong đó với mỗi $v \in \mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D})$ ta định nghĩa chuẩn $|||\cdot|||_{\mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D})}$ như sau:

$$|||v|||_{\mathbb{S}_{1,0}^q(\mathbb{D})} : \\ = \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left(|\nabla_x v|^q + |\nabla_y v|^q + |x|^{qk_1} |y|^{qk_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^q |\nabla_z v|^q \right) dX \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

c) Không gian Sobolev có trọng trong toàn không gian tương ứng với toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ -Laplace và định lý nhúng

Ta giả sử hàm $\kappa : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

(B0) $\kappa \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ và tồn tại hằng số $M > 0$ thỏa mãn

$$\kappa(0) = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} \kappa(X) = 0, \text{Vol}(\{X \in \mathbb{R}^N, \kappa(X) \leq M\}) < \infty;$$

Định nghĩa 1.4. Với $1 \leq q < +\infty$, bao đóng của không gian $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ với chuẩn

$$\|v\|_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^q(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|v|^q + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^q \right) dX \right)^{\frac{1}{q}}, dX := dx dy dz.$$

được ký hiệu là $S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^p(\mathbb{R}^N)$.

Khi $q = 2$ khi đó tích vô hướng trên không gian $S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)$ được định nghĩa như sau:

$$(v, w)_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)} = (v, w)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (\nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v, \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Ta ký hiệu

$$S_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda \kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N) := \\ \left\{ v \in S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 + \lambda \kappa(X) v^2 \right) dX < +\infty \right\}$$

với $\kappa(X)$ thỏa mãn điều kiện (B0), khi đó không gian $S_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda\kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N)$ là không gian Hilbert với chuẩn như sau:

$$\|v\|_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda\kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v|^2 + \lambda\kappa(X)v^2 \right) dX \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Do $\kappa(X)$ thỏa mãn điều kiện (B0), nên phép nhúng $S_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda\kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)$ là liên tục. Chứng minh tương tự như Bổ đề 2.2 trong [49], ta có kết quả sau:

Định lý 1.3. *Giả sử $\kappa(X)$ thỏa mãn điều kiện (B0). Khi đó ta có phép nhúng $S_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda\kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ với $2 \leq q \leq \tilde{2}^*$ là liên tục. Hơn nữa, phép nhúng $S_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda\kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ là compact với $2 \leq q < \tilde{2}^*$.*

Đặt $\mathbb{H} = S_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda\kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N) \times S_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda\kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N)$, khi đó $\mathbb{H}$ là không gian Hilbert với chuẩn

$$\|(v, w)\|_{\mathbb{H}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v|^2 + \lambda\kappa(X)v^2 + |\nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w|^2 + \lambda\kappa(X)w^2 \right) dX \right)^{\frac{1}{2}},$$

với mỗi $(v, w) \in \mathbb{H}$.

1.3. Một số kết quả của lý thuyết điểm tới hạn

Mục này, ta trình bày một số kết quả về điểm tới hạn và giá trị tới hạn để sau này áp dụng trong chứng minh sự tồn tại nghiệm và vấn đề nhiều nghiệm của bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic suy biến được trích dẫn trong các tài liệu [12], [66]. Trước tiên ta nhắc lại khái niệm đạo hàm của phiếm hàm trên không gian Banach.

Cho F là không gian Banach phản xạ và F^* là không gian đối ngẫu của F .

Định nghĩa 1.5. Cho V là một tập con mở trong không gian F . Ta nói một hàm $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm Gateaux tại điểm $v \in V$ nếu tồn tại $g \in F^*$ sao cho với mọi $h \in F$ ta có

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(v + th) - \Psi(v) - \langle g, th \rangle}{t} = 0$$

Đạo hàm Gateaux tại v của phiếm hàm Ψ , ký hiệu là $\Psi'(v)$.

Định nghĩa 1.6. Ta nói phiếm hàm Ψ có đạo hàm Fréchet tại $v \in V$ nếu tồn tại $g \in F^*$ sao cho

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(v + h) - \Psi(v) - \langle g, h \rangle}{\|h\|_F} = 0.$$

Ta nói phiếm hàm $\Psi \in C^1(V, \mathbb{R})$ nếu đạo hàm Fréchet của Ψ tồn tại và liên tục tại mọi điểm $v \in V$.

Dễ thấy rằng nếu Ψ khả vi Fréchet thì Ψ cũng khả vi Gateaux. Điều ngược lại không phải luôn đúng, tuy nhiên nếu đạo hàm Gateaux Ψ' là liên tục thì Ψ cũng khả vi Fréchet.

Khi đó, điểm $v \in F$ được gọi là điểm tới hạn của phiếm hàm Ψ nếu $\Psi'(v) = 0$. Số $c \in \mathbb{R}$ được gọi là một giá trị tới hạn của phiếm hàm Ψ nếu tồn tại $v \in F$ sao cho $\Psi'(v) = 0$ và $\Psi(v) = c$. Tiếp theo, ta đưa ra khái niệm về điều kiện Palais-Smale của phiếm hàm, điều kiện này được giới thiệu bởi R. Palais và S. Smale vào năm 1964 (xem [60]).

Định nghĩa 1.7. Cho phiếm hàm $\Psi \in C^1(F, \mathbb{R})$. Với mỗi số thực c , phiếm hàm Ψ được gọi là thỏa mãn điều kiện Palais-Smale tại mức c , ký hiệu là $(PS)_c$, nếu với bất kỳ dãy $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset F$ thoả mãn

$$\Psi(v_n) \rightarrow c \text{ và } \|\Psi'(v_n)\|_{F^*} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

khi đó tồn tại một dãy con $\{v_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ mạnh trong không gian F .

Nếu Ψ thỏa mãn điều kiện $(PS)_c$ với mọi $c > 0$ khi đó ta nói Ψ thỏa mãn điều kiện Palais-Smale.

Tuy nhiên, trong khi áp dụng có những tình huống phiếm hàm không thoả mãn điều kiện Palais-Smale, mà vẫn có điểm tới hạn. Khi đó, ta có thể thay thế điều kiện Palais-Smale bằng một điều kiện compact của Cerami được đưa ra vào những năm 1970 (xem [12]).

Định nghĩa 1.8. Cho phiếm hàm $\Psi \in C^1(F, \mathbb{R})$. Với mỗi $c \in \mathbb{R}$, phiếm hàm Ψ được gọi là thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ nếu với mỗi dãy $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset F$ thỏa mãn

$$\Psi(v_n) \rightarrow c \text{ và } (1 + \|v_n\|_F) \|\Psi'(v_n)\|_{F^*} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

thì tồn tại một dãy con $\{v_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ của dãy $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ hội tụ mạnh trong F .

Nếu Ψ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c > 0$ thì ta nói Ψ thỏa mãn điều kiện Cerami.

Khi đó, ta có các phiên bản của Định lý qua núi (Mountain Pass Theorem).

Định lý 1.4 (Xem trong [66]). Cho F là không gian Banach thực và phiếm hàm $\Psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $(PS)_c$ với mỗi $c \in \mathbb{R}$, và Ψ thỏa mãn các điều kiện sau: $\Psi(0) = 0$,

(i) tồn tại các hằng số dương ρ_0, τ sao cho với mọi $v \in F$ thỏa mãn $\|v\|_F = \rho_0$ thì $\Psi(v) \geq \tau$;

(ii) tồn tại điểm $v_1 \in F$, $\|v_1\|_F \geq \rho_0$ sao cho $\Psi(v_1) \leq 0$.

Khi đó $\beta := \inf_{\theta \in \Theta} \max_{0 \leq t \leq 1} \Psi(\theta(t)) \geq \tau$ là giá trị tới hạn của phiếm hàm Ψ , ở đây

$$\Theta := \{\theta \in C([0; 1], F) : \theta(0) = 0, \theta(1) = v_1\}.$$

Định lý 1.5 (Xem trong [12]). Giả sử F là không gian Banach thực và phiếm hàm $\Psi \in C^1(F, \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mỗi $c \in \mathbb{R}$ và J thỏa mãn các điều kiện $\Psi(0) = 0$, hơn nữa

(i) tồn tại hằng số $\rho, \tau > 0$ thỏa mãn $\Psi(u) \geq \tau$ với mọi $\|u\|_F = \rho$;

(ii) tồn tại điểm $v_1 \in F$, $\|v_1\|_F > \rho$ thỏa mãn $\Psi(v_1) \leq 0$.

Khi đó $\beta := \inf_{\theta \in \Theta} \max_{0 \leq t \leq 1} \Psi(\theta(t)) \geq \tau$ là giá trị tới hạn của phiếm hàm Ψ , ở đây

$$\Theta := \{\theta \in C([0; 1], F) : \theta(0) = 0, \theta(1) = v_1\}.$$

1.4. Một số không gian hàm và tính chất

Trong mục này ta giới thiệu hai lớp không gian hàm và một số tính chất của các lớp không gian hàm này.

Định nghĩa 1.9. Giả sử σ là một hàm đo được trên $\mathbb{D}$ và q là số thực dương. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T_\sigma : \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow L^q(\mathbb{D}) \\ v &\longmapsto \sigma v. \end{aligned}$$

Ta có các định nghĩa sau:

- (i) $\mathcal{C}_{2,q}$ là tập tất cả các hàm σ thỏa mãn T_σ là ánh xạ liên tục từ $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ vào $L^q(\mathbb{D})$,
- (ii) $\mathcal{K}_{2,q}$ là tập tất cả các hàm σ sao cho T_σ là ánh xạ compact từ $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ vào $L^q(\mathbb{D})$.

Ta sẽ trình bày một số tính chất của các không gian $\mathcal{C}_{2,q}$ và $\mathcal{K}_{2,q}$, việc chứng minh các tính chất được trình bày một cách tường minh trong [42].

Định lý 1.6. Giả sử $\omega_1 \in \mathcal{C}_{2,q_1}$, $\omega_2 \in \mathcal{C}_{2,q_2}$ sao cho ω_1 và ω_2 là không âm, trong đó $q_1, q_2 \in [1, +\infty)$, $q_1 < q_2$. Đặt

$$\omega = \omega_1^{\frac{q_1(p_2-q)}{q(q_2-q_1)}} \omega_2^{\frac{q_2(q-q_1)}{q(q_2-q_1)}} \quad \text{với bất kì } q \in (q_1, q_2).$$

Khi đó $\omega \in \mathcal{C}_{2,q}$.

Định lý 1.7. Giả sử rằng $\omega_1 \in \mathcal{C}_{2,q}$ và ω_2 là các hàm đo được trên $\mathbb{D}$ sao cho $\omega_1 \geq 0$ và $|\omega_2| \leq \omega_1^{t_0}$, ở đó $q \in [1, \tilde{2}^*)$, $t_0 \in (0, 1)$. Khi đó $\omega_2 \in \mathcal{K}_{2,q}$.

Từ Định lý 1.7, ta có các kết quả sau:

Hệ quả 1.1. Cho $q \in [1, \tilde{2}^*)$, $\eta \in \left(\frac{2qN_{k_3,k_4}^{k_1,k_2}}{2N_{k_3,k_4}^{k_1,k_2} - q(N_{k_3,k_4}^{k_1,k_2} - 2)}, +\infty \right)$ và $\theta \in L^\eta(\mathbb{D})$. Khi đó $\theta \in \mathcal{K}_{2,q}$.

Hệ quả 1.2. Cho $q \in [1, \tilde{2}^*)$, t_0 trong $(0, 1)$ và $\eta \in \mathcal{C}_{2,2}$. Khi đó $\theta = \eta^{t_0 \frac{2(\tilde{2}^* - q)}{q(2^* - 2)}} \in \mathcal{K}_{2,q}$.

Sử dụng bất đẳng thức Hölder và Định lý 1.2 ta có:

Định lý 1.8. Cho $q \in [1, \tilde{2}^*)$, ω trong $\mathcal{K}_{2,q}$, một hàm $h \in L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{D})$ và g là hàm Carathéodory từ $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Giả sử rằng

$$|g(X, \tau)| \leq |\omega(X)|^{q-1} |\tau|^{q-1} + h(X), \quad \forall (X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}.$$

Khi đó $E_1(v) \in C^1(\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$ và

$$\langle E_1'(v), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{D}} g(X, v(X)) \varphi(X) dX$$

với mọi $\varphi \in \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$, trong đó

$$E_1(v) = \int_{\mathbb{D}} G(X, v(X)) dX,$$

$$\text{và } G(X, \tau) = \int_0^\tau f(X, s) ds.$$

Chương 2

Tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu vấn đề nhiều nghiệm yếu và một số tính chất của nghiệm yếu đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính với số hạng phi tuyến và số hạng nhiễu thoả mãn các điều kiện cho trước. Sử dụng phương pháp nhiễu của Rabinowitz (xem trong [63]), với các điều kiện phù hợp của các hàm phi tuyến, chúng tôi đã chứng minh được tính đa nghiệm yếu của bài toán, hơn nữa thêm hàm năng lượng ứng với nghiệm yếu có giá trị âm và dãy nghiệm dần hội tụ về 0.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. Đặt bài toán

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình elliptic suy biến dạng

$$-\Delta_\gamma v = f(X, v) + g(X, v) \quad \text{trong miền } \mathbb{D}, \quad (2.1)$$

$$v = 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \quad (2.2)$$

với $\mathbb{D}$ là miền bị chặn có chứa gốc tọa độ và biên $\partial\mathbb{D}$ là trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$, ở đây $f(X, \tau) \equiv f_1(X, \tau) + f_2(X, \tau)$, $\forall (X, \tau) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$ trong đó

$f_i : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ và $g : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thuộc không gian $C(\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ thỏa mãn các điều kiện

(F1) Tồn tại các hằng số $C_1 > 0, 1 < q < 2$ sao cho

$$|f_1(X, \tau)| \leq C_1 |\tau|^{q-1}, \forall (X, \tau) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}; \quad (2.3)$$

(F2) Tồn tại hằng số $1 < \mu < 2$ thỏa mãn

$$f_1(X, \tau)\tau - \mu F_1(X, \tau) \leq 0, \text{ với mọi } (X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R},$$

$$\text{ở đó } F_1(X, \tau) := \int_0^\tau f_1(x, s) ds;$$

(F3) Tồn tại các hằng số $C_2 > 0, 1 < q_1 < 2$ và $2 < q_2 < 2_\gamma^*$ thỏa mãn

$$F_1(X, \tau) \geq C_2(|\tau|^{q_1} - |\tau|^{q_2}), (X, \tau) \in \mathbb{D}_0 \times \mathbb{R};$$

ở đây $\mathbb{D}_0$ là một tập con mở không rỗng trong $\mathbb{D}$;

(F4) Tồn tại các hằng số $C_3 > 0$ và $2 < q_3 < 2_\gamma^*$ thỏa mãn

$$|f_2(X, \tau)| \leq C_3 |\tau|^{q_3-1}, \text{ với mọi } (X, \tau) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R};$$

(F5) Hàm $f_i(X, \tau)$ là lẻ theo τ với mỗi $X \in \mathbb{D}$ tức là với mọi $(X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$ ta có $f_i(X, \tau) = -f_i(X, -\tau), i = 1, 2$;

(G) Tồn tại các hằng số $C_3 > 0, 2 < \theta < 2_\gamma^*$ thỏa mãn

$$|g(X, \tau)| \leq C_3 |\tau|^{\theta-1}, \forall (X, \tau) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R},$$

và

$$\frac{q}{2-q} > \frac{\tilde{N}}{\theta-2}. \quad (2.4)$$

Một ví dụ thỏa mãn các điều kiện trên như sau:

Ví dụ 2.1. Ta xét $\mathbb{D}$ là một miền bị chặn chứa gốc tọa độ với biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^2$. Các hàm $\gamma_i(x_1, x_2)$ được xác định như sau: $\gamma_1(x_1, x_2) \equiv 1, \gamma_2(x_1, x_2) = |x_1|$, khi đó toán tử Δ_γ có dạng:

$$\Delta_\gamma := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Xét các hàm

$$f(x_1, x_2, s) = \psi(x_1, x_2) |s|^{-\frac{1}{2}} s \cos |s|^{\frac{3}{2}}, \quad g(x_1, x_2, s) = s^{\frac{8}{3}},$$

trong đó $\psi(x_1, x_2) \in C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R})$ là hàm đối dấu trong $\mathbb{D}$. Ta cho:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, s) &= \psi(x_1, x_2) |s|^{-\frac{1}{2}} s, \\ f_2(x_1, x_2, s) &= \psi(x_1, x_2) |s|^{-\frac{1}{2}} s \left(\cos |s|^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Khi đó tất cả các điều kiện từ (F1) đến (F5) và (G) là thỏa mãn trong đó

$$\tilde{N} = 3; 2_\gamma^* = 6; q = \mu = q_1 = \frac{3}{2}; q_2 = q_3 = 3, \theta = \frac{11}{3}.$$

Định nghĩa 2.1. Hàm $v(X)$ thuộc không gian $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ được gọi là nghiệm yếu của Bài toán (2.1)–(2.2) nếu với mọi $\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ ta có đẳng thức sau:

$$\int_{\mathbb{D}} \nabla_\gamma v \cdot \nabla_\gamma \varphi dX - \int_{\mathbb{D}} f(X, v) \varphi dX - \int_{\mathbb{D}} g(X, v) \varphi dX = 0.$$

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (2.1)–(2.2), ta sử dụng phương pháp pháp nhiều của Rabinowitz. Trước hết, ta định nghĩa phiếm hàm Euler–Lagrange liên kết với bài toán (2.1)–(2.2), như sau

$$\Upsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_\gamma v|^2 dX - \int_{\mathbb{D}} F(X, v) dX - \int_{\mathbb{D}} G(X, v) dX,$$

$$\text{ở đó } F(X, \tau) := \int_0^\tau f(X, s) ds \text{ và } G(X, \tau) := \int_0^\tau g(X, s) ds.$$

Do hàm f và g thỏa mãn các điều kiện (F1), (F4) và (G) nên áp dụng Mệnh đề 2.2 trong [49], ta có Υ xác định trên không gian $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ và $\Upsilon \in C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$, hơn nữa

$$\langle \Upsilon'(v), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{D}} \nabla_\gamma v \cdot \nabla_\gamma \varphi dX - \int_{\mathbb{D}} f(X, v) \varphi dX - \int_{\mathbb{D}} g(X, v) \varphi dX \quad (2.5)$$

với mọi $\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$. Từ Định nghĩa 2.1 và (2.5), ta có điểm tới hạn của phiếm hàm Υ là nghiệm yếu của bài toán (2.1)–(2.2).

2.2. Tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính

Trong mục này, trình bày kết quả chính và chứng minh kết quả chính của chương. Trước tiên, ta trình bày định lý về tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính.

Định lý 2.1. *Giả sử các hàm f và g thỏa mãn các điều kiện (F1) đến (F5) và (G). Khi đó bài toán (2.1)–(2.2) có một dãy nghiệm yếu $\{v_n\}_{n=1}^\infty$, thỏa mãn $\Upsilon(v_n) < 0$ với mọi n và $\|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.*

Để chứng minh Định lý 2.1, ta xây dựng hàm cắt k thuộc lớp $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ như sau

$$\begin{cases} k(s) = 1, & s \in (-\infty, 1], \\ 0 \leq k(s) \leq 1, & s \in (1, 2), \\ k(s) = 0, & s \in [2, +\infty), \\ |k'(s)| \leq 2 & s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Với mỗi $v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$, đặt

$$h_{K_0}(v) := k \left(\frac{\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2}{K_0} \right), \quad (2.7)$$

trong đó K_0 là một hằng số dương nhỏ, không phụ thuộc vào v được xác định trong (2.14) và (2.53). Khi đó ta có đánh giá về hàm h_{K_0} như sau:

Bổ đề 2.1. *Hàm h_{K_0} định nghĩa bởi (2.7) thỏa mãn các điều kiện*

$$h_{K_0} \in C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R}) \text{ và } |\langle h'_{K_0}(v), v \rangle| \leq 8, \forall v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}).$$

Chứng minh. Thật vậy, từ (2.7) ta có

$$\langle h'_{K_0}(v), \varphi \rangle = 2\alpha' \left(\frac{\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2}{K_0} \right) \frac{(v, \varphi)_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}}{K_0}, \quad \forall v, \varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}). \quad (2.8)$$

Giả sử dãy $v_n \rightarrow u_0$ trong $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$. Từ định nghĩa của k và (2.8), với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$, ta có

$$\begin{aligned} & \left| \langle h'_{K_0}(v_n) - h'_{K_0}(v_0), \varphi \rangle \right| \\ &= 2 \left| k' \left(\frac{\|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2}{K_0} \right) \frac{(v_n, \varphi)_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}}{K_0} - k' \left(\frac{\|v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2}{K_0} \right) \frac{(v_0, \varphi)_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}}{K_0} \right| \\ &\leq 2K_0^{-1} \|\varphi\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \left[\left| h' \left(\frac{\|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2}{K_0} \right) \right| \|v_n - v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \right. \\ &\quad \left. + \left| k' \left(\frac{\|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2}{K_0} \right) - k' \left(\frac{\|v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2}{K_0} \right) \right| \|v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \right], \end{aligned}$$

suy ra $\|h'_{K_0}(v_n) - h'_{K_0}(v_0)\|_{(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}))^*} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Do đó $h_{K_0} \in C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$. Từ (2.6) và (2.8), ta có

$$|\langle h'_{K_0}(v), v \rangle| \leq 8, \quad \forall v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}).$$

Bỏ đề được chứng minh. □

Từ định nghĩa của hàm h_{K_0} , ta xây dựng một phiên hàm $\bar{\Upsilon}_{K_0}$ như sau:

$$\begin{aligned} \bar{\Upsilon}_{K_0}(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_{\gamma} v|^2 dX - \int_{\mathbb{D}} F_1(X, v) dX \\ &\quad - h_{K_0}(v) \left(\int_{\mathbb{D}} F_2(X, v) dX + \int_{\mathbb{D}} G(X, v) dX \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

trong đó $F_2(X, \tau) = \int_0^{\tau} f_2(X, s) ds$. Từ Bổ đề 2.1 suy ra $\bar{\Upsilon}_{K_0} \in C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$ và với mỗi $v, \varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$, ta có

$$\begin{aligned} & \langle \bar{\Upsilon}'_{K_0}(v), \varphi \rangle \tag{2.10} \\ &= \int_{\mathbb{D}} \nabla_{\gamma} v \cdot \nabla_{\gamma} \varphi dX - k_{K_0}(v) \left(\int_{\mathbb{D}} f_2(X, v) \varphi dX + \int_{\mathbb{D}} g(X, v) \varphi dX \right) \\ &\quad - \int_{\mathbb{D}} f_1(X, v) \varphi dX - \langle h'_{K_0}(v), \varphi \rangle \left(\int_{\mathbb{D}} F_2(X, v) dX + \int_{\mathbb{D}} G(X, v) dX \right). \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta đánh giá $\overline{\Upsilon}_{K_0}$ tại các điểm tới hạn, ta có bổ đề sau.

Bổ đề 2.2. *Giả sử f và g thỏa mãn các điều kiện (F1), (F2), (F4), (G) và v là điểm tới hạn của $\overline{\Upsilon}_{K_0}$. Khi đó*

$$\overline{\Upsilon}_{K_0}(v) \leq \frac{\mu-2}{4\mu} \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2. \quad (2.11)$$

Chứng minh. Giả sử v là điểm tới hạn của $\overline{\Upsilon}_{K_0}$, khi đó ta xét hai trường hợp của $\|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2$ so với K_0 như sau:

Trường hợp 1. Nếu $\|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 > 2K_0$. Từ định nghĩa của k , ta có $h_{K_0}(v) = 0$ và $h'_{K_0}(v) = 0$. Kết hợp điều kiện (F1) và (2.10), ta có

$$\begin{aligned} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) &= \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) - \mu^{-1} \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v), v \rangle \\ &= \frac{\mu-2}{2\mu} \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + \mu^{-1} \int_{\mathbb{D}} (f_1(X, v)v - \mu F_1(X, v)) dX \\ &\leq \frac{\mu-2}{4\mu} \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2, \text{ do } 1 < \mu < 2 \text{ và } f_1(X, v)v - \mu F_1(X, v) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Trường hợp 2. Nếu $\|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \leq 2K_0$. Từ Định lý 1.1, Bổ đề 2.1, các điều kiện (F2), (F4) và (G), ta có

$$\begin{aligned} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) &= \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) - \mu^{-1} \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v), v \rangle \\ &\leq \frac{\mu-2}{2\mu} \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + \frac{\mu+9}{\mu} C_3 \|v\|_{L^{q_3}(\mathbb{D})}^{q_3} + \frac{\mu+9}{\mu} C_4 \|v\|_{L^\theta(\mathbb{D})}^\theta \\ &\leq \frac{\mu-2}{2\mu} \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + \frac{\mu+9}{\mu} C_3 C_{q_3}^{q_3} \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_3} + \frac{\mu+9}{\mu} C_4 C_\theta^\theta \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^\theta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Do $q_3 > 2, q_4 > 2$, ta chọn K_0 đủ nhỏ thỏa mãn nếu $\|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \leq 2K_0$ thì

$$\begin{aligned} \frac{\mu+9}{\mu} C_3 C_{q_3}^{q_3} \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_3} + \frac{\mu+89}{\mu} C_4 C_\theta^\theta \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^\theta \\ \leq \frac{2-\mu}{4\mu} \|v\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Từ (2.12) và (2.14), ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp theo, ta xây dựng hàm cắt $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ như sau:

$$\begin{cases} \chi(s) = 1, & s \in (-\infty, \frac{A}{2}], \\ 0 \leq \chi(s) \leq 1, & s \in (\frac{A}{2}, \frac{A}{4}), \\ \chi(s) = 0, & s \in [\frac{A}{4}, +\infty), \\ |\chi'(s)| \leq -8A^{-1}, & s \in \mathbb{R}, \quad A := \frac{\mu-2}{4\mu}. \end{cases}$$

Đặt

$$\ell(v) := \chi \left(\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) \right), \quad \forall v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) \setminus \{0\}, \quad (2.15)$$

$$\psi(v) := \begin{cases} h_{K_0}(v) \ell(v) \int_{\mathbb{D}} G(X, v) dX, & \forall v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) \setminus \{0\}, \\ 0, & v = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

và

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}(v) := & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_\gamma v|^2 dX - \int_{\mathbb{D}} F_1(X, v) dX \\ & - h_{K_0}(v) \int_{\mathbb{D}} F_2(X, v) dX - \psi(v), \quad \forall v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Từ (F1), (F4) và (G), ta có $\ell(v) \in C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Hơn nữa, với mỗi $v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ và $\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$, ta có

$$\begin{aligned} \langle \ell'(v), \varphi \rangle = & \chi' \left(\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) \right) \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-4} \\ & \times \left(\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v), \varphi \rangle - 2 \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) (v, \varphi)_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Từ định nghĩa của phiếm hàm ψ và các giả thiết của các hàm f và g , ta có đánh giá sau:

Bổ đề 2.3. *Giả sử f và g thỏa mãn (F1), (F2), (F4), (G). Khi đó $\psi \in C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$ và*

$$|\langle \psi'(v), v \rangle| \leq 89C_4 C_\theta^\theta \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^\theta, \quad \forall v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}). \quad (2.19)$$

Chứng minh. Xét tại $v = 0$ với mỗi $v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$, từ (2.7), (2.16) và (G), ta có

$$|\langle \psi'(0), \varphi \rangle| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\psi(t\varphi) - \psi(0)}{t} \right| \leq C_4 \lim_{t \rightarrow 0} |t|^{\theta-1} \int_{\mathbb{D}} |\varphi(X)|^\theta dX = 0,$$

suy ra $\psi'(0) = 0$.

Với $v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ và với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$, từ (2.8), (2.16), (2.18) và (G), ta có

$$\begin{aligned} \langle \psi'(v), \varphi \rangle &= \langle h'_{K_0}(v), \varphi \rangle \ell(v) \int_{\mathbb{D}} G(X, v) dX + h_{K_0}(v) \langle \ell'(v), \varphi \rangle \int_{\mathbb{D}} G(X, v) dX \\ &\quad + h_{K_0}(v) \ell(v) \int_{\mathbb{D}} g(X, v) \varphi dX. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\psi \in C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$. Thật vậy, giả sử $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ là một dãy bất kỳ trong không gian $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ sao cho $v_n \rightarrow v_0$ trong $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$. Khi đó ta xét 2 trường hợp của v_0 như sau:

Trường hợp 1. Nếu $v_0 \neq 0$, từ Bổ đề 2.1, (2.18) và (G), ta có

$$\psi'(v_n) \rightarrow \psi'(v_0) \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Trường hợp 2. Nếu $v_0 = 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 < K_0$, từ (2.6), (2.7) ta có $h_{K_0}(v_n) = 1$ và $h'_{K_0}(v_n) = 0$, suy ra

$$\begin{aligned} \langle \psi'(v_n), \varphi \rangle &= \langle \ell'(v_n), \varphi \rangle \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \\ &\quad + \ell(v_n) \int_{\mathbb{D}} g(X, v_n) \varphi dX. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Mặt khác, từ (2.18) ta có

$$\begin{aligned} \langle \ell'(v_n), \varphi \rangle \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX &= \chi' \left(\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n) \right) \|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \\ &\times \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v_n), \varphi \rangle \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX - 2\chi' \left(\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n) \right) \|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-4} \end{aligned}$$

$$\times \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n)(v_n, \varphi)_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX.$$

Từ định nghĩa của hàm χ , Định lý 1.1, Bổ đề 2.3 và (G), ta có

$$\begin{aligned} & \left| \chi' \left(\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n) \right) \|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v_n), \varphi \rangle \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \right| \\ & \leq C_5 \left\| \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v_n) \right\|_{(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}))^*} \|\varphi\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta-2}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \left| 2\chi' \left(\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n) \right) \|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-4} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n)(v_n, \varphi)_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \right| \\ & \leq C_6 \|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta-1} \|\varphi\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\left| \ell(v_n) \int_{\mathbb{D}} g(X, v_n) \varphi dX \right| \leq C_7 \|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta-1} \|\varphi\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}, \quad (2.24)$$

trong đó $C_j > 0, j = 5, 6, 7$. Do $h_{K_0}(v_n) = 1, h'_{K_0}(v_n) = 0$ và $v_n \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow \infty$, kết hợp với Định lý 1.1, ta có

$$\left\| \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v_n) \right\|_{(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}))^*} \rightarrow 0, \text{ khi } n \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Từ (2.21) - (2.25), khi $n \rightarrow \infty$ ta có

$$\begin{aligned} & \|\psi'(v_n) - \psi'(0)\|_{(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}))^*} \\ & = \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \leq 1} \left| \langle \ell'(v_n), \varphi \rangle \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX + \ell(v_n) \int_{\mathbb{D}} g(X, v_n) \varphi dX \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

nên hàm ψ' là liên tục, tức là $\psi \in C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$.

Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức (2.19). Thật vậy, nếu $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 > 2K_0$ hoặc $v = 0$ khi đó từ (2.6), Bổ đề 2.1 và (2.20), ta có $\langle \psi'(v), v \rangle = 0$. Ngược lại, nếu $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \leq 2K_0$ và $v \neq 0$, chứng minh tương tự như đánh giá (2.13), ta có

$$\begin{aligned} \left| \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) - \mu^{-1} \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v), v \rangle \right| & \leq 2|A| \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + \frac{\mu+9}{\mu} C_3 C_{q_3}^{q_3} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_3} \\ & + \frac{\mu+9}{\mu} C_4 C_{\theta}^{\theta} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Từ (2.14) và (2.26), ta có

$$\left| \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v), v \rangle \right| \leq \mu \left(3|A| \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + |\overline{\Upsilon}_{K_0}(v)| \right). \quad (2.27)$$

Từ định nghĩa của χ ta có nếu $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) \notin [\frac{A}{2}, \frac{A}{4}]$ thì $\ell'(v) = 0$. Ngược lại, nếu

$$\frac{A}{2} \leq \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v) \leq \frac{A}{4}$$

thì

$$|\overline{\Upsilon}_{K_0}(v)| \leq |A| \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2. \quad (2.28)$$

Kết hợp với (2.18), (2.27), (2.28) và Định lý 1.1, ta có

$$\left| k_{K_0}(v) \langle \ell'(v), v \rangle \int_{\mathbb{D}} G(x, v_n) dx \right| \leq 80C_4 C_\theta^\theta \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^\theta. \quad (2.29)$$

Từ Định lý 1.1, Bổ đề 2.1 và (2.6), (2.15) ta có

$$\begin{aligned} \left| \langle h'_{K_0}(v), v \rangle \ell(u) \int_{\mathbb{D}} G(X, v) dX + h_{K_0}(v) \ell(v) \int_{\mathbb{D}} g(X, v) v dX \right| \\ \leq 9C_4 C_\theta^\theta \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^\theta. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Kết hợp (2.20), (2.29) và (2.30) ta có đánh giá (2.19). Do vậy Bổ đề 2.3 được chứng minh. $\square$

Từ Bổ đề 2.1 và Bổ đề 2.3, ta có các khẳng định sau về phiếm hàm $\tilde{\Upsilon}$ như sau:

Bổ đề 2.4. *Giả sử f và g thỏa mãn (F1), (F2), (F4), (F5) và (G). Khi đó ta có*

(K1) *Phiếm hàm $\tilde{\Upsilon}$ được định nghĩa bởi (2.17) thuộc lớp hàm $C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$ và tồn tại hằng số dương C_8 không phụ thuộc vào hàm u thỏa mãn*

$$\left| \tilde{\Upsilon}(v) - \tilde{\Upsilon}(-v) \right| \leq C_8 \left| \tilde{\Upsilon}(v) \right|^{\frac{\theta}{2}}, \forall v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}). \quad (2.31)$$

(K2) $\tilde{\Upsilon}$ không có điểm tới hạn cùng với giá trị tới hạn dương trên $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ và $\mathcal{K}_0 = \{0\}$, trong đó $\mathcal{K}_0 := \{v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) : \tilde{\Upsilon}(v) = 0, \tilde{\Upsilon}'(v) = 0\}$.

Chứng minh. Từ các Bổ đề 2.1, Bổ đề 2.3 và các điều kiện (F1), (F4) suy ra $\tilde{\Upsilon} \in C^1(\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$ và với mọi $v, \varphi \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ ta có

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Upsilon}'(v), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \nabla_{\gamma} v \cdot \nabla_{\gamma} \varphi dX - \int_{\mathbb{D}} f_1(X, v) \varphi dX - h_{K_0}(v) \\ &\times \int_{\mathbb{D}} f_2(X, v) \varphi dX - \langle h'_{K_0}(v), \varphi \rangle \int_{\mathbb{D}} F_2(X, v) dX - \langle \psi'(v), \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Để chứng minh bất đẳng thức (2.31), ta xét hai trường hợp của $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2$ như sau:

Trường hợp 1. Nếu $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 > 2K_0$ hoặc $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \bar{\Upsilon}_{K_0}(v) > \frac{A}{4}$, bởi định nghĩa của k và χ ta có $\psi(v) = 0$. Kết hợp với (F5) và (2.17) bất đẳng thức (2.31) được chứng minh.

Trường hợp 2. Nếu $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \leq 2K_0$ và $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \bar{\Upsilon}_{K_0}(v) \leq \frac{A}{4}$ suy ra

$$|\bar{\Upsilon}_{K_0}(v)| \geq \frac{|A|}{4} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2. \quad (2.33)$$

Từ (G), (2.7), (2.14), (2.15) và (2.33), ta có

$$\begin{aligned} |\tilde{\Upsilon}(v)| &\geq |\bar{\Upsilon}_{K_0}(v)| - 2 \left| \int_{\mathbb{D}} G(X, v) dX \right| \\ &\geq \frac{|A|}{4} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 - 2C_4 C_{\theta}^{\theta} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta} \geq C_9 \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2, \end{aligned}$$

suy ra

$$\left| \tilde{\Upsilon}(v) \right|^{\frac{\theta}{2}} \geq C_{10} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta}. \quad (2.34)$$

Từ (F5), (G), (2.7) và (2.15), ta có

$$\left| \tilde{\Upsilon}(v) - \tilde{\Upsilon}(-v) \right| \leq 2 \left| \int_{\mathbb{D}} G(X, v) dX \right| \leq 2C_4 C_{\theta}^{\theta} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta}. \quad (2.35)$$

Kết hợp (2.34) và (2.35) ta có đánh giá (2.31).

Tiếp theo, ta chứng minh (K2) bằng phương pháp phản chứng. Nếu v_0 là điểm tới hạn của $\tilde{\Upsilon}$ với $\tilde{\Upsilon}(v_0) > 0$, từ (F1), (F4) và (G) ta có $v_0 \neq 0$. Ta xét hai trường hợp của v_0 như sau:

Trường hợp 1. Nếu $\|v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 > 2K_0$ thì

$$h_{K_0}(v_0) = h'_{K_0}(v_0) = \psi'(v_0) = 0.$$

Từ (F2), (2.17) và (2.32), ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tilde{\Upsilon}(v_0) = \tilde{\Upsilon}(v_0) - \frac{1}{\mu} \langle \tilde{\Upsilon}'(v_0), v_0 \rangle \\ &= \frac{\mu - 2}{2\mu} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_{\gamma} v_0|^2 dX + \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{D}} (f_1(X, v_0)v_0 - \mu F_1(X, v_0)) dX < 0, \end{aligned}$$

điều này là mâu thuẫn.

Trường hợp 2. Nếu $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \leq 2K_0$ khi đó từ Định lý 1.1, Bổ đề 2.1 và các điều kiện (2.3), (2.14), (2.17), (2.32), ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tilde{\Upsilon}(v_0) = \tilde{\Upsilon}(v_0) - \frac{1}{\mu} \langle \tilde{\Upsilon}'(v_0), v_0 \rangle \\ &\leq \frac{\mu - 2}{2\mu} \|v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + \frac{\mu + 9}{\mu} C_3 C_{q_3}^{q_3} \|v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^{q_3}(\mathbb{D})}^{q_3} + \frac{\mu + 89}{\mu} C_4 C_{\theta}^{\theta} \|v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta} \\ &\leq \frac{\mu - 2}{4\mu} \|v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 < 0, \end{aligned}$$

điều này là mâu thuẫn. Do đó $\tilde{\Upsilon}$ không có điểm tới hạn cùng với giá trị tới hạn dương trên $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$.

Ta chứng minh $\mathcal{K}_0 = \{0\}$. Từ các giả thiết của f và g ta có $0 \in \mathcal{K}_0$. Nếu $v_0 \neq 0$ và $v_0 \in \mathcal{K}_0$, đánh giá tương tự như trường hợp 1 và 2 ta có mâu thuẫn, nên $\mathcal{K}_0 = \{0\}$. Do vậy bổ đề được chứng minh. $\square$

Tiếp theo, ta kiểm tra điều kiện Palais-Smale của phiếm hàm $\tilde{\Upsilon}$ qua bổ đề sau:

Bổ đề 2.5. *Giả sử f và g thỏa mãn các điều kiện (F1), (F4), (G). Khi đó phiếm hàm $\tilde{\Upsilon}$ thỏa mãn điều kiện Palais-Smale.*

Chứng minh. Để chứng minh phiếm hàm $\tilde{\Upsilon}$ thỏa mãn điều kiện Palais-Smale, trước tiên ta chứng minh phiếm hàm $\tilde{\Upsilon}$ là bị chặn dưới. Thật vậy, từ định nghĩa của h , điều kiện (F1) và Định lý 1.1, nếu $\|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 > 2K_0$ thì

$$\tilde{\Upsilon}(v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 - C_{11} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^q. \quad (2.36)$$

Do $1 < q < 2$ và đánh giá (2.35) ta có

$$\tilde{\Upsilon}(v) \rightarrow +\infty \text{ khi } \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \rightarrow +\infty. \quad (2.37)$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\tilde{\Upsilon}(v)$ thỏa mãn điều kiện Palais-Smale. Giả sử dãy $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ là một dãy trong không gian $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ thỏa mãn điều kiện Palais-Smale, tức là dãy $\{\tilde{\Upsilon}(v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ là bị chặn và

$$\tilde{\Upsilon}'(v_n) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Từ (2.37) ta có $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ là bị chặn trong không gian $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$. Do đó, không mất tính tổng quát, giả sử

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v_0 \text{ trong } \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) \text{ khi } n \rightarrow \infty \\ v_n &\rightarrow v_0 \text{ h.k.n trong } \mathbb{D} \text{ khi } n \rightarrow \infty \\ v_n &\rightarrow v_0 \text{ trong } L^p(\mathbb{D}) \text{ khi } n \rightarrow \infty, \text{ ở đây } p \in [1, 2_\gamma^*). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Từ các giả thiết (F1), (F4), (G) và (2.38), ta có

$$\int_{\mathbb{D}} f_i(X, v_n)(v_n - v_0) dX \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty, i = 1, 2, \quad (2.39)$$

$$\int_{\mathbb{D}} g(X, v_n)(v_n - v_0) dX \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

Từ (2.38), ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \langle \tilde{\Upsilon}'(v_n), v_n - v_0 \rangle \right| = 0. \quad (2.41)$$

Ta xét hai trường hợp của dãy $\{v_n\}_{n=1}^\infty$.

Trường hợp 1. Nếu $\|v_n\|_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 > 2K_0$ hoặc $v_n = 0$, khi đó từ (2.6), (2.7), (2.14), (2.16), ta có

$$h_{K_0}(v_n) = 0, h'_{K_0}(v_n) = 0, \psi'(v_n) = 0.$$

Từ (2.32), ta có

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Upsilon}'(v_n) - \tilde{\Upsilon}'(v_0), v_n - v_0 \rangle &= \|v_n - v_0\|_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \\ &\quad - \int_{\mathbb{D}} (f_1(X, v_n) - f_1(X, v_0))(v_n - v_0) dX. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Trường hợp 2. Nếu $\|v_n\|_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \leq 2K_0$ hoặc $v_n \neq 0$, từ (2.32), ta có

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Upsilon}'(v_n), v_n - v_0 \rangle &= \|v_n - v_0\|_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + \int_{\mathbb{D}} \nabla_{\gamma} v_0 \cdot \nabla_{\gamma} (v_n - v_0) dX \\ &\quad - \int_{\mathbb{D}} f_1(X, v_n) (v_n - v_0) dX - h_{K_0}(v_n) \int_{\mathbb{D}} f_2(x, v_n) (v_n - v_0) dX \\ &\quad - \langle h'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \int_{\mathbb{D}} F_2(X, v_n) dX - \langle \psi'(v_n), v_n - v_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Từ (F4), (2.6), (2.8) và Định lý 1.1, ta có

$$\begin{aligned} &\left| \langle h'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \int_{\mathbb{D}} F_2(X, v_n) dX \right| \\ &\leq C_3 C_{q_3}^{q_3} \|v_n\|_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_3} \left| 2k' \left(\frac{\|v_n\|_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2}{K_0} \right) \frac{(v_n, v_n - v_0)_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}}{K_0} \right| \\ &\leq 2^{\frac{q_3+4}{2}} C_3 C_{q_3}^{q_3} K_0^{\frac{q_3-2}{2}} \left(\|v_n - v_0\|_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + (v_0, v_n - v_0)_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Mặt khác, từ (2.20), ta có

$$\begin{aligned} \langle \psi'(v_n), v_n - v_0 \rangle &= \langle h'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \ell(v_n) \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \\ &\quad + h_{K_0}(v_n) \langle \ell'(v_n), v_n - v_0 \rangle \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \\ &\quad + h_{K_0}(v_n) \ell(v_n) \int_{\mathbb{D}} g(X, v_n) (v_n - v_0) dX. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Hơn nữa, từ (G), (2.8), (2.15) và Định lý 1.1, ta có

$$\begin{aligned} & \left| \langle h'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \ell(v_n) \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \right| \\ & \leq 2^{\frac{\theta+4}{2}} C_4 C_\theta^\theta K_0^{\frac{\theta-2}{2}} \left(\|v_n - v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + (v_0, v_n - v_0)_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Từ định nghĩa của χ , (G), (2.8) và (2.18) ta có

$$\begin{aligned} h_{K_0}(v_n) \langle \ell'(v_n), v_n - v_0 \rangle \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX &= h_{K_0}(v_n) \chi' \left(\|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n) \right) \\ &\times \|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-4} \left(\|v_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2 \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n) (v_n, v_n - v_0)_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \right) \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Từ (2.10), ta có

$$\begin{aligned} \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \nabla_\gamma v_n \cdot \nabla_\gamma (v_n - v_0) dX \\ &- \int_{\mathbb{D}} f_1(X, v_n) (v_n - v_0) dX - h_{K_0}(v_n) \left(\int_{\mathbb{D}} f_2(X, v_n) (v_n - v_0) dX \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{D}} g(X, v_n) (v_n - v_0) dX \right) - \langle h'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \\ &\times \left(\int_{\mathbb{D}} F_2(X, v_n) dX + \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Do (F4), (G), (2.44), (2.46) và (2.48), ta có

$$\begin{aligned} & \left| \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \right| \leq \|v_n - v_0\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \\ & + \left| \langle h'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \int_{\mathbb{D}} F_2(X, v_n) dX \right| \\ & + \left| \langle h'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \right| + o_n(1) \end{aligned}$$

$$\leq (1 + C_{12}) \|v_n - v_0\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + o_n(1), \quad (2.49)$$

trong đó $o_n(1) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ và

$$C_{12} = 2^{\frac{q_3+4}{2}} C_3 C_{q_3}^{q_3} K_0^{\frac{q_3-2}{2}} + 2^{\frac{\theta+4}{2}} C_4 C_\theta^\theta K_0^{\frac{\theta-2}{2}}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \left| h_{K_0}(v_n) \chi' \left(\|v_n\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n) \right) \|v_n\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \langle \overline{\Upsilon}'_{K_0}(v_n), v_n - v_0 \rangle \right. \\ & \quad \left. \times \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \right| \\ & \leq 2^{\frac{\theta+4}{2}} |A|^{-1} C_4 C_\theta^\theta K_0^{\frac{\theta-2}{2}} (1 + C_{12}) \|v_n - v_0\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + o_n(1). \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & \left| h_{K_0}(v_n) \chi' \left(\|v_n\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-2} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n) \right) \|v_n\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{-4} 2\overline{\Upsilon}_{K_0}(v_n)(v_n, v_n - v_0)_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \right. \\ & \quad \left. \times \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n) dX \right| \leq 2^{\frac{\theta+4}{2}} C_4 C_\theta^\theta K_0^{\frac{\theta-2}{2}} \|v_n - v_0\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + o_n(1). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Từ (2.45), (2.46), (2.50) và (2.51), ta có

$$|\langle \psi'(v_n), v_n - v_0 \rangle| \leq C_{13} \|v_n - v_0\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + o_n(1), \quad (2.52)$$

trong đó

$$C_{13} = 2^{\frac{\theta+4}{2}} C_4 C_\theta^\theta K_0^{\frac{\theta-2}{2}} + 2^{\frac{\theta+4}{2}} |A|^{-1} C_4 C_\theta^\theta K_0^{\frac{\theta-2}{2}} (1 + C_{12}).$$

Do $q_3 > 2$ và $\theta > 2$, chọn K_0 là một hằng số dương đủ nhỏ sao cho

$$2^{\frac{q_3+4}{2}} C_3 C_{q_3}^{q_3} K_0^{\frac{q_3-2}{2}} + C_{13} \leq \frac{1}{2}. \quad (2.53)$$

Từ (2.43), (2.44), (2.52) và (2.53), ta có

$$\begin{aligned} & \left| \langle \widetilde{\Upsilon}'(v_n), v_n - v_0 \rangle \right| \geq \left(1 - 2^{\frac{q_3+4}{2}} C_3 C_{q_3}^{q_3} K_0^{\frac{q_3-2}{2}} - C_{13} \right) \|v_n - v_0\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \\ & \quad + o_n(1) \geq \frac{1}{2} \|v_n - v_0\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + o_n(1). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Do (2.41) và (2.53) ta có $v_n \rightarrow v_0$ khi $n \rightarrow \infty$. Do vậy Bổ đề 2.5 được chứng minh. $\square$

Xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta_\gamma v = \lambda v & \text{trong miền } \mathbb{D}, \\ v = 0 & \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{cases} \quad (2.55)$$

từ Mệnh đề 3.1 trong [15, 34], ta có toán tử Δ_γ -Laplace có một dãy phổ rời rạc $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ tương ứng với các hàm riêng $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ trực chuẩn thỏa mãn

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty \text{ và } \|e_n\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} = 1.$$

Đặt $\mathbb{V}_n = \text{span}\{e_i; i \leq n\}$ trong $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ và $\mathbb{V}_n^\perp$ là phần bù trực giao của $\mathbb{V}_n$ trong $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$.

Bổ đề 2.6. *Tồn tại một dãy trực chuẩn $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{D})$ thỏa mãn $\text{supp } \phi_n \subset \mathbb{D}_0, n \in \mathbb{N}$, trong đó $\mathbb{D}_0$ là tập mở không rỗng được xác định trong (F3).*

Chứng minh. Từ (F3), tồn tại $X_0 \in \mathbb{D}_0$ và $\delta_0 > 0$ thỏa mãn $B(X_0, \delta_0) := \{X \in \mathbb{R}^N : |X - X_0| < \delta_0\} \subset \mathbb{D}_0$. Chọn một dãy tăng $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ sao cho

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots, r_n \rightarrow \frac{\delta_0}{4}, \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Đặt

$$\mathbb{O}_n := B(X_0, r_{n+1}) \setminus \overline{B}(X_0, r_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Giả sử $X_n \in \mathbb{O}_n$ và chọn $\rho_n > 0$ thỏa mãn

$$B(X_0, \rho_n) \subset \mathbb{O}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.56)$$

Ta xét hàm φ_0 như sau:

$$\varphi_0(X) := \begin{cases} e^{\frac{1}{|X|^2-1}} & \text{khi } |X| < 1, \\ 0 & \text{khi } |X| \geq 1. \end{cases} \quad (2.57)$$

Ta định nghĩa ϕ_n như sau:

$$\phi_n(X) := \varphi_0\left(\frac{X - X_n}{\rho_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.58)$$

Từ (2.57) và (2.58), ta có

$$\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{D}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hơn nữa, từ (2.56)-(2.58) ta có $\text{supp } \phi_n \subset \mathbb{O}_n \subset \mathbb{D}_0$. Khi đó giá của ϕ_n là rời nhau, tức là dãy $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ là độc lập tuyến tính trong $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$. Bằng phương pháp Gram-Schmidt, Ta xây dựng được một dãy trực chuẩn (ký hiệu $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$) trong $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ thỏa mãn $\text{supp } \phi_n \subset \mathbb{D}_0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Từ dãy $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ trong Bổ đề 2.6, ta định nghĩa:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_n &:= \text{span}\{\phi_i : i \leq n\}, \quad \mathbb{B}_n := \left\{ v \in \mathbb{W}_n : \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \leq 1 \right\}, \\ \mathbb{S}^n &:= \left\{ v \in \mathbb{W}_n : \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} = 1 \right\}, \end{aligned}$$

và

$$\mathbb{S}_+^{n+1} := \left\{ v = w + t\phi_{n+1} : \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} = 1, w \in \mathbb{B}_n, 0 \leq t \leq 1 \right\};$$

$$\begin{aligned} \Lambda_n &:= \left\{ \psi \in C(\mathbb{S}^n, \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})) : \psi \text{ là lẻ} \right\}, \\ \Gamma_n &:= \left\{ \psi \in C(\mathbb{S}_+^{n+1}, \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})) : \psi|_{\mathbb{S}^n} \in \Lambda_n \right\}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\alpha_n = \inf_{\psi \in \Lambda_n} \max_{v \in \mathbb{S}^n} \tilde{\Upsilon}(\psi(v)), \quad \beta_n = \inf_{\psi \in \Gamma_n} \max_{v \in \mathbb{S}_+^{n+1}} \tilde{\Upsilon}(\psi(v)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.60)$$

Với mỗi $\delta > 0$, đặt

$$\Gamma_n(\delta) := \left\{ \psi \in \Gamma_n : \tilde{\Upsilon}(\psi(v)) \leq \alpha_n + \delta, v \in \mathbb{S}_+^{n+1} \right\}, \quad (2.61)$$

$$\beta_n(\delta) := \inf_{\psi \in \Gamma_n(\delta)} \max_{v \in \mathbb{S}_+^{n+1}} \tilde{\Upsilon}(\psi(v)). \quad (2.62)$$

Từ (2.59) - (2.62), ta có $\alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_n(\delta)$, $n \in \mathbb{N}$. Tiếp theo, ta đánh giá các giá trị α_n và $\beta_n(\delta)$.

Bổ đề 2.7. *Giả sử f và g thỏa mãn (F1), (F3), (F4), (G). Khi đó với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có $\alpha_n < 0$.*

Chứng minh. Do không gian $\mathbb{W}_n$ là hữu hạn chiều, nên từ các giả thiết (F3), (F4), (G), với mỗi $v \in \mathbb{W}_n$ ta có

$$\begin{aligned}\tilde{\Upsilon}(v) \leq & \frac{1}{2} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + C_{14} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_2} \\ & + C_{15} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_3} + C_{16} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^\theta - C_{17} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_1}.\end{aligned}$$

Suy ra, tồn tại hằng số $\varepsilon(n) > 0$ và $\kappa(n) > 0$ thỏa mãn $\tilde{\Upsilon}(\kappa v) < -\varepsilon, v \in \mathbb{S}^n$. Ta chọn $\varphi(v) = \kappa v, v \in \mathbb{S}^n$, khi đó từ (2.60), ta có $\alpha_n < 0$. $\square$

Bổ đề 2.8. *Giả sử f và g thỏa mãn (F1), (F3), (F4), (G). Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và $\delta > 0$, ta có $\beta_n(\delta) < 0$.*

Chứng minh. Từ (2.61) và (2.62), cố định $n \in \mathbb{N}$, $0 < \delta < \delta'$, ta có $\Gamma_n(\delta) \subset \Gamma_n(\delta')$ và $\beta_n(\delta) > \beta_n(\delta')$. Khi đó, ta cần chứng minh $\beta_n(\delta) < 0$ với mỗi $\delta \in (0, |\alpha_n|)$. Thật vậy, với mỗi $\delta \in (0, |\alpha_n|)$, từ (2.60), tồn tại $\psi_0 \in \Lambda_n$ thỏa mãn $\max_{v \in \mathbb{S}^n} \tilde{\Upsilon}(\psi_0(u)) \leq \alpha_n + \frac{\delta}{2}$. Do $\psi_0(\mathbb{S}^n)$ là tập compact trong $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$, nên tồn tại số nguyên dương n_0 thỏa mãn

$$\max_{v \in \mathbb{S}^n} \tilde{\Upsilon}((P_{n_0} \circ \psi_0)(u)) \leq \alpha_n + \delta \quad (2.63)$$

trong đó P_{n_0} là toán tử chiếu trực giao từ $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ vào $\mathbb{V}_{n_0}$.

Với mỗi $c \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$\tilde{\Upsilon}^c := \left\{ v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) : \tilde{\Upsilon}(v) \leq c \right\}.$$

Chọn $\bar{\varepsilon} = -\frac{\alpha_n + \delta}{2} > 0$. Từ (F1), (F4), (G) và (2.17), tồn tại hằng số dương ρ_0 thỏa mãn nếu $v \in \overline{B}(0, \rho_0)$ thì $\tilde{\Upsilon}(v) \leq \bar{\varepsilon}$ trong đó $B(X_0, \rho)$ là hình cầu mở tâm X_0 bán kính ρ trong không gian v_0 trong $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ và $\overline{B}(X_0, \rho)$ là tập đóng của $B(X_0, \rho)$ trong $\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$. Từ (2.17) và $\tilde{\Upsilon}(0) = 0$ suy ra $\text{dist}(0, \tilde{\Upsilon}^{-\bar{\varepsilon}}) > 0$. Đặt

$$\rho'_0 := \min\{\rho_0, \text{dist}(0, \tilde{\Upsilon}^{-\bar{\varepsilon}})\},$$

khi đó $\rho'_0 > 0$. Áp dụng Bổ đề biến dạng (Định lý 1.3 trong [6]) khi đó tồn tại hằng số $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ và ánh xạ liên tục $\eta \in C([0, 1] \times \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}), \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}))$ thỏa mãn

$$\eta(1, v) = v \text{ khi } \tilde{\Upsilon}(v) \notin [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}], \quad (2.64)$$

và

$$\eta(1, \tilde{\Upsilon}^\varepsilon \setminus B(0, \rho'_0)) \subset \tilde{\Upsilon}^{-\varepsilon}. \quad (2.65)$$

trong đó $B(0, \rho'_0)$ là lân cận của $\mathcal{K}_0$.

Từ (2.59), ta có $P_{n_0} \circ \psi_0 \in C(\mathbb{S}^n, \mathbb{V}_{n_0})$. Do $\mathbb{W}_{n+1}$ là không gian metric cùng với chuẩn $\|\cdot\|_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}$ và $\mathbb{S}^n$ là tập đóng trong $\mathbb{W}_{n+1}$, theo định lý mở rộng Dugundji (Định lý 4.1 trong [23]), tồn tại ánh xạ

$$\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} : \mathbb{W}_{n+1} \longrightarrow \mathbb{V}_{n_0},$$

hơn nữa

$$\left(\widetilde{(P_{n_0} \circ \psi_0) \mathbb{W}_{n+1}} \right) \subset \text{co} \left((P_{n_0} \circ \psi_0) \mathbb{S}^n \right), \quad (2.66)$$

trong đó co là bao lồi của tập. Do $(P_{n_0} \circ \psi_0) \mathbb{S}^n$ là tập compact trong $\mathbb{V}_{n_0}$, từ định nghĩa của bao lồi ta có $\text{co} \left((P_{n_0} \circ \psi_0) \mathbb{S}^n \right)$ là tập bị chặn trong $\mathbb{V}_{n_0}$. Khi đó tồn tại hằng số ν thỏa mãn

$$\tilde{\Upsilon}(u) \leq \nu, \quad v \in \text{co} \left((P_{n_0} \circ \psi_0) \mathbb{S}^n \right).$$

Từ (2.66), ta có

$$\tilde{\Upsilon} \left(\widetilde{(P_{n_0} \circ \psi_0)v} \right) \leq \nu, \quad \forall v \in \mathbb{W}_{n+1}. \quad (2.67)$$

xét hai trường hợp của ν như sau:

Trường hợp 1. $\nu \leq \varepsilon$. Do $\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \in C(\mathbb{W}_{n+1}, \mathbb{V}_{n_0})$, từ (2.67), ta có

$$\widetilde{(P_{n_0} \circ \psi_0)v} \subset \tilde{\Upsilon}_{n_0}^\varepsilon, \quad v \in \mathbb{W}_{n+1}, \quad (2.68)$$

trong đó $\tilde{\Upsilon}_{n_0}^\varepsilon := \{v \in \mathbb{V}_{n_0} : \tilde{\Upsilon}(v) \leq \varepsilon\}$. Ta định nghĩa ánh xạ Θ như sau:

$$\Theta(v) := \begin{cases} v, & v \notin \overline{B}(0, \rho'_0) \cap \mathbb{V}_{n_0}, \\ v + \left(\rho_0'^2 - \|v\|_{\mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} e_{n_0+1}, & v \in \overline{B}(0, \rho'_0) \cap \mathbb{V}_{n_0}. \end{cases} \quad (2.69)$$

Hiển nhiên, ta có $\Theta \in C(\mathbb{V}_{n_0}, \mathbb{V}_{n_0+1})$ và

$$\left(\Theta \circ \widetilde{(P_{n_0} \circ \psi_0)} \right) v \cap B(0, \rho'_0) = \emptyset, \quad v \in \mathbb{W}_{n+1}. \quad (2.70)$$

Nếu $v \in \mathbb{W}_{n+1}$ và $\left\| \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) v \right\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} > \rho'_0$, khi đó từ (2.68) và (2.69), ta có

$$\left(\Theta \circ \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) \right) v = \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) v \in \widetilde{\Upsilon}_{n_0}^\varepsilon. \quad (2.71)$$

Ngược lại, nếu $v \in \mathbb{W}_{n+1}$ và $\left\| \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) v \right\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \leq \rho'_0$, từ (2.69) ta có

$$\left\| \left(\Theta \circ \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) \right) v \right\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} = \rho'_0.$$

Từ định nghĩa của ρ'_0 và (2.71), ta có

$$\left(\Theta \circ \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) \right) v \in \widetilde{\Upsilon}^\varepsilon, \quad \forall v \in \mathbb{W}_{n+1}. \quad (2.72)$$

Định nghĩa ánh xạ

$$\begin{aligned} \Theta_{n_0} : \mathbb{W}_{n+1} &\longrightarrow \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}) \\ u &\longmapsto \Theta_{n_0}(u) = \eta \left(1, \left(\Theta \circ \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) \right) v \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ta cần chứng minh $\Theta_{n_0} \in \Gamma_n(\delta)$ và $\max_{v \in \mathbb{S}_+^{n+1}} \widetilde{\Upsilon}(\Theta_{n_0}(v)) < 0$. Thật vậy, hiển nhiên ta có $\Theta_{n_0} \in C(\mathbb{S}_+^{n+1}, \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D}))$. Tiếp theo ta $\Theta_{n_0}|_{\mathbb{S}^n} \in \Lambda_k$. Từ Định lý mở rộng Dugundji, ta có

$$\left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) v = (P_{n_0} \circ \psi_0) v, \quad \forall v \in \mathbb{S}^n. \quad (2.74)$$

Từ (2.63) suy ra $(P_{n_0} \circ \psi_0) v \in \widetilde{\Upsilon}^{-2\varepsilon}, v \in \mathbb{S}^n$. Từ Định nghĩa của ρ'_0 và $\widetilde{\Upsilon}^{-2\varepsilon} \subset \widetilde{\Upsilon}^{-\varepsilon}$, ta có

$$\|(P_{n_0} \circ \psi_0) v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} \geq \rho'_0, \quad \forall v \in \mathbb{S}^n. \quad (2.75)$$

Từ (2.69), (2.74) và (2.75), ta có

$$\left(\Theta \circ \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) \right) v = \Theta((P_{n_0} \circ \psi_0) v) = (P_{n_0} \circ \psi_0) v, \quad \forall v \in \mathbb{S}^n. \quad (2.76)$$

Do $(P_{n_0} \circ \psi_0) v \in \widetilde{\Upsilon}^{-2\varepsilon}, \forall v \in \mathbb{S}^n$, kết hợp (2.63), (2.64), (2.73) và (2.76), ta có

$$\Theta_0(v) = \eta \left(1, \left(\Theta \circ \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) \right) u \right) = (P_{n_0} \circ \psi_0) v, \quad \forall v \in \mathbb{S}^n, \quad (2.77)$$

nên $\Theta_0|_{\mathbb{S}^n} \in \Lambda_n$. Hơn nữa, từ (2.61), (2.63) và (2.77), ta có $\Theta_0 \in \Gamma_n(\delta)$. Do $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{V}_{n+1}$, từ (2.70) và (2.72), với mọi $v \in \mathbb{S}^{n+1}$ ta có

$$\left(\Theta \circ \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0}\right)\right) v \cap B(0, \rho'_0) = \emptyset \text{ và } \left(\Theta \circ \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0}\right)\right) v \in \widetilde{\Upsilon}^\varepsilon.$$

Từ (2.65) và (2.73), ta có $\max_{u \in \mathbb{S}_+^{n+1}} \widetilde{\Upsilon}(\Theta_{n_0}(v)) \leq -\varepsilon < 0$ nên $\beta_n(\delta) < 0$.

Trường hợp 2. $\nu > \varepsilon$. Chứng minh tương tự như Bổ đề 2.3 và Bổ đề 2.5, ta có $\widetilde{\Upsilon}|_{\mathbb{V}_{n_0}} \in C^1(\mathbb{V}_{n_0}, \mathbb{R})$ và thỏa mãn điều kiện Palais-Smale. Hơn nữa, $\widetilde{\Upsilon}|_{\mathbb{V}_{n_0}}$ không có điểm tới hạn cùng với giá trị tới hạn dương trên $\mathbb{V}_{n_0}$. Từ định lý khoảng không tới hạn (Định lý 5.1.6 trong [13]), ta có $\widetilde{\Upsilon}^\varepsilon$ là sự rút lại biến dạng mạnh (strong deformation retraction) của $\widetilde{\Upsilon}_{n_0}^\varepsilon$. Vì vậy tồn tại ánh xạ σ thỏa mãn $\sigma \in C(\widetilde{\Upsilon}_{n_0}^\nu, \widetilde{\Upsilon}_{n_0}^\varepsilon)$ và $\sigma(v) = v$, if $v \in \widetilde{\Upsilon}_{n_0}^\varepsilon$. Ta định nghĩa ánh xạ từ $\Psi : \mathbb{V}_{n+1} \longrightarrow \mathbb{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ như sau:

$$\Psi(\cdot) := \sigma \left(1, \left(\Theta \circ \left(\widetilde{P_{n_0} \circ \psi_0} \right) \right) (\cdot) \right).$$

Lý luận tương tự như Trường hợp 1, ta có $\Psi \in \Gamma_n(\delta)$ và $\max_{u \in \mathbb{S}_+^{n+1}} \widetilde{\Upsilon}(\Psi(u)) \leq -\varepsilon < 0$ nên $\beta_n(\delta) < 0$. Do vậy Bổ đề 2.8 được chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.9. *Giả sử f và g thỏa mãn (F1), (F3), (F4), (G). Khi đó, tồn tại hằng số dương C_{14} không phụ thuộc vào n sao cho với mọi n đủ lớn, ta có*

$$\alpha_n \geq -C_{14} n^{\frac{-2q}{N(2-q)}}. \quad (2.78)$$

Chứng minh. Với mỗi $\psi \in \Lambda_n (n \geq 2)$ và $0 \notin \psi(\mathbb{S}^n)$, thì giống của tập genus $\vartheta(\psi(\mathbb{S}^n))$ là xác định và $\vartheta(\psi(\mathbb{S}^n)) \geq \vartheta(S^n) = n$. Từ Mệnh đề 7.8 trong [63] suy ra $\vartheta(\mathbb{S}^k) \cap \mathbb{V}_{k-1}^\perp \neq \emptyset$. Ngược lại, nếu $0 \in \psi(\mathbb{S}^n)$ thì $0 \in \varphi(\mathbb{S}^n) \cap \mathbb{V}_{n-1}^\perp$. Nên với mỗi $\psi \in \Lambda_n (n \geq 2)$ luôn có $\varphi(\mathbb{S}^n) \cap \mathbb{V}_{n-1}^\perp \neq \emptyset$. Do đó, với mỗi $\psi \in \Lambda_n (n \geq 2)$, ta có

$$\max_{v \in \mathbb{S}^n} \widetilde{\Upsilon}(\psi(v)) \geq \inf_{v \in \mathbb{V}_{n-1}^\perp} \widetilde{\Upsilon}(v). \quad (2.79)$$

Từ (F1), (F4), (G), (2.14) và (2.17), với mọi $v \in \mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})$ ta có

$$\begin{aligned}\tilde{\Upsilon}(v) &\geq \frac{1}{2} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 - C_{15} \|v\|_{L^q(\mathbb{D})}^q - k(v) \int_{\mathbb{D}} F_2(X, v) dX - \psi(v) \\ &\geq \frac{1}{4} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 - C_{15} \|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^q.\end{aligned}\quad (2.80)$$

Hơn nữa, do $v \in \mathbb{V}_{n-1}^\perp$, suy ra

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{D})} \leq \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}. \quad (2.81)$$

Kết hợp (2.60), (2.79), (2.80) và (2.81), với mỗi $n \geq 2$, ta có

$$\alpha_n \geq \inf_{s \geq 0} \left(\frac{1}{4} s^2 - C_{15} \lambda_n^{-\frac{q}{2}} s^q \right) = -C_{16} \lambda_n^{\frac{-q}{2-q}}, \quad (2.82)$$

trong đó C_{16} là hằng số dương không phụ thuộc vào n và λ_n . Từ Định lý 1.2 trong [14] (hoặc xem trong [15]), ta có

$$\lambda_n \geq C_{17} n^{\frac{2}{N}}. \quad (2.83)$$

Kết hợp (2.82) và (2.83) ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.10. *Giả sử $\beta_n = \alpha_n$ với mọi $n \geq n_0$, trong đó $n_0 \in \mathbb{N}$. Khi đó tồn tại số nguyên dương n_1 thỏa mãn*

$$|\alpha_n| \geq C_{18} n^{\frac{2}{2-\theta}}, \quad n \geq n_1, \quad (2.84)$$

ở đó C_{18} là hằng số dương không phụ thuộc vào n .

Chứng minh. Với mỗi $n \geq n_0$ và $\varepsilon \in (0, |\alpha_n|)$, từ (2.60) suy ra tồn tại ánh xạ $\psi_0 \in \Gamma_n$ thỏa mãn

$$\max_{v \in \mathbb{S}_+^{n+1}} \tilde{\Upsilon}(\psi_0(v)) < \beta_n + \varepsilon = \alpha_n + \varepsilon. \quad (2.85)$$

Từ $\mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{S}_+^{n+1} \cup (-\mathbb{S}_+^{n+1})$, ta có hàm số ψ_0 có thể thác triển liên tục đến $\mathbb{S}^{n+1}$ và nó là hàm lẻ, ta vẫn ký hiệu là ψ_0 , khi đó $\psi_0 \in \Lambda_{n+1}$. Từ (2.60), ta có

$$\alpha_{n+1} \leq \max_{v \in \mathbb{S}^{n+1}} \tilde{\Upsilon}(\psi_0(v)) = \tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_0)) \quad (2.86)$$

với $u_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$. Nếu $u_0 \in \mathbb{S}_+^{n+1}$, kết hợp với các điều kiện (2.31), (2.85) và (2.86), ta có

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n + \varepsilon + C_8 |\alpha_{n+1}|^{\frac{\theta}{2}}. \quad (2.87)$$

Ngược lại, nếu $v_0 \in -\mathbb{S}_+^{n+1}$, kết hợp với (2.31) và (2.85), ta có

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_0)) &\leq \tilde{\Upsilon}(\psi_0(-v_0)) + C_8 \left| \tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_0)) \right|^{\frac{\theta}{2}} \\ &\leq \alpha_n + \varepsilon + C_8 \left| \tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_0)) \right|^{\frac{\theta}{2}}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Ta xét hai trường hợp của $\tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_0))$ như sau:

Trường hợp 1. $\tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_0)) \leq |\alpha_{n+1}|$, từ (2.86) và (2.87), ta có

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n + \varepsilon + C_8 |\alpha_{n+1}|^{\frac{\theta}{2}}. \quad (2.89)$$

Trường hợp 2. $\tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_0)) > |\alpha_{n+1}|$. Do (2.85), tồn tại $v_1 \in \mathbb{S}_+^{n+1}$ thỏa mãn

$$\tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_1)) < \alpha_n + \varepsilon < 0. \quad (2.90)$$

Mặt khác, do $\tilde{\Upsilon} \circ \psi_0 \in C(\mathbb{S}^{n+1}, \mathbb{R})$ và $\mathbb{S}^{n+1}$ là không gian liên thông cùng với chuẩn là $\|\cdot\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}$, áp dụng định lý giá trị trung bình, ta có tồn tại $v_2 \in \mathbb{S}^{n+1}$ thỏa mãn $\tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_2)) = \frac{|\alpha_{n+1}|}{2}$. Từ (2.85) suy ra $v_2 \in -\mathbb{S}^{n+1}$. Do (2.31) và (2.85), ta có

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_2)) &\leq \tilde{\Upsilon}(\psi_0(-v_2)) + C_8 \left| \tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_2)) \right|^{\frac{\theta}{2}} \\ &\leq \alpha_n + C_8 \left| \tilde{\Upsilon}(\psi_0(v_2)) \right|^{\frac{\theta}{2}}, \end{aligned}$$

do vậy

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n + \varepsilon + C_8 |\alpha_{n+1}|^{\frac{\theta}{2}}. \quad (2.91)$$

Từ Bổ đề 2.7, (2.87), (2.89) và (2.91) ta có

$$|\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}| + C_8 |\alpha_{n+1}|^{\frac{\theta}{2}}, \quad n \geq n_0. \quad (2.92)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức (2.84) bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, với k_0, k_1 là các hằng số dương và k_1 phụ thuộc vào k_0 , khi đó với mọi $t \in [0, k_1]$, ta có bất đẳng thức sau

$$(1+t)^{k_0} \geq 1 + \frac{k_0 t}{2}. \quad (2.93)$$

Đặt $k_0 := 2(\theta - 2)^{-1}$. Từ (2.93) khi đó tồn tại $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, sao cho với mọi $n \geq \tilde{n}_0$ ta có

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{\theta-2}} \geq 1 + \frac{1}{n(\theta-2)}. \quad (2.94)$$

Định nghĩa

$$C_{18} := \min \left\{ n_1^{\frac{2}{\theta-2}} |\alpha_{n_1}|, \left(\frac{1}{C_8(\theta-2)} \right)^{\frac{2}{\theta-2}} \right\}, \quad (2.95)$$

ở đây $n_1 = \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$.

Từ (2.95), ta có

$$|\alpha_{n_1}| \geq C_{18} n_1^{\frac{2}{2-\theta}}. \quad (2.96)$$

Nên (2.84) đúng với n_1 .

Giả sử (2.84) đúng với $n \geq n_1$. Ta cần chứng minh (2.84) đúng với $n+1$. Ta chứng minh khẳng định bằng phản chứng, giả sử (2.84) là sai với $n+1$, tức là

$$|\alpha_{n+1}| \leq C_{18}(n+1)^{\frac{2}{2-\theta}}. \quad (2.97)$$

Do (2.84) đúng với n , nên từ (2.31), (2.92) và (2.97), ta có

$$\begin{aligned} C_{18} n_1^{\frac{2}{2-\theta}} &\leq |\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}| + C_8 |\alpha_{n+1}|^{\frac{\theta}{2}} \\ &\leq C_{18}(1+n)^{\frac{2}{2-\theta}} + C_8 C_{18}^{\frac{\theta}{2}} (1+n)^{\frac{\theta}{2-\theta}}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Chia cả hai vế của (2.98) cho $C_{18}(n+1)^{\frac{2}{2-\theta}}$, sau đó kết hợp với (2.95), ta có

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{\theta-2}} < 1 + C_8 C_{18}^{\frac{\theta-2}{2}} \frac{1}{n+1} < 1 + C_8 C_{18}^{\frac{\theta-2}{2}} \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n(\theta-2)},$$

điều này là mâu thuẫn với (2.94). Do đó, theo phương pháp quy nạp ta có (2.84) là đúng. Nên Bổ đề 2.10 được chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.11. Giả sử $\beta_n > \alpha_n$. Khi đó với mỗi $\delta \in (0, \beta_n - \alpha_n)$, $\beta_n(\delta)$ định nghĩa bởi (2.61) là giá trị tới hạn của $\tilde{\Upsilon}$.

Chứng minh. Sử dụng Bổ đề biến dạng trong [6], lý luận tương tự như Bổ đề 1.57 trong [63], ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bây giờ sử dụng các bổ đề trên ta chứng minh kết quả chính của chương này.

Từ (2.4) và các Bổ đề 2.7, Bổ đề 2.9 và Bổ đề 2.10, với n đủ lớn ta có $\beta_n > \alpha_n$ nên ta chọn một dãy $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ thỏa mãn $\beta_{n_k} > \alpha_{n_k}$. Từ các Bổ đề 2.8, Bổ đề 2.9 và Bổ đề 2.11, tồn tại một dãy các điểm tới hạn $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ của $\tilde{\Upsilon}$ thỏa mãn

$$-C_{14}n_k^{\frac{-2q}{N(2-q)}} \leq \alpha_{n_k} < \beta_{n_k} \leq \beta_{n_k}(\delta_k) = \tilde{\Upsilon}(u_{n_k}) < 0, \quad (2.99)$$

trong đó $\delta_k \in (0, \beta_{n_k} - \alpha_{n_k})$. Hiển nhiên $v_{n_k} \neq 0, k \in \mathbb{N}$. Khi đó ta xét hai trường hợp của dãy $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ như sau:

Trường hợp 1. $\|v_{n_k}\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 > 2K_0$. Từ (2.6), (2.7) và (2.20) suy ra

$$h_{K_0}(v_{n_k}) = 0, h'_{K_0}(v_{n_k}) = 0 \text{ and } \psi'(v_{n_k}) = 0.$$

Từ (F2), (2.9) và (2.32), ta có

$$\begin{aligned} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_{n_k}) &= \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_{n_k}) - \mu^{-1} \langle \tilde{\Upsilon}'(v_{n_k}), v_{n_k} \rangle \\ &= 2A \|v_{n_k}\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 + \int_{\mathbb{D}} (\mu^{-1} f_1(X, v_{n_k}) v_{n_k} - F_1(X, v_{n_k})) dX \\ &\leq A \|v_{n_k}\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Trường hợp 2. $\|v_{n_k}\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \leq 2K_0$. Từ các Bổ đề 2.1, Bổ đề 2.3, các điều kiện (F2), (F4), (G) (2.9) và (2.32) ta có

$$\begin{aligned} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_{n_k}) &\leq \frac{1}{2} \|v_{n_k}\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 - \int_{\mathbb{D}} F_1(X, v_{n_k}) dX \\ &\quad + C_3 C_{q_3}^{q_3} \|v_{n_k}\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_3} + C_4 C_{\theta}^{\theta} \|v_{n_k}\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Upsilon}'(v_{n_k}), v_{n_k} \rangle &\geq \|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 - \int_{\mathbb{D}} f_1(X, v_{n_k}) v_{n_k} dX \\ &\quad - 9C_3 C_{q_3}^{q_3} \|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_3} - 89C_4 C_{\theta}^{\theta} \|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_{n_k}) &= \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_{n_k}) - \mu^{-1} \langle \tilde{\Upsilon}'(v_{n_k}), v_{n_k} \rangle \leq 2A \|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \\ &\quad + \frac{\mu+9}{\mu} C_3 C_{q_3}^{q_3} \|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{q_3} + \frac{\mu+89}{\mu} C_4 C_{\theta}^{\theta} \|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^{\theta} \\ &\leq A \|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Do vậy, từ (2.15), (2.100) hoặc (2.101), ta có $\ell(v_{n_k}) = 0$ and $\ell'(v_{n_k}) = 0$.

Nên

$$\tilde{\Upsilon}(v_{n_k}) = \overline{\Upsilon}_{K_0}(v_{n_k}) \leq A \|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 < 0.$$

Từ (2.99), ta có

$$\|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty.$$

Nên tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|v_{n_k}\|_{\mathcal{S}_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})}^2 < K_0$ với mọi $k \geq k_0$. Từ (2.7) và (2.20) suy ra

$$h_{K_0}(v_{n_k}) = 1, h'_{K_0}(v_{n_k}) = 0 \text{ với mọi } k \geq k_0.$$

Kết hợp (2.20), (2.32) và (2.56), với k đủ lớn, ta có v_{n_k} là nghiệm yếu của bài toán (2.1)–(2.2). Do vậy Định lý 2.1 được chứng minh.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính đa nghiệm của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_{γ} , với một lớp các hàm phi tuyến tương ứng. Tác giả đã xây dựng được một lớp hàm phi tuyến không thuộc lớp hàm trong [50, 51, 63] tương ứng với toán tử Δ_{γ} . Chúng tôi sử dụng phương pháp nhiễu và phương pháp cắt chứng minh được phương trình có một dãy nghiệm có phiếm hàm năng lượng âm và dần hội tụ về 0.

Chương 3

Sự tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán biên elliptic suy biến

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm trong miền hình sao và sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng:

$$-\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v = g(X, v) \text{ trong miền } \mathbb{D}, \quad (3.1)$$

$$v = 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \quad (3.2)$$

trong đó $\mathbb{D}$ là miền bị chặn chứa gốc toạ độ và biên trơn trong không gian $\mathbb{R}^N$ với $N \geq 3$ và toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ có dạng

$$\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z$$

với $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$ và $N = N_1 + N_2 + N_3, k_i \geq 0, 1 \dots, 4$.

Nội dung chính của chương này là xây dựng đồng nhất thức kiểu Pohozeav cho bài toán, từ đó chỉ ra trường hợp hàm phi tuyến để phương trình không có nghiệm không tầm thường. Hơn nữa, sử dụng phương pháp biến phân và các định lý về điểm tới hạn ta chỉ ra sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường ứng với một lớp hàm phi tuyến.

Nội dung của chương gồm hai phần

- Phần thứ nhất: Trình bày kết quả sự không tồn tại nghiệm cổ điển không tầm thường.

- Phần thứ hai: Trình bày kết quả sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường.

Nội dung của chương này được viết dựa vào công trình [2] trong Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. Sự không tồn tại nghiệm không tầm thường

Trong mục này, chúng tôi xây dựng đồng nhất thức kiểu Pohozeav từ đó chỉ ra lớp hàm phi tuyến đề bài toán (3.1)-(3.2) chỉ có nghiệm tầm thường $v \equiv 0$ trong miền hình sao. Ta đưa ra định nghĩa nghiệm cổ điển của bài toán như sau:

Định nghĩa 3.1. Hàm $v(X)$ được gọi là nghiệm cổ điển của bài toán (3.1)-(3.2) nếu $v(X) \in \Lambda^2(\overline{\mathbb{D}})$ và thỏa mãn các phương trình của bài toán (3.1)-(3.2), tức là

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \text{ trong miền } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên biên } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

Khi đó ta có đồng nhất thức kiểu Pohozeav.

Định lý 3.1. Giả sử $g(X, t) = g(t)$ và $v(X) \in \Lambda^2(\overline{\mathbb{D}})$ là nghiệm của bài toán (3.1)-(3.2). Khi đó ta có

$$\int_{\mathbb{D}} \left(N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} G(v) - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} - 2}{2} g(v)v \right) dX = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} \nu_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \tilde{\nu}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 ds, \quad (3.3)$$

trong đó $\nu := (\nu_{x_1}, \dots, \nu_{x_{N_1}}, \nu_{y_1}, \dots, \nu_{y_{N_2}}, \nu_{z_1}, \dots, \nu_{z_{N_3}})$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên biên của $\mathbb{D}$ và

$$\begin{aligned} \nu_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} &:= |\nu_x|^2 + |\nu_y|^2 + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 |\nu_z|^2, \\ \tilde{\nu}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} &:= (x, \nu_x) + (y, \nu_y) + (1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4)(z, \nu_z) \\ (x, \nu_x) &:= \sum_{i=1}^{N_1} x_i \nu_i; (y, \nu_y) := \sum_{j=1}^{N_2} y_j \nu_j; (z, \nu_z) := \sum_{\ell=1}^{N_3} z_\ell \nu_\ell, G(\tau) := \int_0^\tau g(t) dt, \end{aligned}$$

$$|\nu_x|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} |\nu_i|^2; |\nu_y|^2 = \sum_{j=1}^{N_2} |\nu_j|^2; |\nu_z|^2 = \sum_{\ell=1}^{N_3} |\nu_\ell|^2, dX := dx dy dz.$$

Chứng minh. Với t_1, t_2 là các số thực, áp dụng công thức Green, ta có

$$\begin{aligned} & (t_1 + t_2 + 1) \int_{\mathbb{D}} G(v) dX \\ &= - \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{t_1(x, \nabla_x v)}{N_1} + \frac{t_2(y, \nabla_y v)}{N_2} + \frac{(z, \nabla_z v)}{N_3} \right) f(v) dX \\ &= \int_{\mathbb{D}} \left[\frac{t_1(x, \nabla_x v)}{N_1} + \frac{t_2(y, \nabla_y v)}{N_2} + \frac{(z, \nabla_z v)}{N_3} \right] \\ & \quad \times \left[\Delta_x v + \Delta_y v + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z v \right] dX. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{t_1(x, \nabla_x v)}{N_1} \Delta_x v dX &= \frac{(N_1 - 2)t_1}{2N_1} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_x v|^2 dX \\ & \quad + \frac{t_1}{2N_1} \int_{\partial \mathbb{D}} (x, \nu_x) \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 |\nu_x|^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{t_1(x, \nabla_x v)}{N_1} \Delta_y v dX &= \frac{t_1}{2} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_y v|^2 dX \\ & \quad + \frac{t_1}{2N_1} \int_{\partial \mathbb{D}} (x, \nu_x) \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 |\nu_y|^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \frac{t_1(x, \nabla_x v)}{N_1} |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z v dX \\ &= \frac{t_1}{2N_1} \int_{\partial \mathbb{D}} (x, \nu_x) |\nu_z|^2 |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 ds \\ & \quad + \frac{t_1}{2N_1} (N_1 + 2k_1 + 2k_3) \int_{\mathbb{D}} |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 |\nabla_z v|^2 dX, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{t_2(y, \nabla_y v)}{N_2} \Delta_x v dX &= \frac{t_2}{2N_2} \int_{\partial \mathbb{D}} (y, \nu_y) |\nu_x|^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 ds \\ &\quad + \frac{t_2}{2} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_x v|^2 dX, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{t_2(y, \nabla_y v)}{N_2} \Delta_y v dX &= \frac{(N_2 - 2)t_2}{2N_2} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_y v|^2 dX \\ &\quad + \frac{t_2}{2N_2} \int_{\partial \mathbb{D}} (y, \nu_y) \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 |\nu_y|^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{t_2(y, \nabla_y v)}{N_2} |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z v dX \\ = \frac{t_2}{2N_2} \int_{\partial \mathbb{D}} (y, \nu_y) |\nu_z|^2 |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 ds \\ + \frac{t_2}{2N_2} (N_2 + 2k_2 + 2k_4) \int_{\mathbb{D}} |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 |\nabla_z v|^2 dX, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{(z, \nabla_z v)}{N_3} \Delta_x v dX &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_x v|^2 dX \\ &\quad + \frac{1}{2N_3} \int_{\partial \mathbb{D}} (z, \nu_z) \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 |\nu_x|^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{(z, \nabla_z v)}{N_3} \Delta_y v dX &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_y v|^2 dX \\ &\quad + \frac{1}{2N_3} \int_{\partial \mathbb{D}} (z, \nu_z) \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 |\nu_y|^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{(z, \nabla_z v)}{N_3} |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \Delta_z v dX \\ = \frac{1}{2N_3} \int_{\partial \mathbb{D}} (z, \nu_z) |\nu_z|^2 |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 ds \end{aligned}$$

$$+ \frac{N_3 - 2}{2N_3} \int_{\mathbb{D}} |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 |\nabla_z v|^2 dX.$$

Ta chọn

$$t_1 = \frac{N_1}{N_3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 1)}, t_2 = \frac{N_2}{N_3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 1)},$$

khi đó vế phải của (3.4) trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{N} - 2}{2N_3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 1)} \\ & \times \int_{\mathbb{D}} \left\{ |\nabla_x v|^2 + |\nabla_y v|^2 + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 |\nabla_z v|^2 \right\} dX \\ & + \frac{1}{2N_3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 1)} \int_{\partial \mathbb{D}} \nu_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \tilde{\nu}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Do $v = 0$ trên $\partial \mathbb{D}$ nên ta có

$$\nabla_x v = \nu_x \frac{\partial v}{\partial \nu}, \nabla_y v = \nu_y \frac{\partial v}{\partial \nu}, \nabla_z v = \nu_z \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ ở trên biên của } \mathbb{D}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} g(v) v dX &= \int_{\mathbb{D}} \left\{ |\nabla_x v|^2 + |\nabla_y v|^2 \right. \\ & \quad \left. + |x|^{2k_1} |y|^{2k_2} \left(|x|^{k_3} + |y|^{k_4} \right)^2 |\nabla_z v|^2 \right\} dX. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Từ (3.4), (3.5) và (3.6) ta có (3.3) được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 3.2. Miền $\mathbb{D}$ được gọi là $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ – hình sao tại gốc tọa độ nếu gốc tọa độ $O \in \mathbb{D}$ và bất đẳng thức $\tilde{\nu}_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \geq 0$ đúng với mọi điểm trên biên của $\mathbb{D}$.

Sử dụng Định lý 3.1, ta đưa ra một số trường hợp riêng của hàm g mà bài toán (3.1)-(3.2) chỉ có nghiệm tầm thường, cụ thể như sau

Hệ quả 3.1. Giả sử $g(X, \tau) \equiv g(\tau)$ và $\mathbb{D}$ là $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ – hình sao tại gốc tọa độ và

$$N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} G(\tau) - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} - 2}{2} g(\tau) \tau < 0 \quad (3.7)$$

với mỗi $\tau \neq 0$. Khi đó bài toán (3.1)-(3.2) không có nghiệm không tầm thường $v \in \Lambda^2(\overline{\mathbb{D}})$. Hơn nữa, nếu (3.7) là đúng với $\tau > 0$ khi đó bài toán (3.1)-(3.2) không có nghiệm dương không tầm thường $v \in \Lambda^2(\overline{\mathbb{D}})$.

Hệ quả 3.2. Giả sử $\mathbb{D}$ là $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$ – hình sao tại gốc tọa độ và

$$g(X, \tau) = \lambda\tau + |\tau|^p \tau \text{ với } \lambda \leq 0, p > \frac{4}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} - 2}.$$

Khi đó bài toán (3.1)-(3.2) chỉ có nghiệm tầm thường $v \equiv 0$.

3.2. Sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường

Trong mục này, chúng tôi xây dựng một lớp hàm phi tuyến mà bài toán (3.1)-(3.2) có nghiệm yếu không tầm thường. Ta giả sử lớp hàm phi tuyến thỏa mãn các điều kiện sau:

(H1) $g : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Carathéodory thỏa mãn tồn tại $q_1 \in (2, N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2})$, $\omega \in \mathcal{K}_{2, q_1}$ và các hằng số dương C_0 sao cho

$$|g(X, \tau)| \leq |\omega(X)\tau|^{q_1-1} + C_0 \quad \forall (X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R};$$

(H2) Tồn tại $C \in [0, +\infty)$ và $h \in L^1(\mathbb{D})$ sao cho $|g(X, \tau)| \leq h(X)$ với mọi $X \in \mathbb{D}$ và $|\tau| \leq C$;

(H3) Tồn tại một hàm không âm k trong $L^{q_2}(\mathbb{D})$, $q_2 > \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}$ sao cho $k(X) \leq \frac{g(X, \tau)}{\tau}$ với mỗi $(X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$;

(H4) $g(X, 0) = 0$ với mỗi $X \in \mathbb{D}$ và giới hạn

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{g(X, \tau)}{\tau} = 0 \text{ đều theo } X \in \mathbb{D};$$

(H5) $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{g(X, \tau)}{\tau} = +\infty$ hoặc $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{g(X, \tau)}{\tau} = +\infty$ h.k.n trong $\mathbb{D}$;

(H6) $\frac{g(X, \tau)}{\tau}$ tăng khi $\tau \geq C$ và giảm khi $\tau \leq -C$ với mọi $X \in \mathbb{D}$.

Trước tiên, ta đưa ra khái niệm nghiệm yếu của bài toán.

Định nghĩa 3.3. Hàm v thuộc không gian $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.1)-(3.2) nếu với mọi $\varphi \in \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ ta có đồng nhất thức sau

$$\int_{\mathbb{D}} \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \cdot \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi dX - \int_{\mathbb{D}} g(X, v(X)) \varphi(X) dX = 0.$$

Định lý 3.2. *Giả sử g thỏa mãn các điều kiện (H1)-(H6). Khi đó bài toán (3.1)-(3.2) có một nghiệm yếu không tầm thường.*

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán, ta sử dụng phương pháp biến phân. Ta xét phiếm hàm năng lượng của bài toán (3.1)-(3.2) như sau:

$$\Upsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 dX - \int_{\mathbb{D}} G(X, v(X)) dX.$$

Từ Định lý 1.8 và g thỏa mãn (H1) ta có Υ xác định trên $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ hơn nữa $\Upsilon \in C^1(\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D}), \mathbb{R})$ và với mọi $\varphi \in \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ ta có

$$\langle \Upsilon'(v), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{D}} \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \cdot \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi dX - \int_{\mathbb{D}} g(X, v(X)) \varphi dX.$$

Từ định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (3.1)-(3.2), ta có nghiệm yếu của bài toán (3.1)-(3.2) là điểm tới hạn của phiếm hàm năng lượng Υ . Do vậy, để chứng minh Định lý 3.2, ta chứng minh phiếm hàm Υ có điểm tới hạn. Ta kiểm tra phiếm hàm Υ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1.5. Trước tiên ta đi kiểm tra điều kiện (i) trong Định lý 1.5.

Bổ đề 3.1. *Giả sử rằng f thỏa mãn các điều kiện (H1) và (H4). Khi đó tồn tại các hằng số dương ρ, ϱ sao cho*

$$\Upsilon(v) \geq \varrho, \quad \forall v \in \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D}), \|v\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})} = \rho.$$

Chứng minh. Để chứng minh bổ đề này, ta sử dụng phương pháp phản chứng. Với mọi số tự nhiên n , ta giả sử

$$\inf \left\{ \Upsilon(v) : v \in \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D}), \|v\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{n} \right\} \leq 0.$$

Khi đó tồn tại một dãy $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$\|v_n\|_{S_{\gamma,0}^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{n} \text{ và } \Upsilon(v_n) < \frac{1}{n^3}.$$

Do đó

$$\frac{1}{n} > \frac{\Upsilon(v_n)}{\|u_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^2} = \frac{1}{2} - \int_{\mathbb{D}} \frac{G(X, v_n(X))}{\|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^2} dX,$$

suy ra

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{G(X, v_n(X))}{\|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^2} dX > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}. \quad (3.8)$$

Từ (H4) với mỗi $\varepsilon > 0$, khi đó tồn tại $\delta > 0$ thỏa mãn

$$|G(X, \tau)| \leq \varepsilon \tau^2 \text{ với } |\tau| \leq \delta. \quad (3.9)$$

Từ (H1) ta có

$$|G(X, \tau)| \leq \frac{1}{q_1} |\omega(X)|^{q_1-1} |\tau|^{q_1} + C(\delta) |\tau|^{q_1} \text{ với } |\tau| \geq \delta. \quad (3.10)$$

Từ (3.9), (3.10), Định lý 1.1 và áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{D}} G(X, v_n(X)) dX \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{\mathbb{D}} |v_n(X)|^2 dX + \frac{1}{q_1} \int_{\mathbb{D}} |\omega(X)|^{q_1-1} |v_n(X)|^{q_1} dX \\ & + C(\delta) \int_{\mathbb{D}} |v_n(X)|^{q_1} dX \leq \varepsilon \|v_n\|_{L^2(\mathbb{D})}^2 + C(\delta) \|v_n\|_{L^{q_1}(\mathbb{D})}^{q_1} \\ & + \frac{1}{q_1} \left(\int_{\mathbb{D}} |\omega(X) v_n(X)|^{q_1} dX \right)^{\frac{q_1-1}{q_1}} \left(\int_{\mathbb{D}} |v_n(X)|^{q_1} dX \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ & \leq \varepsilon C_2^2 \|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^2 + \frac{C_{q_1}^{q_1}}{q_1} \|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^{q_1} + C(\delta) C_{q_1}^{q_1} \|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^{q_1}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\left| \int_{\mathbb{D}} \frac{G(X, v_n(X))}{\|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^2} dX \right| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty,$$

điều này mâu thuẫn với (3.8). Nên Bổ đề 3.1 được chứng minh. $\square$

Tiếp theo, ta kiểm tra điều kiện (ii) của Định lý 1.5.

Bổ đề 3.2. *Giả sử f thỏa mãn các điều kiện (H3) và (H5) với ρ xác định trong Bổ đề 3.1. Khi đó tồn tại hàm v_1 trong không gian $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D}) \setminus B(0, \rho)$ sao cho $\Upsilon(u_1) < 0$.*

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{g(X, \tau)}{\tau} = +\infty. \quad (3.11)$$

Chọn $v \in \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ sao cho $\|v\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})} = 1$, $v > 0$ và $\|v\|_{L^2(\mathbb{D})} \neq 0$. Khi đó, với bất kì hằng số $R > 0$, ta có

$$\Upsilon(Mv) = \frac{M^2}{2} - \int_{\mathbb{D}} G(X, Mv(X)) dX.$$

Từ (3.11), tồn tại một số $R > 0$ sao cho $g(X, \tau) \geq \frac{4\tau}{\|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^2}$ với $\tau \geq R$.

Hơn nữa, từ (H3) ta có

$$G(X, \tau) \geq \int_0^R k(X) \tau d\tau = k(X) \frac{R^2}{2} \text{ với } 0 \leq \tau \leq R,$$

$$\begin{aligned} G(X, \tau) &= \int_0^R g(X, s) ds + \int_R^\tau g(X, s) ds \\ &\geq k(X) \frac{R^2}{2} + \frac{2\tau^2}{\|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^2} - \frac{2R^2}{\|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^2} \text{ với } \tau \geq R. \end{aligned}$$

Khi $0 \leq Mv \leq R$ trên $\mathbb{D}_{\frac{R}{M}}^v := \{X \in \mathbb{D} : |v(X)| \leq \frac{R}{M}\}$ ta có

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} G(X, Mv(X)) dX \\ &= \int_{\mathbb{D}_{\frac{R}{M}}^v} G(X, Mv(X)) dX + \int_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{\frac{R}{M}}^v} G(X, Mv(X)) dX \\ &\geq \int_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{\frac{R}{M}}^v} \frac{2M^2 v^2(X)}{\|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^2} dX + R^2 \int_{\mathbb{D}} k(X) dX - \frac{2R^2}{\|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^2} \text{Vol}(\mathbb{D}). \end{aligned}$$

Từ Định lí của Lebesgue tồn tại một số M_0 sao cho

$$\int_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{\frac{R_0}{M}}^v} v^2(X) dX \geq \frac{\|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^2}{2}.$$

Do vậy, nếu $M \geq M_0$ thì

$$\int_{\mathbb{D}} G(X, Mv(X)) dX \geq M^2 + R^2 \int_{\mathbb{D}} k(X) dX - \frac{2R^2}{\|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^2} \text{Vol}(\mathbb{D}).$$

Do đó, nếu

$$M > \max \left\{ 2 \sqrt{-R^2 \int_{\mathbb{D}} k(X) dX + \frac{2R^2}{\|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^2} \text{Vol}(\mathbb{D})}, M_0 \right\}$$

thì

$$\Upsilon(Mv) \leq -R^2 \int_{\mathbb{D}} k(X) dX + \frac{2R^2}{\|v\|_{L^2(\mathbb{D})}^2} \text{Vol}(\mathbb{D}) - \frac{M^2}{2} < 0.$$

Do vậy, Υ thỏa mãn điều kiện (ii) trong Định lý 1.5. Trong trường hợp

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{g(X, \tau)}{\tau} = +\infty.$$

chứng minh tương tự ta có Υ thỏa mãn điều kiện (ii) trong Định lý 1.5. Nên bỏ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 3.3. *Giả sử g thỏa mãn các điều kiện (H2) và (H6). Khi đó tồn tại một số thực dương C_3 sao cho với mọi $X \in \mathbb{D}$, $|s| \leq |t|$ ta có*

$$g(X, s)s - 2G(X, s) \leq g(X, t)t - 2G(X, t) + C_3 h(X).$$

Chứng minh. Từ (H6) và Bổ đề 2.3 trong [38], với mỗi $X \in \mathbb{D}$ ta có

$$\tau \mapsto g(X, \tau)\tau - 2G(X, \tau).$$

tăng với $\tau \geq C$ và giảm khi $\tau \leq -C$. Do vậy, với mọi $X \in \mathbb{D}$, $C \leq s \leq t$ ta có

$$g(X, s)s - 2G(X, s) \leq g(X, t)t - 2G(X, t).$$

Cho $(X) \in \mathbb{D}$ và $\tau \in [-C, C]$. Từ (H2) ta có

$$|g(X, \tau)| \leq h(X), |G(X, \tau)| \leq \int_0^\tau h(X) d\tau \leq Ch(X).$$

Nên với mọi $x \in \mathbb{D}$ và $0 \leq s \leq t \leq C$, ta có

$$\begin{aligned} g(X, s)s - 2G(X, s) &\leq g(X, t)t - 2G(X, t) + 6Ch(X), \\ g(X, s)s - 2G(X, s) &\leq g(X, C)C - 2G(X, C) + 6Ch(X) \\ &\leq g(X, t)t - 2G(X, t) + 6Ch(X). \end{aligned}$$

Do vậy bổ đề đúng khi $0 \leq s \leq t$. Tương tự ta có được điều phải chứng minh nếu $t \leq s \leq 0$. Nên Bổ đề 3.3 được chứng minh. $\square$

Ta kiểm tra điều kiện $(C)_c$ của phiếm hàm Υ .

Bổ đề 3.4. *Giả sử g thỏa mãn các điều kiện (H1)–(H3), (H5) và (H6). Khi đó Υ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$.*

Chứng minh. Giả sử $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ là một dãy con của không gian $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với c bất kỳ, tức là

$$\begin{aligned} \Upsilon(v_n) &\rightarrow c \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ và} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}\right) \|\Upsilon'(v_n)\|_{(\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D}))^*} &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nên

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{2} g(X, v_n(x)) v_n(X) - G(X, v_n(X)) \right) dX \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\Upsilon(v_n) - \frac{1}{2} \langle \Upsilon'(v_n), v_n \rangle \right) = c. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sử dụng phương pháp phản chứng ta đi chứng minh dãy $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ là bị chặn trong không gian $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$. Giả sử dãy $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ không bị chặn trong

không gian $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$. Khi đó không mất tính tổng quát giả sử $\|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})} > 1$ và

$$\|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})} \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty. \quad (3.14)$$

Đặt

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}},$$

khi đó $\|w_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})} = 1$, do vậy tồn tại dãy con của dãy w_n là hội tụ yếu trong không gian $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$. Không mất tính tổng quát, giả sử dãy $\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$ hội tụ yếu tới w in $\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$. Do miền $\mathbb{D}$ là bị chặn, nên theo Định lý 1.1 ta có

$$\begin{aligned} w_n &\rightarrow w \text{ trong } L^q(\mathbb{D}) \text{ khi } n \rightarrow +\infty, \text{ ở đây } q \in [1, \tilde{2}^*), \\ w_n &\rightarrow w \text{ h.k.n trong } \mathbb{D} \text{ khi } n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Bây giờ, ta xét hai trường hợp của w là $w = 0$ hoặc $w \neq 0$.

Trường hợp 1: Nếu $w = 0$, khi đó với bất kì $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $k_n \in [0, 1]$ sao cho

$$\Upsilon(k_n v_n) = \max \{ \Upsilon(t v_n) : t \in [0, 1] \}. \quad (3.16)$$

Cố định một số nguyên dương m và đặt $\psi_n = (4m)^{1/2} w_n$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} \psi_n &\rightarrow 0 \text{ trong } \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D}) \text{ khi } n \rightarrow +\infty, \\ \psi_n &\rightarrow 0 \text{ h.k.n trong } \mathbb{D} \text{ khi } n \rightarrow +\infty, \\ \psi_n &\rightarrow 0 \text{ trong } L^q(\mathbb{D}) \text{ khi } n \rightarrow +\infty, \text{ ở đây } q \in [1, \tilde{2}^*), \\ \omega \psi_n &\rightarrow 0 \text{ trong } L^{q_1}(\mathbb{D}) \text{ khi } n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Từ (H1) và áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{D}} G(X, \psi_n(X)) dX \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} |\omega(X) \psi_n(X)|^{q_1-1} |\psi_n(X)| dX + C_0 \int_{\mathbb{D}} |\psi_n(X)| dX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\mathbb{D}} |\omega(X) \psi_n(X)|^{q_1} dX \right)^{\frac{q_1-1}{q_1}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\psi_n(X)|^{q_1} dX \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\quad + C_0 \int_{\mathbb{D}} |\psi_n(X)| dX.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Từ (3.17) và (3.18), ta có

$$\left| \int_{\mathbb{D}} G(X, \psi_n(X)) dX \right| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty,$$

do đó

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{D}} G(X, \psi_n(X)) dX = 0.$$

Khi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4m)^{1/2} \|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^{-1} = 0$, tồn tại số nguyên N_m sao cho với mọi $n \geq N_m$, ta có

$$\Upsilon(k_n v_n) \geq \Upsilon(\psi_n) = 2m - \int_{\mathbb{D}} G(X, \psi_n(X)) dX \geq m.$$

nghĩa là, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Upsilon(k_n v_n) = +\infty$. Nên $\Upsilon(0) = 0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Upsilon(v_n) = c$, suy ra với $k_n \in (0, 1)$ và n đủ lớn ta có

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} |\nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}(k_n v_n)|^2 dX - \int_{\mathbb{D}} g(X, k_n v_n(X)) k_n v_n(X) dX \\
&= \langle \Upsilon'(k_n v_n), k_n v_n \rangle = k_n \frac{d}{dt} \Big|_{t=k_n} \Upsilon(tv_n) = 0.
\end{aligned}$$

Khi đó, từ Bổ đề 3.3 suy ra

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{2} g(X, v_n(X)) v_n(X) - G(X, v_n(X)) \right) dX \\
&\geq \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{2} g(X, k_n v_n(X)) k_n v_n(X) \right. \\
&\quad \left. - G(X, k_n v_n(X)) \right) dX - C_3 \|h\|_{L^1(\mathbb{D})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{2} |\nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} k_n v_n|^2 - G(X, k_n v_n(X)) \right) dX - C_3 \|h\|_{L^1(\mathbb{D})} \\
&= \Upsilon(k_n v_n) - C_3 \|h\|_{L^1(\mathbb{D})} \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

mâu thuẫn với (3.13).

Trường hợp 2: Nếu $\psi \neq 0$, khi đó độ đo Lebesgue của tập $\Theta := \{(X) \in \mathbb{D} : \psi(X) \neq 0\}$ là dương và $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n(X)| = +\infty$ với mọi $(X) \in \Theta$. Từ điều kiện (H5) suy ra

$$\frac{g(X, v_n(X))}{v_n(X)} \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty. \quad (3.19)$$

Từ (3.15) và Định lý 4.9 trong [11], tồn tại hàm số $\psi_0 \in L^p(\mathbb{D})$ sao cho với mọi n và với mọi $X \in \mathbb{D}$ ta có $|\psi_n| \leq \psi_0$. Từ điều kiện (H3), với mọi $X \in \mathbb{D}, \tau \in (0, 1)$ ta có

$$\frac{g(X, \tau v_n(X))}{\tau v_n(X)} \cdot \frac{\tau |v_n(X)|^2}{\|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^2} \geq \tau k(X) \psi_0^2(X).$$

do đó, khi $k\psi_0^2 \in L^1(\mathbb{D})$ (khi $k \in L^{q_2}(\mathbb{D})$ với một số $q_2 > \frac{\tilde{N}}{2}$). Từ (3.19), (A3) suy ra $\Upsilon(v_n) \rightarrow c$. Hơn nữa do $\psi \equiv 0$ trên $\mathbb{D} \setminus \Theta$, áp dụng Bổ đề Fatou tổng quát hoá, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{\Upsilon(v_n)}{\|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^2} \right] = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{D}} \frac{G(X, v_n(X))}{\|v_n\|_{\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})}^2} dX \\
&= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{D}} \int_0^1 \frac{g(X, \tau v_n(X))}{\tau v_n(X)} \cdot \tau |\psi_n(X)|^2 d\tau dX \\
&= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Theta} \int_0^1 \frac{g(X, \tau v_n(X))}{\tau v_n(X)} \cdot \tau |\psi_n(X)|^2 d\tau dX \\
&\geq \int_{\Theta} \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(X, \tau v_n(X))}{\tau v_n(X)} \cdot \tau |\psi_n(X)|^2 d\tau dX = +\infty,
\end{aligned}$$

điều này là mâu thuẫn. Do đó, dãy $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ là bị chặn trong không gian

$\mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D})$. Do đó (bằng cách chuyển qua một dãy con nếu cần thiết) giả sử

$$\begin{aligned}
v_n &\rightharpoonup v \text{ yếu trong } \mathbb{S}_{1,0}^2(\mathbb{D}) \text{ khi } n \rightarrow +\infty, \\
v_n &\rightarrow v \text{ h.k.n trong } \mathbb{D} \text{ khi } n \rightarrow +\infty, \\
v_n &\rightarrow v \text{ trong } L^p(\mathbb{D}) \text{ khi } n \rightarrow +\infty, \text{ ở đây } p \in [1, \tilde{2}^*) \\
\omega v_n &\rightarrow \omega v \text{ trong } L^{q_1}(\mathbb{D}) \text{ khi } n \rightarrow +\infty,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Do đó từ (H1) ta có

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{D}} g(X, v_n(X))(v_n(X) - v(X)) dX \right| \\
&\leq C_0 \int_{\mathbb{D}} |v_n(X) - v(X)| dX \\
&+ \int_{\mathbb{D}} |v_n(X) - v(X)| |\omega(X) v_n(X)|^{q-1} dX \\
&\leq C_0 \|v_n - v\|_{L^1(\mathbb{D})} + \left(\int_{\mathbb{D}} |v_n(X) - v(X)|^{q_1} dX \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\times \left(\int_{\mathbb{D}} |\omega(X) v_n(X)|^{q_1} dX \right)^{\frac{q_1-1}{q_1}}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Từ (3.20) ta có

$$\int_{\mathbb{D}} f(X, v_n(X))(v_n(X) - v(X)) dX \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \left(g(X, v_n(X)) - g(X, v(X)) \right) \\
&\times (v_n(X) - v(X)) dX \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Từ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Upsilon'(v_n) = 0$ và (3.20) ta có

$$\langle \Upsilon'(v_n) - \Upsilon'(v), v_n - v \rangle \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty. \tag{3.23}$$

Từ (3.22) và (3.23), ta có

$$\int_{\mathbb{D}} \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v_n - \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 dX \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Do đó, ta kết luận rằng $v_n \rightarrow v$ mạnh trong $S_{\gamma, 0}^2(\mathbb{D})$. Do vậy Bề đề 3.4 được chứng minh. $\square$

Sử dụng các bổ đề trên ta chứng minh Định lý 3.2.

Chứng minh. Từ các Bổ đề 3.1, Bổ đề 3.2 và Bổ đề 3.4, ta có tất cả các điều kiện trong Định lý 1.5 được thỏa mãn. Do vậy bài toán (3.1)-(3.2) có một nghiệm yếu không tầm thường. $\square$

3.3. Ví dụ

Trong mục này, chúng tôi đưa ra ví dụ về lớp hàm phi tuyến thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.2. Ta xét toán tử sau:

$$\Delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + |x_1| |x_2| \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

trong miền $\mathbb{D} = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$. Khi đó ta có $N = 3, N_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 5, \tilde{2}^* = \frac{10}{3}, q = 3, \alpha = \frac{3}{4}, q_1 = 3$.

Xét các hàm

$$\omega_0(X) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{100}} \cos \left(2025 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right),$$

$$\eta(X) = (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\theta(X) = (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{-1},$$

$$\rho(X) = \left(\frac{1}{2} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \right)^2 (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{-1},$$

$$a(X) = \rho(X)^{s-1} = \left(\frac{1}{2} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \right)^4 (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{-2}.$$

Do $\frac{2pN_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}}{2N_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - p(N_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - 2)} = \frac{2.3.5}{5.2 - 3(5-2)} = 30 < 40$ nên $\omega_0 \in L^{40}(\mathbb{D})$. Do đó,

theo Hệ quả 1.1, ta có $\omega_0 \in \mathcal{K}_{2,3}$. Hơn nữa ta có $\eta \in \mathcal{C}_{2,2}, \theta \in \mathcal{K}_{2,3}$ suy

ra $\rho \in \mathcal{K}_{2,3}$. Mặt khác ta cũng có a không khả tích trong $\mathbb{D}$. Ta xét các hàm sau:

$$\begin{aligned}\omega_1(X) &= \rho(X), \forall X \in \mathbb{D}, \\ \varphi_0(\tau) &= \begin{cases} \tau^2(1 - |\tau|) & \text{nếu } |\tau| \leq 1, \\ 0 & \text{nếu } |\tau| \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \end{cases} \\ \varphi_1(\tau) &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } |\tau| \leq 1, \\ \tau(|\tau| - 1) \ln(1 + |\tau|) & \text{nếu } |\tau| \in (1, 2], \\ \tau \ln(1 + |\tau|) & \text{nếu } |\tau| > 2, \end{cases}\end{aligned}$$

$$g(X, \tau) = \omega_0^2(X)\varphi_0(\tau) + \omega_1^2(X)\varphi_1(\tau), \forall (X, \tau) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}.$$

Cho $\omega = |\omega_0| + \omega_1$, $C = 1$, $h(X) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{100}}$, $k(X) = -h(X)$ với mọi $X \in \mathbb{D}$. Ta có

$$h \in L^1(\mathbb{D}), k \in L^{\frac{1}{N^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}(\mathbb{D})}, \omega \in \mathcal{K}_{2,3}.$$

Do đó g thỏa mãn các điều kiện (H1)–(H5). Ta có

$$\begin{aligned}\frac{g(X, \tau)}{\tau} &= \omega_1^2(X)(|\tau| - 1) \ln(1 + |\tau|), \forall \tau \in [-2, 2] \setminus [-1, 1] \\ \frac{g(X, \tau)}{\tau} &= \omega_1^2(X) \ln(1 + |\tau|), \forall \tau \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2].\end{aligned}$$

Do đó g thỏa mãn (H6). Do vậy hàm g thỏa mãn các điều kiện trong Định lý 3.2. Hơn nữa ω^2 là không khả tích trên $\mathbb{D}$ và hàm g mà ta xây dựng không thỏa mãn điều kiện (AR).

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng:

$$\begin{aligned}-\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v &= g(X, v) \text{ trong } \mathbb{D}, \\ v &= 0 \quad \text{trên } \partial\mathbb{D}.\end{aligned}$$

Các kết quả đạt được của Chương 3 như sau: Thứ nhất, xây dựng được đồng nhất thức kiểu Pohozeav cho phương trình trên, từ đó chỉ ra trường

hợp hàm phi tuyến để phương trình không có nghiệm không tầm thường. Thứ hai, chứng minh được sự tồn tại nghiệm không tầm thường với một lớp hàm phi tuyến tổng quát (Định lý 3.2). Toán tử trong chương 3 là toán tử elliptic suy biến lần đầu tiên nhóm tác giả đưa vào nghiên cứu. Hơn nữa, lớp hàm phi tuyến mà nhóm tác giả xây dựng không nằm trong lớp các hàm phi tuyến đa được nghiên cứu đối với phương trình elliptic suy biến trong [3, 37, 48].

Chương 4

Sự tồn tại và tính chất nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu và một số tính chất nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến dạng:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v = \mathcal{H}(X, v, w), & X \in \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w = \mathcal{K}(X, v, w), & X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) \rightarrow 0 & \text{khi } |X| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

trong đó $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot), \mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$ là các hàm cho trước. Vận dụng phương pháp biến phân ta đã chứng minh được một lớp hàm phi tuyến tương ứng mà bài toán có nghiệm yếu không tầm thường và đánh giá nghiệm trong không gian Sobolev có trọng tương ứng.

Nội dung của chương gồm hai phần

- Phần thứ nhất: Trình bày kết quả sự tồn tại nghiệm và tính đa nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến có tăng trưởng tới hạn.

- Phần thứ hai: Trình bày kết quả sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến có tăng trưởng dưới tới hạn.

Nội dung của chương này được viết dựa vào công trình [3,4] trong Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. Sự tồn tại nghiệm và tính đa nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến có tăng trưởng tối hạn

Trong mục này ta nghiên cứu sự tồn tại và tính đa nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v &= h(X)|v|^{\tilde{2}^*-2}v + H_v(X, v, w), X \in \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w &= h(X)|w|^{\tilde{2}^*-2}w + H_w(X, v, w), X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) &\rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.1)$$

trong đó $\kappa(X)$, $h(X)$ và $H(X, v, w)$ thỏa mãn các điều kiện

(B0) $\kappa \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ và tồn tại hằng số $M > 0$ thỏa mãn

$$\kappa(0) = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} \kappa(X) = 0 : Vol(\{X \in \mathbb{R}^N, \kappa(X) \leq M\}) < \infty;$$

(G0) $h(X) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 < \inf_{X \in \mathbb{R}^N} h(X) \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^N} h(X) < \infty$;

(K1) $H \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ thỏa mãn $H_s(X, s, t) = o(|s| + |t|)$,
 $H_t(X, s, t) = o(|s| + |t|)$ đều với $X \in \mathbb{R}^N$ khi $|s| + |t| \rightarrow 0$;

(K2) Tồn tại các hằng số $\tilde{C}_0 > 0$ và $q \in (2, \tilde{2}^*)$ sao cho

$$\begin{aligned} |H_s(X, s, t)| &\leq \tilde{C}_0(1 + |s|^{q-1} + |t|^{q-1}), \\ |H_t(X, s, t)| &\leq \tilde{C}_0(1 + |s|^{q-1} + |t|^{q-1}); \end{aligned}$$

(K3) Tồn tại các hằng số $\tilde{C}_1 > 0$, $q_1, q_2 > 2$ và $\mu \in (2, \tilde{2}^*)$ sao cho với mọi $(X, s, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$, ta có

$$|H(X, s, t)| \geq \tilde{C}_1(|s|^{q_1} + |t|^{q_2}) \text{ và}$$

$$0 < \mu H(X, s, t) \leq H_s(X, s, t)s + H_t(X, s, t)t.$$

(K4) $H_s(X, -s, t) = -H_s(X, s, t)$, $H_s(X, s, -t) = -H_s(X, s, t)$ với mọi $(X, s, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$.

Đặt $\lambda = \varepsilon^{-2}$. Khi đó bài toán (4.1) trở thành

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \lambda \kappa(X) v &= \lambda h(X) |v|^{\tilde{2}^*-2} v + \lambda H_v(X, v, w), X \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \lambda \kappa(X) w &= \lambda h(X) |w|^{\tilde{2}^*-2} w + \lambda H_w(X, v, w), X \in \mathbb{R}^N, \quad (4.2) \\ v(X), w(X) &\rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do bài toán (4.1) và bài toán (4.2) là tương đương. Ta định nghĩa không gian hàm tương ứng với bài toán như sau:

Hàm (v, w) được gọi là nghiệm yếu của bài toán (4.2) nếu nó thỏa mãn $(v, w) \in \mathbb{H}$ và với mọi $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}$ ta có đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \cdot \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi + \lambda \kappa(X) v \varphi + \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w \cdot \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi + \lambda \kappa(X) w \psi \right) dX \\ = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (H_v(X, v, w) \varphi + H_w(X, v, w) \psi) dX \\ + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v|^{\tilde{2}^*-2} v \varphi + |w|^{\tilde{2}^*-2} w \psi \right) dX. \end{aligned}$$

Khi đó ta có các khẳng định sau:

Định lý 4.1. *Giả sử κ, h thỏa mãn các điều kiện (B0), (G0) và (K1)–(K3). Khi đó với mỗi $\rho > 0$, tồn tại $\Lambda_\rho > 0$ sao cho $\lambda > \Lambda_\rho$ thì bài toán (4.2) có nghiệm yếu thỏa mãn $(v_\lambda, w_\lambda) \rightarrow (0, 0)$ trong $\mathbb{H}$ khi $\lambda \rightarrow \infty$ và*

$$\begin{aligned} \frac{\mu - 2}{2\mu} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v_\lambda \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w_\lambda \right|^2 + \lambda \kappa(X) (|v_\lambda|^2 + |w_\lambda|^2) \right) dX \\ \leq \rho \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}, \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v_\lambda|^{\tilde{2}^*} + |w_\lambda|^{\tilde{2}^*} \right) dX + \frac{\mu - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} H(X, v_\lambda, w_\lambda) dX \\ \leq \rho \lambda^{-\frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Định lý 4.2. *Giả sử κ, h thỏa mãn các điều kiện (B0), (G0) và (K1)–(K4). Khi đó với mỗi $m \in \mathbb{N}$ và $\rho > 0$, tồn tại $\Lambda_{m\rho} > 0$ sao cho $\lambda > \Lambda_{m\rho}$ thì bài toán (4.2) có m nghiệm (v_λ, w_λ) thỏa mãn đánh giá (4.3), (4.4) trong Định lý 4.1 và $(v_\lambda, w_\lambda) \rightarrow (0, 0)$ trong $\mathbb{H}$ khi $\lambda \rightarrow \infty$.*

Để chứng minh các Định lý 4.1 và Định lý 4.2. Trước tiên, ta định nghĩa phiếm hàm Euler–Lagrange sinh ra bởi bài toán (4.2) như sau:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(v, w) = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 + \lambda \kappa(X) v^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w \right|^2 + \lambda \kappa(X) w^2 \right) dX \\ & - \frac{\lambda}{\tilde{2}^*} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v|^{\tilde{2}^*} + |w|^{\tilde{2}^*} \right) dX - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(X, v, w) dX. \end{aligned}$$

Do κ, h thỏa mãn các điều kiện (B0) và (K2), khi đó $\mathcal{J} \in C^1(\mathbb{H}, \mathbb{R})$. Hơn nữa, điểm tới hạn của $\mathcal{J}$ là nghiệm yếu của của bài toán (4.2). Ta chứng minh phiếm hàm $\mathcal{J}$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1.4.

Bổ đề 4.1. *Giả sử các điều kiện (B0), (G0), (K1)–(K3) được thỏa mãn và dãy $\{(v_n, w_n)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ thỏa mãn*

$$\mathcal{J}(v_n, w_n) \rightarrow c \text{ và } \mathcal{J}'(v_n, w_n) \rightarrow 0 \text{ trong } \mathbb{H}.$$

Khi đó ta có $c \geq 0$, dãy $\{(v_n, w_n)\}_{n=1}^\infty$ là bị chặn trong không gian $\mathbb{H}$ và tồn tại một dãy con $\{(v_{n_k}, w_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ thỏa mãn với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $r_\epsilon > 0$ sao cho

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k \setminus B_r} (|v_{n_k}|^q + |w_{n_k}|^q) dX \leq \epsilon,$$

ở đó $2 \leq q < \tilde{2}^*$, $B_r := \{X \in \mathbb{R}^N : |X| \leq r\}$.

Chứng minh. Từ (G0) và (A3), ta có

$$\begin{aligned}
c + o(1) \|(v_n, w_n)\|_{\mathbb{H}} &= \mathcal{J}(v_n, w_n) - \frac{1}{\mu} \mathcal{J}'(v_n, w_n)(v_n, w_n) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|(v_n, w_n)\|_{\mathbb{H}}^2 + \lambda \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(X) (|v_n|^{\tilde{2}^*} + |w_n|^{\tilde{2}^*}) dX \\
&\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{\mu} (H_v(X, v_n, w_n)v_n + H_w(X, v_n, w_n)w_n) - H(X, v_n, w_n) \right] dX \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|(v_n, w_n)\|_{\mathbb{H}}^2.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Suy ra $c \geq 0$, hơn nữa tồn tại hằng số dương C thỏa mãn

$$\|(v_n, w_n)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq C.$$

Do đó, dãy $\{(v_n, w_n)\}_{n=1}^{\infty}$ là bị chặn trong không gian $\mathbb{H}$. Nên tồn tại $(v, w) \in \mathbb{H}$ sao cho (có thể thông qua một dãy con)

$$(v_n, w_n) \rightharpoonup (v, w) \text{ trong } \mathbb{H} \text{ khi } n \rightarrow \infty;$$

$$v_n \rightarrow v, w_n \rightarrow w \text{ h.k.n trong } \mathbb{R}^N \text{ khi } n \rightarrow \infty;$$

$$(v_n, w_n) \rightarrow (v, w) \text{ trong } L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N) \times L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N) \text{ khi } n \rightarrow \infty, 2 \leq q < \tilde{2}^*$$

Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\int_{B_k} (|v_n|^q + |w_n|^q) dX \rightarrow \int_{B_k} (|v|^q + |w|^q) dX \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Do đó, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0 + 1$ ta có

$$\int_{B_j} (|v_n|^q + |w_n|^q - |v|^q - |w|^q) dX < \frac{1}{k}.$$

Không mất tính tổng quát ta chọn $n_k = n_0 + k$ thỏa mãn

$$\int_{B_k} (|v_{n_k}|^q + |w_{n_k}|^q - |v|^q - |w|^q) dX < \frac{1}{k}.$$

Nên tồn tại r_ϵ sao cho với mọi $r \geq r_\epsilon$ ta có

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} (|v|^q + |w|^q) dX < \epsilon.$$

Do vậy,

$$\begin{aligned} & \int_{B_k \setminus B_r} (|v_{n_k}|^q + |w_{n_k}|^q) dX \\ & < \frac{1}{k} + \int_{B_r} (|v|^q - |v_{n_k}|^q + |w|^q - |w_{n_k}|^q) dX + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} (|v|^q + |w|^q) dX. \end{aligned}$$

Suy ra $(v_n, w_n) \rightarrow (v, w)$ trong $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \times L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Do vậy, bổ đề được chứng minh. $\square$

Giả sử $\chi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ là hàm trơn thỏa mãn

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{khi } t \leq 1 \\ 0, & \text{khi } t \geq 2. \end{cases}$$

Ta định nghĩa

$$\tilde{v}_k(X) = \chi\left(\frac{2|X|}{k}\right) v(X) \text{ và } \tilde{w}_k(X) = \chi\left(\frac{2|X|}{k}\right) w(X).$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v}_k\|_{S^2_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda\kappa(X)}(\mathbb{R}^N)} &\rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty, \\ \|w - \tilde{w}_k\|_{S^2_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda\kappa(X)}(\mathbb{R}^N)} &\rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Bổ đề 4.2. *Giả sử $\{(v_{n_k}, w_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ thỏa mãn các điều kiện trong Bổ đề 4.1. Khi đó ta có*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} & \left[H_v(X, v_{n_k}, w_{n_k}) - H_v(X, v_{n_k} - \tilde{v}_k, w_{n_k} - \tilde{w}_k) \right. \\ & \left. - H_v(X, \tilde{v}_k, \tilde{w}_k) \right] \varphi dX = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} & \left[H_w(X, v_{n_k}, w_{n_k}) - H_w(X, v_{n_k} - \tilde{v}_k, w_{n_k} - \tilde{w}_k) \right. \\ & \left. - H_w(X, \tilde{v}_k, \tilde{w}_k) \right] \psi dX = 0, \end{aligned}$$

đều với $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}$ và $\|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}} \leq 1$.

Chứng minh. Từ (4.6) và Định lý 1.3, với mỗi $r > 0$, ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_r} \left[H_v(X, v_{n_k}, w_{n_k}) - H_v(X, v_{n_k} - \tilde{v}_k, w_{n_k} - \tilde{w}_k) - H_v(X, \tilde{v}_k, \tilde{w}_k) \right] \varphi dX = 0, \quad (4.7)$$

đều với $\|\varphi\|_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4, \lambda \kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N)} \leq 1$. Với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $r_\epsilon > 0$ thỏa mãn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k \setminus B_r} |\tilde{v}_k|^q dX \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} |v|^q dX \leq \epsilon, \forall r \geq r_\epsilon.$$

Bởi các điều kiện (K1) và (K2), nên ta có

$$|H_v(X, v, w)| \leq C_0 \left(|v| + |w| + |v|^{q-1} + |w|^{q-1} \right). \quad (4.8)$$

Từ (4.7) và (4.8), ta có

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[H_v(X, v_{n_k}, w_{n_k}) - H_v(X, v_{n_k} - \tilde{v}_k, w_{n_k} - \tilde{w}_k) - H_v(X, \tilde{v}_k, \tilde{w}_k) \right] \varphi dX \\ & \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k \setminus B_r} \left[H_v(X, v_{n_k}, w_{n_k}) - H_v(X, v_{n_k} - \tilde{v}_k, w_{n_k} - \tilde{w}_k) - H_v(X, \tilde{v}_k, \tilde{w}_k) \right] \varphi dX \\ & \leq C_1 \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k \setminus B_r} (|v_{n_k}| + |\tilde{v}_k| + |w_{n_k}| + |\tilde{w}_k|) \varphi dX \\ & \quad + C_2 \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k \setminus B_r} \left(|v_{n_k}|^{q-1} + |\tilde{v}_k|^{q-1} + |w_{n_k}|^{q-1} + |\tilde{w}_k|^{q-1} \right) \varphi dX \\ & \leq C_1 \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\|v_{n_k}\|_{L^2(B_k \setminus B_r)} + \|\tilde{v}_k\|_{L^2(B_k \setminus B_r)} + \|w_{n_k}\|_{L^2(B_k \setminus B_r)} \right. \\ & \quad \left. + \|\tilde{w}_k\|_{L^2(B_k \setminus B_r)} \right) \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C_2 \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\|v_{n_k}\|_{L^2(B_k \setminus B_r)}^{q-1} \|v_{n_k}\|_{L^2(B_k \setminus B_r)}^{q-1} \right. \\ & \quad \left. + \|\tilde{v}_k\|_{L^2(B_k \setminus B_r)}^{q-1} + \|\tilde{w}_k\|_{L^2(B_k \setminus B_r)}^{q-1} \right) \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ & \leq C_3 \epsilon^{\frac{1}{2}} + C_4 \epsilon^{\frac{q-1}{q}}, \end{aligned}$$

trong đó C_1, C_2, C_3 và C_4 là các hằng số dương. Chứng minh tương tự, ta có bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 4.3. Giả sử $\{(v_{n_k}, w_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy thỏa mãn trong Bổ đề 4.1. Khi đó

$$\mathcal{J}(v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) \rightarrow c - \mathcal{J}(v, w) \text{ khi } k \rightarrow \infty,$$

$$\mathcal{J}'(v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) \rightarrow 0 \text{ trong } \mathbb{H}^* \text{ khi } k \rightarrow \infty,$$

trong đó $\mathbb{H}^*$ là đối ngẫu của không gian $\mathbb{H}$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}(v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) \\ &= \mathcal{J}(v_{n_k}, w_{n_k}) - \mathcal{J}(\tilde{v}_{n_k}, \tilde{w}_{n_k}) + \frac{\lambda}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \times \\ & \quad \left(|v_{n_k}|^{2^*} - |v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}|^{2^*} - |\tilde{v}_{n_k}|^{2^*} + |w_{n_k}|^{2^*} - |w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}|^{2^*} - |\tilde{w}_{n_k}|^{2^*} \right) dX \\ & \quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (H(X, v_{n_k}, w_{n_k}) - H(X, v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) - H(X, \tilde{v}_{n_k}, \tilde{w}_{n_k})) dX. \end{aligned}$$

Từ $(v_{n_k}, w_{n_k}) \rightharpoonup (v, w)$ và $(\tilde{v}_{n_k}, \tilde{w}_{n_k}) \rightarrow (v, w)$ trong $\mathbb{H}$ khi $k \rightarrow \infty$, ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v_{n_k}|^{2^*} - |v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}|^{2^*} - |\tilde{v}_{n_k}|^{2^*} + |w_{n_k}|^{2^*} \right. \\ & \quad \left. - |w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}|^{2^*} - |\tilde{w}_{n_k}|^{2^*} \right) dX = 0, \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(H(X, v_{n_k}, w_{n_k}) - H(X, v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) \right. \\ & \quad \left. - H(X, \tilde{v}_{n_k}, \tilde{w}_{n_k}) \right) dX = 0. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\mathcal{J}(v_{n_k}, w_{n_k}) \rightarrow c \text{ và } \mathcal{J}(\tilde{v}_{n_k}, \tilde{w}_{n_k}) \rightarrow \mathcal{J}(v, w) \text{ khi } k \rightarrow \infty,$$

suy ra

$$\mathcal{J}(v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) \rightarrow c - \mathcal{J}(v, w) \text{ khi } k \rightarrow \infty.$$

Với mỗi $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}$ thỏa mãn $\|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}} \leq 1$, ta có

$$\mathcal{J}'(v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k})(\varphi, \psi)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{J}'(v_{n_k}, w_{n_k})(\varphi, \psi) - \mathcal{J}'(\tilde{v}_k, \tilde{w}_{n_k})(\varphi, \psi) \\
&+ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left[\left(|v_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} v_{n_k} - |v_{n_k} - \tilde{v}_k|^{\tilde{2}^*-2} (v_{n_k} - \tilde{v}_k) - |\tilde{v}_k|^{\tilde{2}^*-2} \tilde{v}_k \right) \varphi \right. \\
&+ \left. \left(|w_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} w_{n_k} - |w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} (w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) - |\tilde{w}_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} \tilde{w}_{n_k} \right) \psi \right] dX \\
&+ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(H_v(X, v_{n_k}, w_{n_k}) - H_v(X, v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) \right. \right. \\
&- \left. \left. H_v(X, \tilde{v}_{n_k}, \tilde{w}_{n_k}) \right) \varphi + \left(H_w(X, v_{n_k}, w_{n_k}) - H_w(X, v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) \right. \right. \\
&- \left. \left. H_w(X, \tilde{v}_{n_k}, \tilde{w}_{n_k}) \right) \psi \right] dX.
\end{aligned}$$

Từ $(v_{n_k}, w_{n_k}) \rightharpoonup (v, w)$ và $(\tilde{v}_{n_k}, \tilde{w}_{n_k}) \rightarrow (v, w)$ trong $\mathbb{H}$ khi $k \rightarrow \infty$, suy ra

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} v_{n_k} - |v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} (v_{n_k} - \tilde{v}_{n_k}) \right. \\
&\quad \left. - |\tilde{v}_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} \tilde{v}_{n_k} \right) \varphi dX = 0, \\
&\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|w_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} w_{n_k} - |w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} (w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) \right. \\
&\quad \left. - |\tilde{w}_{n_k}|^{\tilde{2}^*-2} \tilde{w}_{n_k} \right) \psi dX = 0
\end{aligned}$$

đều với $\|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}} \leq 1$. Do Bổ đề 4.2, ta có

$$\mathcal{J}'(v_{n_k} - \tilde{v}_k, w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}) \rightarrow 0.$$

□

Đặt

$$\psi_k := v_{n_k} - \tilde{v}_k \text{ và } \varphi_k := w_{n_k} - \tilde{w}_{n_k}.$$

Khi đó

$$v_{n_k} - v = \psi_k + (\tilde{v}_{n_k} - v) \text{ và } w_{n_k} - v = \varphi_k + (\tilde{w}_{n_k} - w).$$

Ta có $(v_{n_k}, w_{n_k}) \rightarrow (v, w)$ khi và chỉ khi $(\psi_k, \varphi_k) \rightarrow (0, 0)$. Do vậy

$$\mathcal{J}(\psi_k, \varphi_k) - \frac{1}{2} \mathcal{J}'(\psi_k, \varphi_k)(\psi_k, \varphi_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|\psi_k|^{\tilde{2}^*} + |\varphi_k|^{\tilde{2}^*} \right) dX \\
&\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2} (H_v(X, \psi_k, \varphi_k) \psi_k + H_v(X, \psi_k, \varphi_k) \varphi_k) - H(X, \psi_k, \varphi_k) \psi_k \right] dX \\
&\geq \frac{\lambda}{N} B_0 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\psi_k|^{\tilde{2}^*} + |\varphi_k|^{\tilde{2}^*} \right) dX,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

trong đó $B_0 = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} \kappa(X) > 0$. Từ Bổ đề 4.3 và (4.9), suy ra

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\psi_k|^{\tilde{2}^*} + |\varphi_k|^{\tilde{2}^*} \right) dX \leq \frac{\tilde{N}(c - \mathcal{J}(v, w))}{\lambda B_0} + o(1). \tag{4.10}$$

Ta định nghĩa $\kappa_M(X) := \max\{\kappa(X), M\}$, ở đây M là hằng số xác định trong điều kiện (B0). Do vậy

$$Vol(\{X \in \mathbb{R}^N, \kappa(X) \leq M\}) < \infty$$

và $(\psi_k, \varphi_k) \rightarrow (0, 0)$ trong $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \times L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Nên ta có

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} h(X) (|\psi_k|^2 + |\varphi_k|^2) dX \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \kappa_M(X) (|\psi_k|^2 + |\varphi_k|^2) dX + o(1).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Sử dụng các điều kiện (B0), (K1), (K2) và bất đẳng thức Young, tồn tại hằng số $C_M > 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|\psi_k|^{\tilde{2}^*} + |\varphi_k|^{\tilde{2}^*} \right) dX \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (H_u(X, \psi_k, \varphi_k) \psi_k + H_v(X, \psi_k, \varphi_k) \varphi_k) dX \\
&\leq M \left(\|\psi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) + C_M \left(\|\psi_k\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} + \|\varphi_k\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} \right).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Giả sử $C_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^p(\mathbb{R}^N)}$ là hằng số tốt nhất trong bất đẳng thức Sobolev, tức là với mọi $v \in S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)$ ta có

$$C_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \|v\|_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)}^2. \tag{4.13}$$

Bổ đề 4.4. *Giả sử các điều kiện (B0), (G0) và (K1)–(K3) là thỏa mãn. Khi đó, tồn tại hằng số $C_0 > 0$ không phụ thuộc vào λ sao cho với mỗi dãy $\{(v_n, w_n)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ mà*

$$\mathcal{J}(v_n, w_n) \rightarrow c \text{ và } \mathcal{J}'(v_n, w_n) \rightarrow 0 \text{ trong } \mathbb{H},$$

cùng với $(v_n, w_n) \rightharpoonup (v, w)$, thì một trong các điều sau sẽ xảy ra

$$(v_n, w_n) \rightarrow (v, w) \text{ trong } \mathbb{H} \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

$$\text{hoặc } c - \mathcal{J}(v, w) \geq C_0 \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh khẳng định của bổ đề bằng phản chứng. Giả sử

$$(v_n, w_n) \not\rightarrow (v, w) \text{ trong } \mathbb{H} \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Khi đó

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|(\psi_n, \varphi_n)\|_{\mathbb{H}} > 0 \quad \text{và} \quad c - \mathcal{J}(v, w) > 0.$$

Từ (4.15), (4.12) và (4.14), Ta có

$$\begin{aligned} & C_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)} \left(\|\psi_n\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\varphi_n\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^2 \right) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_n \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_n \right|^2 \right) dX \\ & = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_n \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_n \right|^2 + \lambda \kappa(X) |\psi_n|^2 \right. \\ & \quad \left. + \lambda \kappa(X) |\varphi_n|^2 \right) dX - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda \kappa(X) (|\psi_n|^2 + |\varphi_n|^2) dX \\ & = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \left[h(X) \left(|\psi_n|^{\tilde{2}^*} + |\varphi_n|^{\tilde{2}^*} \right) + H_v(X, \psi_n, \varphi_n) \psi_n \right. \\ & \quad \left. + H_w(X, \psi_n, \varphi_n) \varphi_n \right] dX - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} V_M(X) (|\psi_n|^2 + |\varphi_n|^2) dX + o(1) \\ & \leq \lambda C_M \left(\|\psi_n\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} + \|\varphi_n\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} \right) + o(1). \end{aligned}$$

Từ (4.23), suy ra

$$\begin{aligned}
C_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)} &\leq \lambda C_M \left(\|\psi_n\|_{\tilde{L}^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} + \|\varphi_n\|_{\tilde{L}^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} + o(1) \\
&\leq \lambda C_M \left(\frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} (c - \mathcal{J}(v, w))}{\lambda B_0} \right)^{\frac{2}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}} + o(1) \\
&= \lambda^{1 - \frac{2}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}} C_M \left(\frac{\tilde{N}}{B_0} \right)^{\frac{2}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}} (c - \mathcal{J}(v, w))^{\frac{2}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}} + o(1).
\end{aligned}$$

Đặt $C_0 := C_{S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}} C_M^{-\frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}} \left(N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \right)^{-1} B_0$. Khi đó

$$C_0 \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}} \leq c - \mathcal{J}(v, w) + o(1).$$

Do đó Bổ đề được chứng minh. $\square$

Từ Bổ đề trên ta có

Bổ đề 4.5. *Giả sử (B0), (G0) và (K1)–(K3) là thỏa mãn. Khi đó $\mathcal{J}(u, v)$ thỏa mãn điều kiện $(PS)_c$ với mọi $c < C_0 \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}$.*

Bổ đề 4.6. *Giả sử các điều kiện (B0), (G0) và (K1)–(K3) được thỏa mãn. Khi đó phiếm hàm $\mathcal{J}$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1.4, tức là*

(i) tồn tại $\rho > 0$ và $\theta > 0$ thỏa mãn $\mathcal{J}(v, w) \geq \theta$ với $\|(v, w)\|_{\mathbb{H}} = \rho$;

(ii) với mỗi không gian hữu hạn chiều $\mathbb{E} \subset \mathbb{H}$ và $(v, w) \in \mathbb{E}$, ta có

$$\mathcal{J}(v, w) \rightarrow -\infty \quad \text{khi } \|(v, w)\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty;$$

(iii) với mỗi $\varrho > 0$, tồn tại hằng số $\Lambda_\varrho > 0$ thỏa mãn với mỗi $\lambda \geq \Lambda_\varrho$, tồn tại hằng số $\bar{e}_\lambda \in \mathbb{E}$ với $\|\bar{e}_\lambda\|_{\mathbb{H}} > \varrho$, $\mathcal{J}(\bar{e}_\lambda) \leq 0$ và

$$\max_{s \geq 0} \mathcal{J}(s \bar{e}_\lambda) \leq \varrho \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}.$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh điều kiện (i). Từ các điều kiện (K1), (K2) với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại $C_\epsilon > 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v|^{\tilde{2}^*} + |w|^{\tilde{2}^*} \right) dX + \int_{\mathbb{R}^N} H(X, v, w) dX \\ & \leq \epsilon \left(\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) + C_\epsilon \left(\|v\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} + \|w\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Do đó

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(v, w) & \geq \frac{1}{2} \|(v, w)\|_{\mathbb{H}}^2 - \lambda \epsilon \left(\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) \\ & \quad - \lambda C_\epsilon \left(\|v\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} + \|w\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} \right). \end{aligned}$$

Từ $\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C_1 \|(v, w)\|_{\mathbb{H}}^2$. Nếu $\epsilon \leq (4\lambda C_1)^{-1}$ khi đó

$$\mathcal{J}(v, w) \geq \frac{1}{4} \|(v, w)\|_{\mathbb{H}}^2 - \lambda C_\epsilon \left(\|v\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} + \|w\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} \right)$$

Do $\tilde{2}^* > 2$ nên ta có điều phải chứng minh.

(ii) Từ giả thiết (K2), (K3) với mọi $(v, w) \in \mathbb{H}$, ta có

$$\mathcal{J}(v, w) \leq \frac{1}{2} \|(v, w)\|_{\mathbb{W}}^2 - \lambda \widetilde{C}_0 \left(\|v\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^N)}^{q_1} + \|w\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^N)}^{q_2} \right).$$

Do mọi chuẩn trong không gian hữu hạn chiều là tương đương và $q_1, q_2 > 2$, nên điều khẳng định (ii) là đúng.

(iii) Từ Bổ đề 4.5, với λ là một số đủ lớn và c_λ là một số đủ nhỏ, khi đó $\mathcal{J}$ thỏa mãn điều kiện $(PS)_c$.

Do vậy ta sẽ đi xây dựng không gian con thỏa mãn các điều kiện của (iii). Ta định nghĩa các phiếm hàm sau:

$$\begin{aligned} I(v, w) & = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 + \lambda \kappa(X) |v|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w \right|^2 + \lambda \kappa(X) |w|^2 \right) dX \\ & \quad - \lambda \widetilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^N} (|v|^{q_1} + |w|^{q_2}) dX, \\ J(v, w) & = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w \right|^2 + A(\lambda^{-\frac{1}{2}} X) (|v|^2 + |w|^2) \right) dX \\ & \quad - \widetilde{C}_1 \int_{\mathbb{R}^N} (|v|^{q_1} + |w|^{q_2}) dX. \end{aligned}$$

Khi đó $I \in C^1(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ và $\mathcal{J}(v, w) \leq I(v, w)$ với mọi $(v, w) \in \mathbb{H}$. Hơn nữa, ta có

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi \right|^2 dX : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \|\varphi\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^N)} = 1 \right\} = 0.$$

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi \right|^2 dX : \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \|\psi\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^N)} = 1 \right\} = 0.$$

Với mỗi $\delta > 0$, tồn tại các hàm $\varphi_\delta, \psi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ sao cho $\|\varphi_\delta\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^N)} = \|\psi_\delta\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^N)} = 1$ thỏa mãn

$$\text{supp } \varphi_\delta, \text{supp } \psi_\delta \subset B_{r_\delta}(0) \text{ và } \left\| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_\delta \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \delta, \left\| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_\delta \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \delta.$$

Giả sử $e_\lambda(X) = (\varphi_\delta(\sqrt{\lambda}X), \psi_\delta(\sqrt{\lambda}X))$, khi đó $\text{supp } e_\lambda \subset B_{\lambda^{-\frac{1}{2}}r_\delta}(0)$ và

$$I(se_\lambda) = \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}} J(s\varphi_\delta, s\psi_\delta).$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} & \max_{s \geq 0} J(s\varphi_\delta, s\psi_\delta) \\ & \leq \frac{q_1 - 2}{2q_1(q_1\tilde{C}_1)^{\frac{2}{q_1-2}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_\delta \right|^2 + \kappa(\lambda^{-\frac{1}{2}}X) |\phi_\delta|^2 \right) dX \right\}^{\frac{q_1}{q_1-2}} \\ & + \frac{q_2 - 2}{2q_2(q_2\tilde{C}_1)^{\frac{2}{q_2-2}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_\delta \right|^2 + \kappa(\lambda^{-\frac{1}{2}}X) |\psi_\delta|^2 \right) dX \right\}^{\frac{q_2}{q_2-2}}. \end{aligned}$$

Từ $\kappa(0) = 0$ và $\text{supp } \varphi_\delta, \text{supp } \psi_\delta \subset B_{r_\delta}(0)$ tồn tại $\Lambda_\delta > 0$ sao cho với mọi $|X| \leq r_\delta, \lambda \geq \Lambda_\delta$, ta có

$$\kappa(\lambda^{-\frac{1}{2}}X) \leq \frac{\delta}{\|\varphi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2}, \kappa(\lambda^{-\frac{1}{2}}X) \leq \frac{\delta}{\|\psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2}.$$

Kết hợp với $\left\| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_\delta \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \delta, \left\| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_\delta \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \delta$, suy ra

$$\max_{s \geq 0} I(s\varphi_\delta, s\psi_\delta) \leq \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}} \left(\frac{q_1 - 2}{q_1(q_1\tilde{C}_1)^{\frac{2}{q_1-2}}} (2\delta)^{\frac{q_1}{q_1-2}} + \frac{q_2 - 2}{q_2(q_2\tilde{C}_1)^{\frac{2}{q_2-2}}} (2\delta)^{\frac{q_2}{q_2-2}} \right).$$

Do đó, với mọi $\lambda \geq \Lambda_\delta$, ta có

$$\begin{aligned} & \max_{s \geq 0} \mathcal{J}(se_\lambda) \\ & \leq \lambda^{1-\frac{\tilde{N}}{2}} \left(\frac{q_1 - 2}{q_1(q_1 \tilde{C}_1)^{\frac{2}{q_1-2}}} (2\delta)^{\frac{q_1}{q_1-2}} + \frac{q_2 - 2}{q_2(q_2 \tilde{C}_1)^{\frac{2}{q_2-2}}} (2\delta)^{\frac{q_2}{q_2-2}} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nên với mỗi $\varrho > 0$, ta có thể chọn $\delta > 0$ đủ nhỏ, thỏa mãn

$$\frac{q_1 - 2}{q_1(q_1 \tilde{C}_1)^{\frac{2}{q_1-2}}} (2\delta)^{\frac{q_1}{q_1-2}} + \frac{q_2 - 2}{q_2(q_2 \tilde{C}_1)^{\frac{2}{q_2-2}}} (2\delta)^{\frac{q_2}{q_2-2}} \leq \varrho$$

và $e_\lambda(X) = (\varphi_\delta(\sqrt{\lambda}X), \psi_\delta(\sqrt{\lambda}X))$. Ta cho $\Lambda_\delta = \Lambda_\sigma$, tồn tại $\bar{s}_\lambda > 0$ thỏa mãn $\|\bar{s}_\lambda e_\lambda\|_{\mathbb{H}} > \rho$ và $\mathcal{J}(se_\lambda) \leq 0$ với mọi $t \geq \bar{s}_\lambda$. Từ (4.15), $\bar{e}_\lambda = \bar{s}_\lambda e_\lambda$ ta có

$$\max_{s \geq 0} \mathcal{J}(s\bar{e}_\lambda) \leq \varrho \lambda^{1-\frac{N^{k_1, k_2}_{k_3, k_4}}{2}}.$$

□

Bây giờ ta chứng minh Định lý 4.1 như sau

Chứng minh. Từ Bổ đề 4.6, với mỗi $0 < \varrho < \theta$, tồn tại $\Lambda_\varrho > 0$ sao cho $\lambda \geq \Lambda_\varrho$, ta có

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \max_{s \in [0,1]} \mathcal{J}(\gamma(s)) \leq \varrho \lambda^{1-\frac{N^{k_1, k_2}_{k_3, k_4}}{2}},$$

trong đó $\Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0, 1], \mathbb{H}) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \bar{e}_\lambda\}$. Từ Bổ đề 4.5, ta có $\mathcal{J}$ thỏa mãn điều kiện $(PS)_c$, áp dụng Định lý 1.4, với $(v_\lambda, w_\lambda) \in \mathbb{H}$ ta có

$$\mathcal{J}(v_\lambda, w_\lambda) = c \quad \text{và} \quad \mathcal{J}'(v_\lambda, w_\lambda) = 0.$$

Do vậy, (v_λ, w_λ) là nghiệm yếu của bài toán (4.2).

Hơn nữa

$$\mathcal{J}(v_\lambda, w_\lambda) \leq \varrho \lambda^{1-\frac{N^{k_1, k_2}_{k_3, k_4}}{2}} \quad \text{và} \quad \mathcal{J}'(v_\lambda, w_\lambda) = 0,$$

và với mỗi $\kappa \in [2, \tilde{2}^*]$, ta có

$$\mathcal{J}(v_\lambda, w_\lambda) = \mathcal{J}(v_\lambda, w_\lambda) - \frac{1}{\kappa} \mathcal{J}'(v_\lambda, w_\lambda)(v_\lambda, w_\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa}\right) \|(v_\lambda, w_\lambda)\|_{\mathbb{W}}^2 + \lambda \left(\frac{\mu}{\kappa} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} H(X, v_\lambda, w_\lambda) dX \\
&+ \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{2^*}\right) \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v_\lambda|^{\tilde{2}^*} + |w_\lambda|^{\tilde{2}^*}\right) dX.
\end{aligned}$$

Cho $\kappa = \mu$ suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu - 2}{2\mu} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v_\lambda \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w_\lambda \right|^2 + \lambda \kappa(X) (|v_\lambda|^2 + |w_\lambda|^2) \right) dX \\
&\leq \varrho \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}.
\end{aligned}$$

Cho $\kappa = 2$, ta có

$$\frac{1}{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v_\lambda|^{\tilde{2}^*} + |w_\lambda|^{\tilde{2}^*}\right) dX + \frac{\mu - 2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} H(X, v_\lambda, w_\lambda) dX \leq \varrho \lambda^{-\frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}.$$

Nên Định lý 4.1 được chứng minh. $\square$

Tiếp theo ta chứng minh Định lý 4.2.

Đặt $\Sigma := \{S \subset \mathbb{H} : S \text{ đóng, } -S = S\}$. Với mỗi $S \in \Sigma$ ký hiệu $\text{gen}(S)$ là giống Krasnoselski và

$$i(S) = \min_{\psi \in \Psi} \text{gen}(\psi(S) \cap \partial B_\rho),$$

trong đó Ψ là tập tất cả các đồng phôi lẻ $\psi \in C(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ và ρ xác định trong 4.6. Khi đó i là giả Benci trong [7]. Từ (K4) suy ra $\mathcal{J}$ là chặn. Đặt

$$c_k := \inf_{i(S) \geq k} \sup_{(v, w) \in S} \mathcal{J}(v, w), \quad 1 \leq k \leq m.$$

Nếu c_k là hữu hạn và $\mathcal{J}$ thỏa mãn điều kiện $(PS)_{c_k}$, khi đó c_k là giá trị tối hạn của $\mathcal{J}$.

Bước 1. ta chứng minh $\mathcal{J}$ thỏa mãn điều kiện $(PS)_{c_k}$ với $c_k < \varrho \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}$.

Lý luận tương tự như Bổ đề 4.6, với mỗi $m \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$ và $k = 1, 2, \dots, m$, ta có thể chọn m hàm $\varphi_\epsilon^k, \psi_\epsilon^k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ thỏa mãn

$\text{supp } \varphi_\epsilon^k \cap \text{supp } \varphi_\epsilon^i = \emptyset$, $\text{supp } \psi_\epsilon^k \cap \text{supp } \psi_\epsilon^i = \emptyset$ nếu $i \neq k$, $\|\varphi_\epsilon^k\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^N)} = \|\psi_\epsilon^k\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^N)} = 1$ và $\left\| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_\epsilon^k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \epsilon$, $\left\| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_\epsilon^k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \epsilon$.

Giả sử $r_\epsilon^m > 0$ thỏa mãn $\text{supp } \varphi_\epsilon^k, \text{supp } \psi_\epsilon^k \subset B_{r_\epsilon^m}(0)$. Ta đặt

$$\bar{e}_\lambda^k(X) := (v_\lambda^k(X), w_\lambda^k(X)) = (\varphi_\epsilon^k(\sqrt{\lambda}X), \psi_\epsilon^k(\sqrt{\lambda}X))$$

và định nghĩa

$$F_\lambda^m := \text{span}\{\bar{e}_\lambda^k(X), k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Khi đó $i(F_\lambda^m) = \dim F_\lambda^m = m$. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_\lambda(X), \tilde{w}_\lambda(X)) &= \left(\sum_{k=1}^m s_k v_\lambda^k(X), \sum_{k=1}^m s_k w_\lambda^k(X) \right) \in F_\lambda^m, \\ \mathcal{J}(\tilde{v}_\lambda(X), \tilde{w}_\lambda(X)) &= \sum_{k=1}^m \mathcal{J}(s_k v_\lambda^k(X), s_k w_\lambda^k(X)). \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự như Bổ đề 4.6, tồn tại $\Lambda_{m\epsilon} > 0$ thỏa mãn với mọi $\lambda \geq \Lambda_{m\epsilon}$ và với mỗi $\varrho > 0$, ta có thể chọn $\epsilon > 0$ đủ nhỏ thỏa mãn

$$\mathcal{J}(\tilde{v}_\lambda(X), \tilde{w}_\lambda(X)) \leq \varrho \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}.$$

Suy ra

$$\sup_{(\tilde{v}_\lambda(X), \tilde{w}_\lambda(X)) \in F_\lambda^m} \mathcal{J}(\tilde{v}_\lambda(X), \tilde{w}_\lambda(X)) \leq \varrho \lambda^{1 - \frac{\tilde{N}}{2}}, \forall \lambda \geq \Lambda_{m\epsilon}.$$

Do đó, với mỗi $m \in \mathbb{N}$ và $\varrho \in (0, \tilde{C}_0)$, tồn tại $\Lambda_{m\varrho} = \Lambda_{m\epsilon}$ thỏa mãn $\lambda > \Lambda_{m\tau}$, ta có thể chọn không gian F_λ^m có số chiều là m thỏa mãn

$$c_{\lambda_1} \leq c_{\lambda_2} \leq \dots \leq \sup_{(\tilde{v}_\lambda(X), \tilde{w}_\lambda(X)) \in F_\lambda^m} \mathcal{J}(\tilde{v}_\lambda(X), \tilde{w}_\lambda(X)) \leq \tau \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}.$$

Từ Bổ đề 4.5, ta có $\mathcal{J}$ thỏa mãn điều kiện $(PS)_{c_{\lambda_j}}$ do vậy c_{λ_j} là giá trị tối hạn.

Bước 2. Sử dụng Định lý 1.4 ta sẽ đi chứng minh bài toán (4.2) có m cặp nghiệm. Thật vậy, từ Bổ đề 4.6, ta có $\mathcal{J}$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1.4. Trong bước 1, ta có $\mathcal{J}$ cũng thỏa mãn điều kiện $(PS)_{c_{\lambda_k}}$

trong đó $c_{\lambda_k} < \varrho \lambda^{1 - \frac{N^{k_1, k_2}}{2k_3, k_4}}$. Áp dụng định lý điểm tối hạn, ta có c_{λ_k} là điểm tối hạn của J và có m điểm tối hạn không tầm thường thỏa mãn

$$\theta \leq J(u, v) \leq \varrho \lambda^{1 - \frac{N^{k_1, k_2}}{2k_3, k_4}}.$$

Do đó, bài toán (4.2) có m cặp nghiệm. Chứng minh tương tự như Định lý 4.1, ta cũng có nghiệm thỏa mãn các điều kiện (4.3) và (4.4). Do vậy, định lý được chứng minh

4.2. Sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình elliptic suy biến với hàm phi tuyến tăng trưởng dưới tối hạn

Trong này, ta nghiên cứu hệ phương trình elliptic suy biến có dạng

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \kappa(X)v &= h(X)|v|^{p-2}v + \frac{a}{a+b} F(X)|v|^{a-2}v|w|^b, X \in \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \kappa(X)w &= k(X)|w|^{p-2}w + \frac{b}{a+b} F(X)|v|^a|w|^{b-2}w, X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) &\rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{4.16}$$

trong đó $2 < p < \tilde{2}^*$, $a > 1, b > 1$ thỏa mãn $a + b = \tilde{2}^*$ và ta giả sử $\kappa(X), F(X), h(X)$ và $k(X)$ thỏa mãn các điều kiện

(A1) $\kappa \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, sao cho $\kappa(0) = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} \kappa(X) = 0$ và với mỗi $M > 0$ ta có

$$Vol(\{X \in \mathbb{R}^N, \kappa(X) \leq M\}) < \infty;$$

(A2) $F(X) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 < \inf_{X \in \mathbb{R}^N} F(X) \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^N} F(X) < \infty$;

(A3) $h(X), k(X)$ là các hàm dương và thỏa mãn

$$0 < h_0 = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} h(X) \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^N} h(X) < \infty;$$

$$0 < k_0 = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} k(X) \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^N} k(X) < \infty.$$

Đặt $\lambda = \varepsilon^{-2}$. Khi đó bài toán (4.16) trở thành

$$\begin{aligned} -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v + \lambda \kappa(X) v &= \lambda h(X) |v|^{p-2} v + \frac{\lambda a}{a+b} F(X) |v|^{a-2} v |w|^b, X \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w + \lambda \kappa(X) w &= \lambda k(X) |w|^{p-2} w + \frac{\lambda b}{a+b} F(X) |v|^a |w|^{b-2} w, X \in \mathbb{R}^N, \\ v(X), w(X) &\rightarrow 0 \text{ khi } |X| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Do bài toán (4.16) và bài toán (4.17) là tương đương, nên ta chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán (4.17) như sau:

Định lý 4.3. *Giả sử $\kappa(X), F(X), h(X)$ và $k(X)$ thỏa mãn (A1)–(A3). Khi đó với mỗi $\rho > 0$, tồn tại $\Lambda_\rho > 0$ sao cho $\lambda > \Lambda_\rho$ thì bài toán (4.17) có nghiệm dương (v_λ, w_λ) thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{aligned} \frac{p-2}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v_\lambda \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w_\lambda \right|^2 + \lambda \kappa(X) (|v_\lambda|^2 + |w_\lambda|^2) \right) dX \\ \leq \rho \lambda^{1 - \frac{N_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}}{2}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Để chứng minh các Định lý 4.3, ta xây dựng phiếm hàm Euler–Lagrange sinh ra bởi bài toán (4.16) như sau:

$$\begin{aligned} \Upsilon(v, w) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 + \lambda \kappa(X) v^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w \right|^2 + \lambda \kappa(X) w^2 \right) dX \\ &\quad - \frac{\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (h(X) |v|^p + k(X) |w|^p) dX - \frac{\lambda}{a+b} \int_{\mathbb{R}^N} F(X) |v|^a |w|^b dX. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức Sobolev trong [54], ta có tồn tại hằng số $C_{a,b}$ là hệ số tốt nhất trong bất đẳng thức Sobolev định nghĩa như sau:

$$C_{a,b} := \inf_{v, w \in S_{k_1, k_2, k_3, k_4}^2(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w \right|^2 \right) dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^a |w|^b dX \right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Để chứng minh Định lý 4.3, ta kiểm tra các điều kiện trong Định lý 1.4. Đầu tiên, ta sẽ đi kiểm tra điều kiện Palais-Smale, chứng minh tương tự như Bổ đề 4.1, ta có.

Bổ đề 4.7. Giả sử các giả thiết (A1)–(A3) là thỏa mãn $\{(v_n, w_n)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ là một dãy $(PS)_c$ của phiếm hàm Υ . Khi đó $c \geq 0$, $\{(v_n, w_n)\}_{n=1}^\infty$ là bị chặn trong không gian $\mathbb{H}$ và tồn tại một dãy con $\{(v_{n_k}, w_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ sao cho với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $r_\epsilon > 0$ với $r \geq r_\epsilon$ ta có

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k \setminus B_r} (|v_{n_k}|^q + |w_{n_k}|^q) dX \leq \epsilon$$

ở đây $2 \leq q < 2^*$.

Giả sử $\chi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ là hàm trơn thỏa mãn $\chi(s) \equiv 1$ khi $s \leq 1$, $\chi(s) \equiv 0$ khi $s \geq 2$. Ta định nghĩa

$$\tilde{v}_k(X) = \chi\left(\frac{2|X|}{k}\right) v(X) \text{ và } \tilde{w}_k(X) = \chi\left(\frac{2|X|}{k}\right) w(X).$$

Khi đó, ta có

$$(\tilde{v}_k, \tilde{w}_k) \rightarrow (v, w) \text{ trong } \mathbb{H} \text{ khi } k \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

Bổ đề 4.8. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v_{n_k}|^{p-2} v_{n_k} - |v_{n_k} - \tilde{v}_k|^{p-2} (v_{n_k} - \tilde{v}_k) \right. \right. \\ \left. \left. - |\tilde{v}_k|^{p-2} \tilde{v}_k \right) \varphi dX \right| = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} k(X) \left(|w_{n_k}|^{p-2} w_{n_k} - |w_{n_k} - \tilde{w}_k|^{p-2} (w_{n_k} - \tilde{w}_k) \right. \right. \\ \left. \left. - |\tilde{w}_k|^{p-2} \tilde{w}_k \right) \psi dX \right| = 0 \end{aligned}$$

đều trong $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}$ với $\|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}} \leq 1$.

Chứng minh. Chứng minh tương tự như Bổ đề 4.2 □

Bổ đề 4.9. Ta có khẳng định sau

$$\begin{aligned} \Upsilon(v_k - \tilde{v}_k, w_k - \tilde{w}_k) &\rightarrow c - \Upsilon(v, w) \text{ khi } k \rightarrow \infty, \\ \Upsilon'(v_k - \tilde{v}_k, w_k - \tilde{w}_k) &\rightarrow 0 \text{ trong } \mathbb{H}^* \text{ khi } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Chứng minh. Từ $(v_k, w_k) \rightharpoonup (v, w)$ và $(\tilde{v}_k, \tilde{w}_k) \rightarrow (v, w)$ trong $\mathbb{H}$ khi $k \rightarrow \infty$, ta có

$$\begin{aligned} \Upsilon(v_k - \tilde{v}_k, w_k - \tilde{w}_k) &= \Upsilon(v_k, w_k) - \Upsilon(\tilde{v}_k, \tilde{w}_k) \\ &+ \frac{\lambda}{\tilde{2}^*} \int_{\mathbb{R}^N} F(X) (|v_k|^a |w_k|^b - |v_k - \tilde{v}_k|^a |w_k - \tilde{w}_k|^b - |\tilde{v}_k|^a |\tilde{w}_k|^b) dX \\ &+ \frac{\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) (|v_k|^p - |v_k - \tilde{v}_k|^p - |\tilde{v}_k|^p) dX \\ &+ \frac{\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^N} k(X) (|w_k|^p - |w_k - \tilde{w}_k|^p - |\tilde{w}_k|^p) dX + o(1). \end{aligned}$$

Từ (4.19) và áp dụng Bổ đề Brézis-Lieb (trong [9]), ta có

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(X) (|v_k|^a |w_k|^b - |v_k - \tilde{v}_k|^a |w_k - \tilde{w}_k|^b - |\tilde{v}_k|^a |\tilde{w}_k|^b) dX &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(X) (|v_k|^p - |v_k - \tilde{v}_k|^p - |\tilde{v}_k|^p) dX &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} k(X) (|w_k|^p - |w_k - \tilde{w}_k|^p - |\tilde{w}_k|^p) dX &= 0. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\Upsilon(v_k, w_k) \rightarrow c \text{ và } \Upsilon(\tilde{v}_k, \tilde{w}_k) \rightarrow \Upsilon(v, w) \text{ khi } k \rightarrow \infty,$$

suy ra

$$\Upsilon(v_k - \tilde{v}_k, w_k - \tilde{w}_k) \rightarrow c - \Upsilon(v, w) \text{ khi } k \rightarrow \infty.$$

Do vậy, với mỗi $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}$, ta có

$$\begin{aligned} &\Upsilon'(v_k - \tilde{v}_k, w_k - \tilde{w}_k)(\varphi, \psi) \\ &= \Upsilon'(v_k, w_k)(\varphi, \psi) - \Upsilon'(\tilde{v}_k, \tilde{w}_k)(\varphi, \psi) + \frac{\lambda a}{\tilde{2}^*} \int_{\mathbb{R}^N} F(X) \left(|v_k|^{a-2} v_k |w_k|^b \right. \\ &\quad \left. - |v_k - \tilde{v}_k|^{a-2} (v_k - \tilde{v}_k) |w_k - \tilde{w}_k|^b - |\tilde{v}_k|^{a-2} \tilde{v}_k |\tilde{w}_k|^b \right) \varphi dX \\ &\quad + \frac{\lambda b}{\tilde{2}^*} \int_{\mathbb{R}^N} F(X) \left(|v_k|^a |w_k|^{b-2} w_k - |v_k - \tilde{v}_k|^a |w_k - \tilde{w}_k|^{b-2} (w_k - \tilde{w}_k) \right. \\ &\quad \left. - |\tilde{v}_k|^a |\tilde{w}_k|^{b-2} \tilde{w}_k \right) \psi dX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -|\tilde{v}_k|^a |\tilde{w}_k|^{b-2} \tilde{w}_k \Big) \psi dX \\
& + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(X) \left(|v_k|^{p-2} v_k - |v_k - \tilde{v}_k|^{p-2} (v_k - \tilde{v}_k) - |\tilde{v}_k|^{p-2} \tilde{v}_k \right) \varphi dX \\
& + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} k(X) \left(|w_k|^{p-2} w_k - |w_k - \tilde{w}_k|^{p-2} (w_k - \tilde{w}_k) - |\tilde{w}_k|^{p-2} \tilde{w}_k \right) \psi dX.
\end{aligned}$$

Nên ta có

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(X) \left(|v_k|^{a-2} v_k |w_k|^b - |v_k - \tilde{v}_k|^{a-2} (v_k - \tilde{v}_k) |w_k - \tilde{w}_k|^b \right. \\
& \quad \left. - |\tilde{v}_k|^{a-2} \tilde{v}_k |\tilde{w}_k|^b \right) \varphi dX = 0, \\
& \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(X) \left(|v_k|^a |w_k|^{b-2} w_k - |v_k - \tilde{v}_k|^a |w_k - \tilde{w}_k|^{b-2} (w_k - \tilde{w}_k) \right. \\
& \quad \left. - |\tilde{v}_k|^a |\tilde{w}_k|^{b-2} \tilde{w}_k \right) \psi dX = 0
\end{aligned}$$

đều với $\|(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{H}} \leq 1$. Từ 4.8 và $\Upsilon'(v_k, w_k) \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Đặt

$$\psi_k := v_k - \tilde{v}_k \text{ và } \varphi_k := w_k - \tilde{w}_k.$$

Suy ra

$$v_k - v = \psi_k + (\tilde{v}_k - v) \text{ và } w_k - v = \varphi_k + (\tilde{w}_k - w).$$

Khi đó $(v_k, w_k) \rightarrow (v, w)$ trong $\mathbb{H}$ khi $k \rightarrow \infty$ khi và chỉ khi $(\psi_k, \varphi_k) \rightarrow (0, 0)$ trong $\mathbb{H}$ khi $k \rightarrow \infty$. Do vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\Upsilon(\psi_k, \varphi_k) - \frac{1}{2} \Upsilon'(\psi_k, \varphi_k)(\psi_k, \varphi_k) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+b} \right) \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(X) |\psi_k|^a |\varphi_k|^b dX \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (h(X) |\psi_k|^p + k(X) |\varphi_k|^p) dX \\
&\geq \frac{\lambda}{\widetilde{N}} F_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_k|^a |\varphi_k|^b dX,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

trong đó $F_0 = \inf_{X \in \mathbb{R}^N} F(X) > 0$. Từ Bổ đề 4.9 và (4.20), suy ra

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_k|^a |\varphi_k|^b dX \leq \frac{\tilde{N}(c - \Upsilon(v, w))}{\lambda F_0} + o(1). \quad (4.21)$$

Từ các điều kiện (A2) và (A3), với mỗi $M > 0$, tồn tại hằng số $C_M > 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} (F(X) |\psi_k|^a |\varphi_k|^b + h(X) |\psi_k|^p + k(X) |\varphi_k|^p) dX \\ & \leq M \left(\|\psi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\varphi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) + C_M \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_k|^a |\varphi_k|^b dX. \end{aligned}$$

Giả sử $\kappa_M(X) := \max\{\kappa(X), M\}$, trong đó M là hằng số dương xác định trong điều kiện (A1). Do

$$\text{Vol}(\{X \in \mathbb{R}^N, \kappa(X) \leq M\}) < \infty$$

và $(\psi_k, \varphi_k) \rightarrow (0, 0)$ trong $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N) \times L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$, Ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \kappa(X) (|\psi_k|^2 + |\varphi_k|^2) dX \\ & = \int_{\mathbb{R}^N} V_M(X) (|\psi_k|^2 + |\varphi_k|^2) dX + o(1). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Bổ đề 4.10. *Giả sử các giả thiết (A1)–(A3) là thỏa mãn $\{(v_k, w_k)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ là một dãy $(PS)_c$ của phiếm hàm Υ . Khi đó, tồn tại hằng số $C_0 > 0$ không phụ thuộc vào λ thỏa mãn với mỗi dãy $\{(v_k, w_k)\}_{k=1}^\infty$ thỏa mãn điều kiện $(PS)_c$ của Υ với $(v_k, w_k) \rightharpoonup (v, w)$ trong không gian $\mathbb{H}$ thì một trong các khẳng định sau sẽ xảy ra*

$$(v_k, w_k) \rightarrow (v, w) \text{ trong } \mathbb{H} \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

$$\text{hoặc } c - \Upsilon(v, w) \geq C_0 \lambda^{1 - \frac{\tilde{N}}{2}}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề bằng phản chứng, giả sử

$$(v_k, w_k) \not\rightarrow (v, w) \text{ trong } \mathbb{H} \text{ khi } k \rightarrow \infty,$$

Suy ra

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|(\psi_k, \varphi_k)\|_{\mathbb{H}} > 0 \quad \text{và} \quad c - \Upsilon(v, w) > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Sobolev và (4.22), ta có

$$\begin{aligned} & C_{a,b} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_k|^a |\varphi_k|^b dX \right)^{\frac{2}{a+b}} \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_k \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_k \right|^2 \right) dX \\ & = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_k \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_k \right|^2 + \lambda \kappa(X) |\psi_k|^2 + \lambda \kappa(X) |\varphi_k|^2 \right) dX \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda \kappa(X) (|\psi_k|^2 + |\varphi_k|^2) dX \\ & = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (F(X) |\psi_k|^a |\varphi_k|^b + h(X) |\psi_k|^q + k(X) |\varphi_k|^q) dX \\ & \quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} V_M(X) (|\psi_k|^2 + |\varphi_k|^2) dX + o(1) \\ & \leq \lambda C_M \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_k|^a |\varphi_k|^b dX + o(1). \end{aligned}$$

Từ (4.21), ta có

$$\begin{aligned} C_{a,b} & \leq \lambda C_M \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_k|^a |\varphi_k|^b dX \right)^{1 - \frac{2}{a+b}} + o(1) \\ & \leq \lambda C_M \left(\frac{\tilde{N}(c - \Upsilon(v, w))}{\lambda F_0} \right)^{\frac{2}{\tilde{N}}} + o(1) \\ & = \lambda^{1 - \frac{2}{\tilde{N}}} C_M \left(\frac{\tilde{N}}{F_0} \right)^{\frac{2}{\tilde{N}}} (c - \Upsilon(v, w))^{\frac{2}{\tilde{N}}} + o(1). \end{aligned}$$

Đặt $C_0 := C_{a,b}^{\frac{\tilde{N}}{2}} C_M^{-\frac{\tilde{N}}{2}} \tilde{N}^{-1} K_0$. Suy ra

$$C_0 \lambda^{1 - \frac{\tilde{N}}{2}} \leq c - \Upsilon(v, w) + o(1).$$

Do đó Bổ đề được chứng minh. $\square$

Từ bổ đề trên ta có

Bổ đề 4.11. *Giả sử (A1)–(A3) là thỏa mãn. Khi đó $\Upsilon(v, w)$ thỏa mãn điều kiện $(PS)_c$ với mọi $c < C_0 \lambda^{1-\frac{\tilde{N}}{2}}$.*

Bổ đề 4.12. *Giả sử các điều kiện (A1)–(A3) được thỏa mãn và $\lambda \geq 1$. Khi đó, tồn tại $\eta_\lambda > 0, \kappa_\lambda > 0$ thỏa mãn*

$\Upsilon(v, w) > 0$ nếu $0 < \|(v, w)\|_{\mathbb{H}} < \kappa_\lambda$ và $\Upsilon(v, w) \geq \eta_\lambda$ nếu $\|(v, w)\|_{\mathbb{H}} = \kappa_\lambda$.

Chứng minh. Từ bất đẳng thức Sobolev, với mỗi $p \in [2, \tilde{2}^*]$, khi đó tồn tại C_p thỏa mãn nếu $\lambda \geq 1$ thì

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_p \|v\|_{S_{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \lambda \kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N)} \quad \text{với mọi } v \in S_{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \lambda \kappa(X)}^2(\mathbb{R}^N).$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, ta có

$$|v|^a |w|^b \leq \frac{a}{a+b} |v|^{a+b} + \frac{b}{a+b} |w|^{a+b}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(X) |v|^a |w|^b dX &\leq C_1 \left(\|v\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} + \|w\|_{L^{\tilde{2}^*}(\mathbb{R}^N)}^{\tilde{2}^*} \right) \\ &\leq C_1 C_{\tilde{2}^*} \|(v, w)\|_{\mathbb{H}}^{\tilde{2}^*}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Từ điều kiện (A3) và (4.23), tồn tại hằng số C_δ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \Upsilon(v, w) &\geq \frac{1}{4} \|(v, w)\|_{\mathbb{H}}^2 - C_\delta \|(v, w)\|_{\mathbb{H}}^{\tilde{2}^*} \\ &= \frac{1}{4} \|(v, w)\|_{\mathbb{H}}^2 \left(1 - 4C_\delta \|(v, w)\|_{\mathbb{H}}^{\tilde{2}^*-2} \right). \end{aligned}$$

Đặt $\kappa_\lambda = \left(\frac{1}{8C_\delta} \right)^{\frac{1}{\tilde{2}^*-2}}$, khi đó với $\|(v, w)\|_{\mathbb{H}} = \kappa_\lambda$, ta có

$$\Upsilon(v, w) \geq \frac{1}{8} \kappa_\lambda^2 =: \eta_\lambda > 0.$$

Nên bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 4.13. *Giả sử các điều kiện (A1)–(A3) được thỏa mãn. Khi đó với mỗi không gian hữu hạn chiều $\mathbb{E} \subset \mathbb{H}$, ta có*

$$\Upsilon(v, w) \rightarrow -\infty \quad \text{nếu } \|(v, w)\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty \quad \text{với } (v, w) \in \mathbb{H}.$$

Chứng minh. Từ các điều kiện (A2) và (A3), với mọi $(v, w) \in \mathbb{H}$ ta có

$$\Upsilon(v, w) \leq \frac{1}{2} \|(v, w)\|_{\mathbb{H}}^2 - \lambda \widetilde{C}_0 \|(v, w)\|_{L^p(\mathbb{R}^N) \times L^p(\mathbb{R}^N)}^p,$$

trong đó $\widetilde{C}_0 := \frac{\min\{h_0, k_0\}}{p}$. Do các chuẩn trong không gian hữu hạn chiều là tương đương và $p > 2$, nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 4.14. *Giả sử các điều kiện (A1)–(A3) được thỏa mãn. Khi đó với mỗi $\sigma > 0$, tồn tại $\Lambda_\sigma > 0$ thỏa mãn với $\lambda \geq \Lambda_\sigma$, tồn tại $\bar{e}_\lambda \in \mathbb{H}$ với $\|\bar{e}_\lambda\|_{\mathbb{H}} > \kappa_\lambda$, ta có $\Upsilon(\bar{e}_\lambda) \leq 0$ và*

$$\max_{s \geq 0} \Upsilon(s\bar{e}_\lambda) \leq \sigma \lambda^{1-\frac{N}{2}},$$

trong đó κ_λ được xác định trong Bổ đề 4.12.

Chứng minh. Ta xác định các phiếm hàm sau:

$$\begin{aligned} I(v, w) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 + \lambda \kappa(X) |v|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w \right|^2 + \lambda \kappa(X) |w|^2 \right) dX \\ &\quad - \lambda \widetilde{C}_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|v|^p + |w|^p) dX, \\ J(v, w) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} v \right|^2 + \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} w \right|^2 + \kappa(\lambda^{-\frac{1}{2}} X) (|v|^2 + |w|^2) \right) dX \\ &\quad - \widetilde{C}_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|v|^p + |w|^p) dX. \end{aligned}$$

Ta có $I \in C^1(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ và $\Upsilon(v, w) \leq I(v, w)$ với mọi $(v, w) \in \mathbb{H}$. Hơn nữa

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi \right|^2 dX : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1 \right\} = 0.$$

Với mỗi $\delta > 0$, tồn tại $\varphi_\delta, \psi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ sao cho $\|\varphi_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\psi_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$ thỏa mãn

$$\text{supp}(\varphi_\delta, \psi_\delta) \subset B_{r_\delta}(0) \text{ và } \left\| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_\delta \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \delta, \left\| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_\delta \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \delta.$$

Giả sử $e_\lambda(X) = (\varphi_\delta(\sqrt{\lambda}X), \psi_\delta(\sqrt{\lambda}X))$, khi đó $\text{supp } e_\lambda \subset B_{\lambda^{-\frac{1}{2}}r_\delta}(0)$. Hơn nữa, ta có

$$I(se_\lambda) = \lambda^{1-\frac{\tilde{N}}{2}} J(s\varphi_\delta, s\psi_\delta).$$

$$\begin{aligned} \max_{s \geq 0} J(s\varphi_\delta, s\psi_\delta) &\leq \frac{p-2}{2p(p\widetilde{C_0})^{\frac{2}{p-2}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \varphi_\delta \right|^2 + \kappa(\lambda^{-\frac{1}{2}}X) |\varphi_\delta|^2 \right) dX \right\}^{\frac{p}{p-2}} \\ &\quad + \frac{p-2}{2p(p\widetilde{C_0})^{\frac{2}{p-2}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla_{k_3, k_4}^{k_1, k_2} \psi_\delta \right|^2 + \kappa(\lambda^{-\frac{1}{2}}X) |\psi_\delta|^2 \right) dX \right\}^{\frac{p}{p-2}}. \end{aligned}$$

Kết hợp với $\kappa(0) = 0$ và $\text{supp}(\varphi_\delta, \psi_\delta) \subset B_{r_\delta}(0)$, tồn tại $\Lambda_\delta > 0$ thỏa mãn với mọi $\lambda \geq \Lambda_\delta$, ta có

$$\max_{s \geq 0} I(s\varphi_\delta, s\psi_\delta) \leq \lambda^{1-\frac{N}{2}} \frac{(p-2)}{p(p\widetilde{C_0})^{\frac{2}{p-2}}} (2\delta)^{\frac{p}{p-2}}.$$

Do vậy, với mọi $\lambda \geq \Lambda_\delta$, ta có

$$\max_{s \geq 0} \Upsilon(se_\lambda) \leq \lambda^{1-\frac{\tilde{N}}{2}} \frac{(p-2)}{p(p\widetilde{C_0})^{\frac{2}{p-2}}} (2\delta)^{\frac{p}{p-2}}. \quad (4.24)$$

Với mỗi $\sigma > 0$, ta có thể chọn $\delta > 0$ đủ nhỏ thỏa mãn

$$\frac{(p-2)}{p(p\widetilde{C_0})^{\frac{2}{p-2}}} (2\delta)^{\frac{p}{p-2}} \leq \sigma$$

và $e_\lambda(X) = (\varphi_\delta(\sqrt{\lambda}x), \psi_\delta(\sqrt{\lambda}X))$. Cho $\Lambda_\delta = \Lambda_\sigma$, khi đó tồn tại $\bar{s}_\lambda > 0$ thỏa mãn $\|\bar{s}_\lambda e_\lambda\|_{\mathbb{H}} > \kappa_\lambda$ và $\Upsilon(se_\lambda) \leq 0$ với mọi $s \geq \bar{s}_\lambda$. Từ (4.24), ta có $\bar{e}_\lambda = \bar{s}_\lambda e_\lambda$ thỏa mãn điều kiện. $\square$

Tiếp theo, sử dụng các bổ đề trên ta chứng minh Định lý 4.3.

Chứng minh. Đặt

$$c_\lambda := \inf_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \max_{s \in [0,1]} \Upsilon(\gamma(s)),$$

trong đó $\Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0, 1], \mathbb{H}) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \bar{e}_\lambda\}$. Khi đó ta có, với mỗi $\sigma > 0$ sao cho $\sigma < \widetilde{C}_0$, tồn tại $\Lambda_\sigma > 0$ thỏa mãn $\lambda \geq \Lambda_\sigma$. Ta có thể lấy c_λ thỏa mãn $c_\lambda \leq \sigma \lambda^{1-\frac{\tilde{N}}{2}}$.

Từ bổ đề 1.4 ta có Υ thỏa mãn điều kiện $(PS)_{c_\lambda}$ với $c_\lambda \leq \sigma \lambda^{1-\frac{\tilde{N}}{2}}$. Suy ra, tồn tại $(v_\lambda, w_\lambda) \in \mathbb{H}$ thỏa mãn

$$\Upsilon(v_\lambda, w_\lambda) = c_\lambda \quad \text{và} \quad \Upsilon'(v_\lambda, w_\lambda) = 0.$$

Do đó, (v_λ, w_λ) là nghiệm yếu của bài toán (4.2). Lý luận tương tự như trong [22], ta có (v_λ, w_λ) là nghiệm dương thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng. Hơn nữa

$$\begin{aligned} \Upsilon(v_\lambda, w_\lambda) &= \Upsilon(v_\lambda, w_\lambda) - \frac{1}{p} \Upsilon'(v_\lambda, w_\lambda)(v_\lambda, w_\lambda) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|(v_\lambda, w_\lambda)\|_{\mathbb{H}}^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{p-2}{2p} \|(v_\lambda, w_\lambda)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \Upsilon(v_\lambda, w_\lambda) = c_\lambda \leq \sigma \lambda^{1-\frac{\tilde{N}}{2}}.$$

Do vậy định lý được chứng minh. $\square$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 4

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu và một số tính chất nghiệm của một lớp hệ phương trình elliptic suy biến. Các kết quả đạt được là sự tồn tại nghiệm yếu và tính đa nghiệm của hệ trên tương ứng với các lớp hàm phi tuyến $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot), \mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$, hơn nữa còn đánh giá nghiệm trong không gian có trọng tương ứng. Các kết quả đó được thể hiện cụ thể trong các Định lý 4.1, Định lý 4.2 và Định lý 4.3. Trong chương này chúng tôi sử dụng ý tưởng chứng minh trong [22] và kết quả của chương là mở rộng các kết quả trong công trình [22, 82] ứng với toán tử elliptic suy biến.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Những kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, không tồn tại nghiệm không tầm thường, tính đa nghiệm và một số tính chất nghiệm của phương trình elliptic suy biến và hệ phương trình elliptic suy biến. Các kết quả chính đạt được trong luận án bao gồm:

1. Đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_γ : Chứng minh được tính đa nghiệm của bài toán, hơn nữa phiếm hàm của bài toán tại các nghiệm là âm và nghiệm dần hội tụ về 0 (Định lý 2.1).
2. Đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính chứa toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$. Thứ nhất, xây dựng được đồng nhất thức kiểu Pohozeav cho phương trình trên, từ đó chỉ ra trường hợp hàm phi tuyến để phương trình không có nghiệm không tầm thường. Thứ hai, chứng minh được sự tồn tại nghiệm không tầm thường với một lớp hàm phi tuyến tổng quát (Định lý 3.2)
3. Đối với hệ phương trình elliptic suy biến chứa toán tử $\Delta_{k_3, k_4}^{k_1, k_2}$, chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu và tính đa nghiệm của hệ tương ứng với các lớp hàm phi tuyến $\mathcal{H}(\cdot, \cdot, \cdot)$, $\mathcal{K}(\cdot, \cdot, \cdot)$, hơn nữa còn đánh giá nghiệm trong không gian có trọng tương ứng. Các kết quả đó được thể hiện cụ thể trong các Định lý 4.1, Định lý 4.2 và Định lý 4.3.

2. Đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Liên quan tới chủ đề luận án, những vấn đề sau là mở và theo chúng tôi là đáng quan tâm:

1. Xây dựng đồng nhất thức kiểu Pohozeav cho các miền như miền nón, miền trụ.
2. Nghiên cứu tính trơn của các nghiệm yếu đối với phương trình, hệ phương trình elliptic suy biến.
3. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và tính đa nghiệm của các phương trình elliptic suy biến với các điều kiện biên hỗn hợp.
4. Các mô hình ứng dụng thực tế.

Danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

- [1] Duong Trong Luyen, Le Thi Hong Hanh, Infinitely many solutions for perturbed Δ_γ -Laplace equations, *Georgian Mathematical Journal*, 29(6):863–882, 2022. (SCIE-Q2)
- [2] Le Thi Hong Hanh, Duong Trong Luyen and Nguyen Minh Tri, Nontrivial solutions to boundary value problems for semilinear $\Delta_{\alpha_1, \beta_1}^{\alpha, \beta}$ -differential equations, ISAAC-ICMAM 2024 Volume, Analysis and PDE from Developing Countries, Research Perspectives of the Ghent Analysis and PDE Center, Springer-Birkhäuser 2025.
- [3] Duong Trong Luyen, Le Thi Hong Hanh and Pham Thi Thuy, Existence and multiplicity of solutions to perturbed $\Delta_{\alpha_1, \beta_1}^{\alpha, \beta}$ -Laplacian system in $\mathbb{R}^N$ involving critical nonlinearity, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 73, 2749–2765 (2024). (ESCI-Q2)
- [4] Le Thi Hong Hanh, Duong Trong Luyen, Existence of positive solutions to perturbed for semilinear strongly degenerate elliptic problems involving critical growth, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, Volume 95, 2025, 1–14. (ESCI-Q4)

Tài liệu tham khảo

- [1] Ambrosetti A., Malchiodi. A. (2007), *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, in: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 104, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Anh C.T., Hung P.Q., Ke T.D., Phong T.T. (2008), Global attractor for a semilinear parabolic equation involving the Grushin operator, *Electronic Journal of Differential Equations* 32, 1–11.
- [3] Anh C.T., My B.K. (2016), Existence of solutions to Δ_λ -Laplace equations without the Ambrosetti – Rabinowitz condition, *Complex Variables and Elliptic Equations* 61, 137–150.
- [4] Anh C.T., My B.K. (2019), Existence and non-existence of solutions to a Hamiltonian strongly degenerate elliptic system, *Advances in Nonlinear Analysis* 8: 661–678.
- [5] Anh C.T., Lee J., My B.K. (2020), On a class of Hamiltonian strongly degenerate elliptic systems with concave and convex nonlinearities, *Complex Variables and Elliptic Equations* 65, 648–671.
- [6] Bartolo P., Benci V., Fortunato D. (1983), Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with “strong” resonance at infinity, *Nonlinear Analysis* 7, 981–1012.
- [7] Benci V. (1982), On critical point theory of indefinite functionals in the presence of symmetries, *Transactions of the American Mathematical Society* 274 (2), 533–572.

- [8] Bolle P. (1999), On the Bolza problem, *Journal of Differential Equations* 152, 274–288.
- [9] Brézis H., Lieb E. (1983), A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functional, *Proceedings of the American Mathematical Society* 88, 486–490.
- [10] Brézis H., Nirenberg L. (1983), Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 36, 437–477.
- [11] Brézis H. (2011), *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext. Springer, New York.
- [12] Cerami G. (1980), On the existence of eigenvalues for a nonlinear boundary value problem, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 124, 161–179.
- [13] Chang K.C. (2005), *Methods in Nonlinear Analysis*, Springer, Berlin.
- [14] Chen H., Chen H. G., Li J.N. (2020), Research announcements on “Estimates of Dirichlet eigenvalues for degenerate Δ_μ –Laplace operators”, *Journal of Mathematics* 40, 127–130.
- [15] Chen H. , Chen H.G., Li J.N. (2020), Estimates of Dirichlet eigenvalues for degenerate Δ_μ –Laplace operators, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 59, 27.
- [16] Chen J., Tang X., Gao Z. (2017), Infinitely many solutions for semilinear Δ_λ –laplace equations with sign-changing potential and nonlinearity, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 54, 536–549.
- [17] Chung N.T. (2014), On a class of semilinear elliptic systems involving Grushin type operator, *Communications of the Korean Mathematical Society* 29 37–50.

- [18] Chung N.T., Toan H. Q. (2009), On a class of degenerate and singular elliptic systems in bounded domains, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 360, 422–431.
- [19] Chuong N.M., Ke T.D., Thanh N.V., Tri N.M. (1999), Non - existence theorem for boundary value problem for some classes of semilinear degenerate elliptic operators, *Proceeding of the conference on PDEs and their applications*, Hanoi Dec, 185–190.
- [20] Chuong N.M., Ke T.D. (2004), Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system, *Electronic Journal of Differential Equations* 93, 1–15.
- [21] Chuong N. M., Ke T. D. (2005), Existence results for a semilinear parametric problem with Grushin type operator, *Electronic Journal of Differential Equations* 94, 1–12.
- [22] Ding Y.H., Lin F. H. (2007), Solutions of perturbed Schrödinger equations with critical nonlinearity, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 30, 231–249.
- [23] Dugundji J. (1951), An extension of Tietze’s theorem, *Pacific Journal of Mathematics* 1 353–367.
- [24] Evans L.C. (1998), *Partial Differential Equations*, AMS Providence, RI.
- [25] Friedman (1958), On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 7, 43–59.
- [26] Gallone M., Michelangeli A. (2021), Quantum particle across Grushin singularity, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 54, 215201.
- [27] Garofalo N., Tralli G. (2023), Heat Kernels for a Class of Hybrid Evolution Equations, *Potential Analysis* 59, 823–856.

- [28] Ghosh S., Mondal S. S., Swain J. (2024), Strichartz estimates associated with the Grushin operator, *New York Journal of Mathematics* 30 1621–1642.
- [29] Gilbag D., Trudinger N.S. (2001), *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin.
- [30] Grushin V. V. (1970), A certain class of hypoelliptic operators, *Matematicheskii Sbornik* 83, 456–473.
- [31] Grushin V. V. (1971), A certain class of elliptic pseudo differential operators that are degenerated on a submanifold, *Matematicheskii Sbornik* 84, 163–195.
- [32] Helffer B., Nourrigat J. (1985), *Hypoellipticite Maximal pour des Operateurs Polynomes de Champ de Vecteur*, Birkhäuser, Boston.
- [33] Hörmander L. (1966), Psedo-differential operators and nonelliptic boundary problems, *Annals of Mathematics* 83, 129–209.
- [34] Hua C., Hong-Ge C., Jin-Ning L. (2020), Estimates of Dirichlet eigenvalues for degenerate Δ_μ –Laplace operator, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 59, 27.
- [35] Jerison D.S., Lee J.M. (1987), The Yamabe problem on CR manifolds, *Journal of Differential Geometry* 25, 167–197.
- [36] Khanh T.T., Tri N.M. (2010), On the analyticity of solutions to semilinear differential equations degenerated on a submanifold, *Journal of Differential Equations* 249, 2440–2475.
- [37] Kogoj A.E., Lanconelli E.(2012), On semilinear Δ_λ -Laplace equation, *Nonlinear Analysis* 75, 4637–4649.
- [38] Liu S. (2010), On superlinear problems without the Ambrosetti and Rabinowitz condition, *Nonlinear Analysis* 73, 788–795.

- [39] Luyen D.T. (2017), Two nontrivial solutions of boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations, *Mathematical Notes* 101, 815–823.
- [40] Luyen D.T. (2019), Multiple solutions for semilinear Δ_γ differential equations in $\mathbb{R}^N$ with sign-changing potential, *Communications in Mathematical Analysis* 22, 61–75.
- [41] Luyen D.T. (2021), Infinitely many solutions for semilinear strongly degenerate elliptic differential equations with lack of symmetry, *Acta Applicandae Mathematicae* 175, 3.
- [42] Luyen D.T. (2021), Nontrivial solutions to boundary value problems for semilinear Δ_γ –differential equations, *Applied Mathematics* 66, 461–478.
- [43] Luyen D.T. (2022), Multiple solutions for Δ_γ –Laplace problems without the Ambrosetti–Rabinowitz condition, *Asian-European Journal of Mathematics* 3, 2250051.
- [44] Luyen D.T., Cuong P.V.(2022), Multiple solutions to boundary value problems for semilinear strongly degenerate elliptic differential equations, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2* 71, 495–513.
- [45] Luyen D.T., Hanh L.T.H. (2022), Three nontrivial solutions of boundary-value problems for semilinear Δ_γ –Laplace equation, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica* 3, 1–10.
- [46] Luyen D.T., Hanh L.T.H. (2020), Infinitely many solutions for semilinear Δ_γ –differential equations in $\mathbb{R}^N$ without the Ambrosetti–Rabinowitz condition, *Minimax Theory and its Applications* 5, 7–18.
- [47] Luyen D.T., Huong D.T., Hanh L.T.H. (2018), Existence of infinitely many solutions for Δ_γ –Laplace problems, *Mathematical Notes* 103, 724–736.

- [48] Luyen D.T., Tri N.M. (2015), Existence of solutions to boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations, *Mathematical Notes* 97, 73–84.
- [49] Luyen D.T., Tri N.M. (2018), Existence of infinitely many solutions for semilinear degenerate Schrödinger equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 461, 1271–1286.
- [50] Luyen D.T., Tri N.M. (2019), On the existence of multiple solutions to boundary value problems for semilinear elliptic degenerate operators, *Complex Variables and Elliptic Equations* 64, 1050–1066.
- [51] Luyen D.T., Tri N.M. (2020), Infinitely many solutions for a class of perturbed degenerate elliptic equations involving the Grushin operator, *Complex Variables and Elliptic Equations* 65, 2135–2150.
- [52] Luyen D.T., Tri N.M. (2015), Existence of solutions to boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations, *Mathematical Notes* 97, 73–84.
- [53] Luyen D.T., Tri N.M., Tuan D.A. (2024), Nontrivial solutions to the Dirichlet problems for semilinear degenerate elliptic equations, *Mathematical Notes* 116, 1051–1063.
- [54] Monti R. (2006), Sobolev Inequalities for Weighted Gradients, *Communications in Partial Differential Equations* 31, 1479–1504.
- [55] My B.K. (2022), On the existence of solutions of a Hamiltonian strongly degenerate elliptic system with potentials in $\mathbb{R}^N$, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 41, 391–416.
- [56] My B.K. (2023), Nontrivial solutions for a class of Hamiltonian strongly degenerate elliptic system, *Applicable Analysis*, 102:8, 2293–2313.

- [57] My B.K. (2024), Infinitely many solutions of strongly degenerate Schrödinger elliptic equations with vanishing potentials, *Analysis and Mathematical Physics* 14, 43.
- [58] Nga N.Q., Tri N.M., Tuan D.A. (2023), Existence and nonexistence of nontrivial solutions for degenerate elliptic equations in a solid torus, *Journal of Elliptic and Parabolic Equations* 9, 401–417.
- [59] Nga N.Q., Tri N.M., Tuan D.A. (2024), Pólya - Szegő Type Inequality and Imbedding Theorems for Weighted Sobolev Spaces, *Analysis and Mathematical Physics* 14, 20.
- [60] Palais R.S., Smale S. (1964), A generalized Morse theory, *Bulletin of the American Mathematical Society* 70 165–172.
- [61] Papageorgiou N. S., Rădulescu V. D., Repovš D. D. (2019), *Nonlinear Analysis-Theory and Methods*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin.
- [62] Quittner P., Souplet P. (2007), *Superlinear Parabolic Problems: Blow-up, Global Existence and Steady States*, Birkhäuser, Basel.
- [63] Rabinowitz P. H. (1982), Multiple critical points of perturbed symmetric functionals, *Transactions of the American Mathematical Society* 272, 753–769.
- [64] Rahal B., Hamdani M.K. (2018), Infinitely many solutions for Δ_α –Laplace equations with signchanging potential, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 20, 137.
- [65] Struwe M. (1980), Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems, *Manuscripta Mathematica* 32, 335–364.
- [66] Struwe M. (1996), *Variational Methods*, Springer, Berlin.

- [67] Struwe M. (2008), *Multiple nonsemitrivial solutions for quasilinear systems. Variational Methods*, Springer, Berlin.
- [68] Tanaka K. (1989), Morse indices at critical points related to the symmetric mountain pass theorem and applications, *Communications in Partial Differential Equations* 14, 99–128.
- [69] Thuy N.T.C., Tri N.M. (2002), Some existence and non-existence results for boundary value problem (BVP) for semilinear elliptic degenerate operators, *Russian Journal of Mathematical Physics* 9, 366–371.
- [70] Thuy P.T., Tri N.M. (2012), Nontrivial solutions to boundary value problems for semilinear strongly degenerate elliptic differential equations, *Nonlinear Differential Equations and Applications* 19, 279–298.
- [71] Thuy P.T., Tri N.M. (2013), Long time behavior of solutions to semilinear parabolic equations involving strongly degenerate elliptic differential operators, *Nonlinear Differential Equations and Applications* 20, 1213–1224.
- [72] Treves F. (1999), Symplectic geometry and analytic hypoellipticity of differential equations, *Proceedings of a Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society* 65, 201–219.
- [73] Tri N.M. (1998), On the Grushin equation, *Mathematical Notes* 63, 84–93.
- [74] Tri N.M. (1998), Critical Sobolev exponent for hypoelliptic operators, *Acta Mathematica Vietnamica* 23, 83–94.
- [75] Tri N.M. (1999), Semilinear perturbation of powers of the Mizohata operators, *Communications in Partial Differential Equations* 24, 325–354.

- [76] Tri N.M. (2008), Semilinear hypoelliptic differential operators with multiple characteristics, *Transactions of the American Mathematical Society* 360, 3875–3907.
- [77] Tri N. M. (2010), *Semilinear Degenerate Elliptic Differential Equations*, Local and global theories, Lambert Academic Publishing, 271p.
- [78] Tri N.M. (2014), *Recent Progress in the Theory of Semilinear Equations Involving Degenerate Elliptic Differential Operators*, Publishing House for Science and Technology of the Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi.
- [79] Willem M. (1996), *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Boston.
- [80] Zhang L., Tang X., Chen Y. (2019), Infinitely Many Solutions for Sublinear Modified Nonlinear Schrödinger Equations Perturbed from Symmetry, *Taiwanese Journal of Mathematics* 23, 857–882.
- [81] Zographopoulos N.B. (2004), On a class of degenerate potential elliptic system, *Nonlinear Differential Equations and Applications* 11, 191–199 .
- [82] Jiang J., Liu W. (2015), Existence of solutions for perturbed elliptic system with critical exponents, *Boundary Value Problems* 2015:90.

Thái Nguyên, ngày 9 tháng 3 năm 2026

**BÁO CÁO VỀ VIỆC BỔ SUNG, SỬA CHỮA LUẬN ÁN TIỀN SĨ THEO NGHỊ
QUYẾT CỦA HỘI ĐỒNG ĐÁNH GIÁ LUẬN ÁN CẤP TRƯỜNG**

Của nghiên cứu sinh: LÊ THỊ HỒNG HẠNH

Đề tài: Sự tồn tại và một số tính chất của nghiệm đối với bài toán Elliptic suy biến

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9460102

Người hướng dẫn: TS. Dương Trọng Luyện, Trường Đại học Hoa Lư

TS. Phạm Thị Thủy, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

Căn cứ nội dung nghị quyết, Biên bản chi tiết cuộc họp Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ cấp Đại học ngày 9 tháng 2 năm 2026 thành lập theo Quyết định số 82/QĐ-ĐHSP, ngày 9 tháng 1 năm 2026 của Hiệu trưởng trường Đại học Sư phạm, nghiên cứu sinh đã nghiên cứu những nội dung quyết nghị và kết luận của hội đồng, đối chiếu với nội dung luận án, tôi xin giải trình chi tiết các nội dung sau:

1. Nội dung thứ nhất về: Mục 1.3 tác giả nên thêm trích dẫn theo tài liệu nào?

Giải trình của NCS: Tiếp thu ý kiến của cán bộ phản biện và đã bổ sung trong mục 1.3 trang 22 được trích dẫn trong các tài liệu 12, 29 và 66 .

2. Nội dung thứ hai về: Giả thiết (F4) trong chương 2 nên được viết vào giả thiết trong (F1) và có thể có cả (F5), nếu để riêng thì (F1) hầu như không có ý nghĩa?

Giải trình của NCS: Tiếp thu ý kiến của các thành viên trong hội đồng và chỉnh sửa như sau: Đưa phân tích $f=f_1+f_2$ và tính liên tục của các hàm lên trên các giả thiết (F1)-(F5) và điều chỉnh lại giả thiết (F1) như sau: Tồn tại các hằng số; còn các giả thiết khác để nguyên (như nội dung trang 27, 28 của Luận án)

3. Nội dung thứ ba về: Trong chương 4 nên sử dụng các ký hiệu giả thiết khác (F1), (F2) , (F3), (F4) vì các ký hiệu này đã được sử dụng trong chương 2.

Giải trình của NCS: Tiếp thu ý kiến của các thành viên trong hội đồng và đã chỉnh sửa ký hiệu (F1), (F2), (F3), (F4) trong chương 4 thành các ký hiệu (K1), (K2) (K3), (K4) trang 73 để tránh nhầm với giả thiết ở chương 2.

4. Nội dung thứ tư về: Thống nhất ký hiệu F' và F^* trong phần ký hiệu viết tắt và trong chương 1.

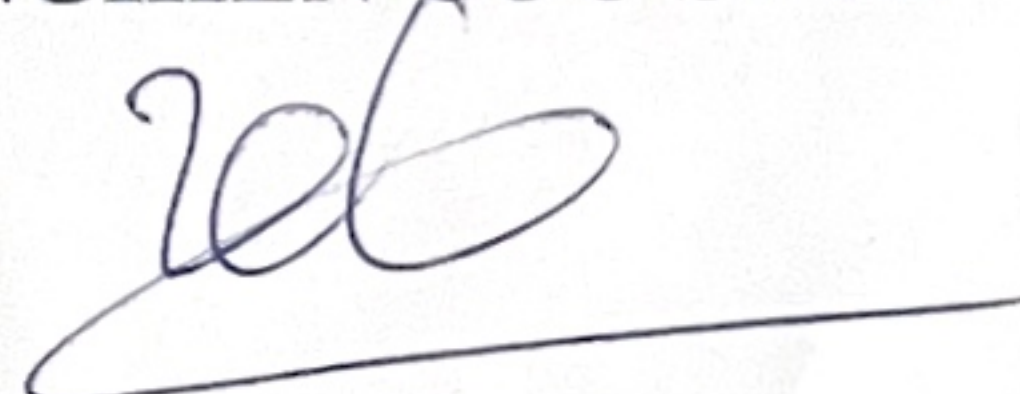


Giải trình của NCS: Tiếp thu ý kiến của các thành viên trong hội đồng và đã thống nhất chỉ sử dụng ký hiệu F^* là không gian đối ngẫu của không gian Banach F .

5. Về chỉnh sửa các lỗi chính tả và lỗi đánh máy: Phần này tác giả tiếp thu tất cả các lỗi chính tả và lỗi đánh máy mà các thành viên trong Hội đồng đã góp ý trong luận án của tác giả như trang 23, 59, 60, 63, 64, 105.

Trên đây là toàn bộ các giải trình của nghiên cứu sinh về các nội dung cần bổ sung, sửa chữa theo Nghị quyết và Biên bản họp Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ cấp Trường. Nghiên cứu sinh xin trân trọng cảm ơn.

NGHIÊN CỨU SINH



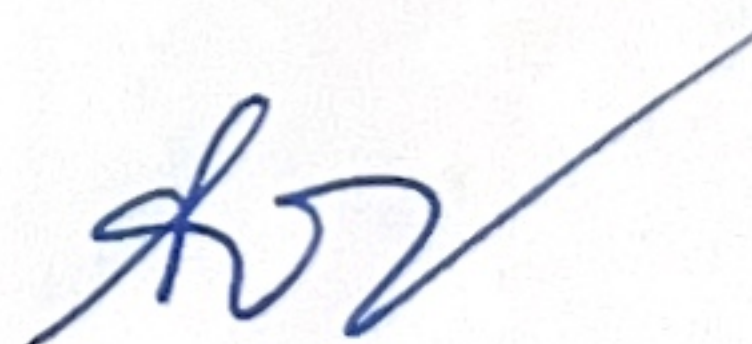
Lê Thị Hồng Hạnh

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN 1



TS. Dương Trọng Luyện

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN 2



TS. Phạm Thị Thủy

THƯ KÝ HỘI ĐỒNG



TS. Trần Đình Hùng

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG



GS.TSKH. Vũ Ngọc Phát

THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ ĐÀO TẠO

KI. HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG



PGS.TS. Từ Quang Tân